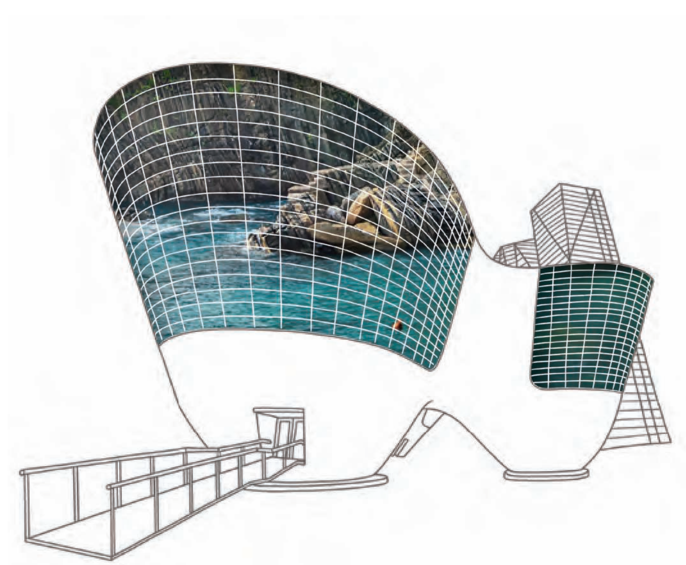
고등학교

수학

교사용 지도서

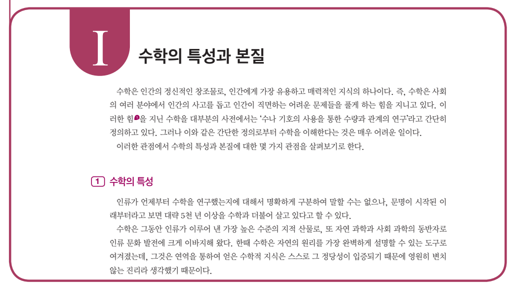
황선욱
강병개
윤갑진
이광연
김수영
이문호
김원일
박문환
박상의



MiraeN

구성과 특징

총론



I 수학의 특성과 본질

수학은 인간의 정신적인 창조물로, 인간에게 가장 유용하고 매력적인 지식의 하나이다. 즉, 수학은 사회의 여러 분야에서 인간의 사고를 돕고 인간이 직면하는 어려운 문제들을 풀게 하는 힘을 지니고 있다. 이러한 힘[1]을 지닌 수학을 대부분의 사전에서는 '수나 기호의 사용을 통한 수량과 관계의 연구'라고 간단히 정의하고 있다. 그러나 이와 같은 간단한 정의로부터 수학을 이해한다는 것은 매우 어려운 일이다.

이러한 관점에서 수학의 특성과 본질에 대한 몇 가지 관점을 살펴보기로 한다.

1 수학의 특성

인류가 언제부터 수학을 연구했는지에 대해서 명확하게 구분하여 말할 수는 없으나, 문명이 시작된 이래부터라고 보면 대략 5천 년 이상을 수학과 더불어 살고 있다고 할 수 있다.

수학은 그동안 인류가 이루어 낸 가장 높은 수준의 지적 산물로, 또 자연 과학과 사회 과학의 동반자로 인류 문화 발전에 크게 이바지해 왔다. 한때 수학은 자연의 원리를 가장 완벽하게 설명할 수 있는 도구로 여겨졌는데, 그것은 연역을 통하여 얻은 수학적 지식은 스스로 그 정당성이 입증되기 때문에 영원히 변치 않는 진리라 생각했기 때문이다.

• 수학의 특성과 본질, 수학 교육 이론을 소개하였습니다.

VI 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

여기서는 교육부에서 고시한 「수학과 교육과정(2015)」[17]과 한국과학창의재단의 「2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ」[18]에 제시된 내용을 참고하여 2015 개정 교육과정에 대해 자세히 살펴보기로 한다.

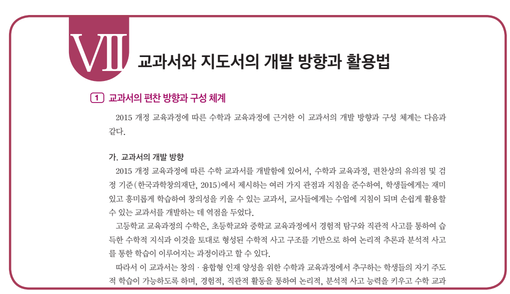
1 교육과정 개정의 필요성

교육과정은 학교 교육을 담아내는 그릇에 비유할 수 있다. 교육부는 인문학적 상상력과 과학 기술 창조력을 갖춘 창의 · 융합형 인재를 길러내기 위한 교육 개혁의 일환으로 교육과정 개정을 추진하였다. 2015 개정 교육과정은 미래 사회가 요구하는 핵심 역량(core competency)을 구현하고, 배움을 즐기는 행복 교육이 가능하도록 학습 내용을 적정화하며, 교수 · 학습 및 평가 방법을 개선하여 교실 수업을 혁신하고자 하였다. 수학과 교육과정은 학교 수학 교육의 전반을 결정하는 핵심적인 계획서로, 다음과 같은 다섯 가지 측면에서 개정 연구의 필요성을 정리할 수 있다.

가. 창의 · 융합형 인재의 양성

기존의 지식 암기식 수업과 정답 위주의 문제 풀이 학습으로는 추격형 모방 경제에 적합한 인간을 양산할 수밖에 없다는 지적이 제기되어 왔다. 이에 2015 개정 수학과 교육과정은 선도형 창조 경제를 이끌 수 있도록 창의 · 융합형 인재를 양성하는 것이 기본 방향이 되어야 한다.

• 2015 개정 수학과 교육과정의 내용을 자세히 제시하였습니다.



VII 교과서와 지도서의 개발 방향과 활용법

1 교과서의 편찬 방향과 구성 체계

2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 근거한 이 교과서의 개발 방향과 구성 체계는 다음과 같다.

가. 교과서의 개발 방향

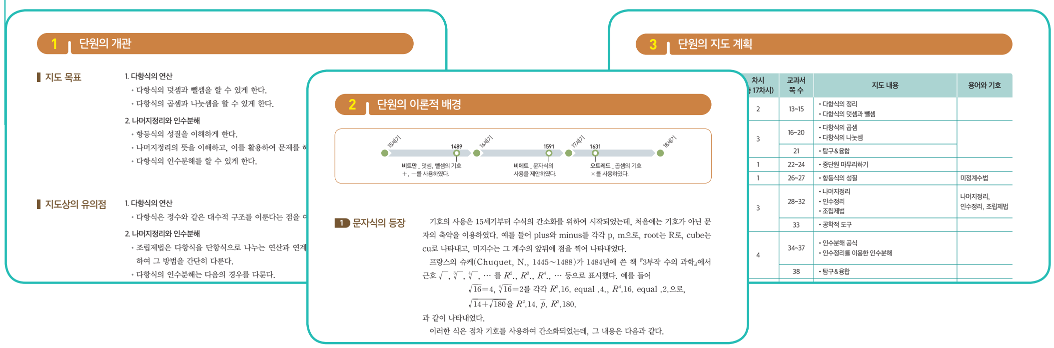
2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서를 개발함에 있어서, 수학과 교육과정, 편찬상의 유의점 및 검정 기준(한국과학창의재단, 2015)에서 제시하는 여러 가지 관점과 지침을 준수하여, 학생들에게는 재미있고 흥미롭게 학습하여 창의성을 키울 수 있는 교과서, 교사들에게는 수업에 지침이 되며 손쉽게 활용할 수 있는 교과서를 개발하는 데 역점을 두었다.

고등학교 교육과정의 수학은, 초등학교와 중학교 교육과정에서 경험적 탐구와 직관적 사고를 통하여 습득한 수학적 지식과 이것을 토대로 형성된 수학적 사고 구조를 기반으로 하여 논리적 추론과 분석적 사고를 통한 학습이 이루어지는 과정이라고 할 수 있다.

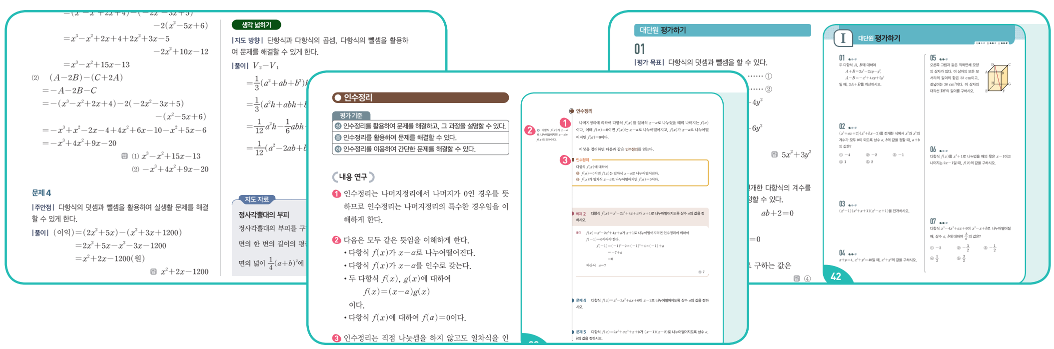
따라서 이 교과서는 창의 · 융합형 인재 양성을 위한 수학과 교육과정에서 추구하는 학생들의 자기 주도적 학습이 가능하도록 하며, 경험적, 직관적 활동을 통하여 논리적, 분석적 사고 능력을 키우고 수학 교과

• 교과서와 지도서의 개발 방향과 활용법, 연간 지도 계획을 자세히 제시하였습니다.

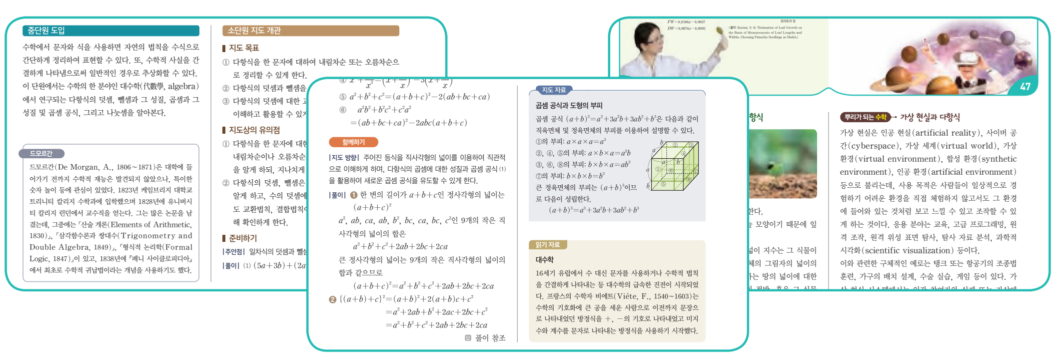
각론



• 단원의 지도 목표, 지도상의 유의점, 학습 계통도 및 단원을 지도하는 데 도움이 되는 이론적 배경, 지도 계획을 제시하였습니다.



• 교과서 본문의 내용 설명과 활동의 지도 방향을 제시하였고, 각 단원의 평가 기준, 모든 문제에 대한 주안점 또는 평가 목표와 풀이를 제공하여 수준별 교수 · 학습에 활용할 수 있게 하였습니다.



• 다양한 도입 자료, 지도 자료, 읽기 자료를 제시하여 학생들의 눈높이에 맞춰 수업에서 적절히 활용할 수 있게 하였습니다.

차례

총론

각론

총론

I 수학의 특성과 본질

수학은 인간의 정신적인 창조물로, 인간에게 가장 유용하고 매력적인 지식의 하나이다. 즉, 수학은 사회의 여러 분야에서 인간의 사고를 돕고 인간이 직면하는 어려운 문제들을 풀게 하는 힘을 지니고 있다. 이러한 힘[1]을 지닌 수학을 대부분의 사전에서는 '수나 기호의 사용을 통한 수량과 관계의 연구'라고 간단히 정의하고 있다. 그러나 이와 같은 간단한 정의로부터 수학을 이해한다는 것은 매우 어려운 일이다.

이러한 관점에서 수학의 특성과 본질에 대한 몇 가지 관점을 살펴보기로 한다.

1 수학의 특성

인류가 언제부터 수학을 연구했는지에 대해서 명확하게 구분하여 말할 수는 없으나, 문명이 시작된 이래부터라고 보면 대략 5천 년 이상을 수학과 더불어 살고 있다고 할 수 있다.

수학은 그동안 인류가 이루어 낸 가장 높은 수준의 지적 산물로, 또 자연 과학과 사회 과학의 동반자로 인류 문화 발전에 크게 이바지해 왔다. 한때 수학은 자연의 원리를 가장 완벽하게 설명할 수 있는 도구로 여겨졌는데, 그것은 연역을 통하여 얻은 수학적 지식은 스스로 그 정당성이 입증되기 때문에 영원히 변치 않는 진리라 생각했기 때문이다.

이와 같은 입장에서 수학이 갖는 학문적 특성을 살펴보기로 한다.

가. 공리성

수학의 가장 큰 특성은 아무도 의심할 수 없는 진리를 쌓아갈 수 있는 원리와 방법, 즉 공리적 방법(axiomatic method)을 갖고 있다는 것이다. 수학은 명백히 참으로 여겨지는 몇 가지 원리, 예를 들어 '두 점을 지나는 직선이 있다.'와 같은 것들을 공리(公理, axiom)로 정하고, 다루고자 하는 대상들을 정의(定義, definition)로 규정한 후, 이들을 이용하여 정해진 추론의 규칙(rule of inference)에 따라 새로운 정리(定理, theorem)를 얻어 낸다. 이렇게 하여 얻어진 정리들은 애초의 공리나 정의가 바뀌지 않는 한 변함없이 참인 명제가 된다.

나. 일반성과 추상성

수학의 또 하나의 특성으로 일반성과 추상성을 들 수 있는데, 이 두 성질은 다음과 같은 이유로 하나로 인식될 수 있다.

수학은 기본적으로 다루고자 하는 대상을 그 자체로 연구하기도 하지만 대상들 사이의 상호 관계를 연구하고, 그들 사이에 유사성이 있으면 그것을 하나의 개념으로 하는 새로운 구조를 탄생시킨다. 그러므로 그 새로운 구조는 여러 가지 대상들을 아우르는 포괄적이고도 일반적인 구조가 된다. 그 일반적인 구조를 수학적으로 정의하기 위해서는 매우 추상적인 개념을 이용해야 하는데, 대개의 수학적 구조는 몇 가지 공통된 성질을 묶어 공리화하고, 그러한 공리를 만족하는 대상들에게 공통의 이름을 부여한다.

예를 들어 주어진 집합의 어떤 부분집합들의 집합이 몇 가지 공통된 성질을 만족할 때, 이를 위상(位相, topology)이라 하며, 위상을 갖는 집합에는 위상공간(位相空間, topological space)이라는 이름을 부여한다. 이때 위상은 대단히 추상적이며 포괄적이고 일반화된 개념이다.

---

[1] 이것을 2007 개정 교육과정에서 강조하였던 '수학적 힘(mathematical power)'으로 이해할 수 있다.

다. 활용성

현대 수학은 무한한 활용성을 또 하나의 특성으로 들 수 있다. 18세기의 수학은 자연 과학과 더불어 발전하였고, 19세기에는 수학이 세분화되어 자연 과학으로부터 독립하였다면, 20세기 이후에는 분화된 수학의 영역에 다양한 응용 수학이 자리 잡았다. 자연 과학의 여러 분야는 물론이고, 경제학, 심리학과 같은 인문 · 사회 과학을 위한 수학이 생겨났다.

국가를 비롯하여 기업이나 조직의 효율적인 경영을 위한 경영 전략을 세우는 데에도 수학이 필요하고, 정보화 사회에서 정보의 보안을 위한 암호 체계의 수립에 있어 수학은 필수적이며 가장 중요한 도구이다. 금융과 보험에서도 수학적 모델을 만들고 그것의 수학적 분석을 통하여 이익과 손해를 예상하고 위험을 최대한 줄이는 것이 일반화되었다. 효율적인 네트워크의 구성에도 수학적 분석이 필요함은 두말할 필요도 없다.

라. 도구성

수학은 다른 학문의 연구에서도 피할 수 없는 도구가 되고 있다. 간단한 통계 자료의 분석뿐만 아니라 빅 데이터의 처리에도 수학적 기법을 활용하며, 학자들이 자신의 연구의 정당성을 입증하기 위하여 공리적 방법을 동원하는 일은 이제 보편적인 것이 되었다.

1998년에 나온 SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics)의 특별 보고서에서도 "전반적인 과학 기술의 발달로 인하여 수학이 응용되지 않는 분야가 더는 존재하지 않는다."라고 하였다.

2 수학의 본질

수학은 다른 과학들과 다르게 우리가 다섯 개의 감각 기관을 통해서 알 수 있는 물리적 대상을 직접적으로 취급하지는 않는다. 오히려 수학의 대상이 되는 것은 물리적 대상이 아닌 우리의 마음에 존재하는 모든 관념적 대상이다. 따라서 수학을 이해하기 위해서는 두 가지 세계, 즉 물리적 세계와 관념적 세계의 내면적 상호 작용을 이해하는 것이 필요하다.

물리적 세계는 직접적 또는 간접적인 방법으로 관찰될 수 있는 물리적 대상의 세계를 말하며, 관념적 세계는 이를테면 평면이나 점과 같은 수학적 실체가 존재하는 세계를 뜻한다. 즉, 평면이나 점은 평평한 종이나 연필의 뾰족한 끝과 같은 물리적 대상을 이상화한 것이다.

바슬러 · 콜브(Bassler & Kolb, 1971)는 이 두 세계의 상호 작용을 다음과 같은 활동에서 볼 수 있다고 주장한다.

- 물리적 세계에서 발생하는 상황이나 문제들은 거기에서 관찰될 수 있는 중요한 물리적 대상과 이 대상들 간의 관계를 확인하기 위하여 조사된다.
- 물리적 상황에서의 요소들 사이의 특징과 관계는 관념적 세계에서 이상화된다. 그것은 때로는 물리적 상황이 수학화된다고 말해지기도 하며, 때로는 물리적 상황에서의 관계가 수학적 언어인 명제로 추상화된다고 말해지기도 한다.
- 수학적 명제들은 수학적 기술에 의하여 타당성이 조사되고, 또 새로운 명제가 탐구되기도 한다. 이때 수학의 하나 또는 그 이상의 과목의 내용과 방법이 새로운 관계의 명제를 유도하기 위하여 적용되기도 하며, 이 명제의 타당성은 논리적 증명의 수단을 통하여 입증된다.

  수학적 용어와 명제 전체를 물리적 문제에 대한 수학적 모델(mathematical model)이라고 부른다.
- 수학적 모델에서의 수학적 실체와 명제는 물리적 세계에서 특수한 대상과 관계로 다시 해석되고 물리적 문제의 해답에 적용된다.

• 수학적 모델로부터 유도된 해답과 예측은 물리적 상황에서 이들이 어긋나는지를 결정하기 위하여, 또 물리적 상황에서 효용이 되는지를 확인하기 위하여 시험된다.

물리적 세계에서의 상황 또는 문제는 이상화와 추상화의 과정을 통하여 관념적 세계에서 수학적 모델로 구성된다. 이때 유의할 것은 추상화 과정은 원래의 물리적 상황을 왜곡할 수도 있으며 수학적 모델은 수학적 관점에서는 예술적일지 몰라도 물리적 상황의 특성을 충실하게 반영하지 못할 수가 있다. 다시 말하면 수학은 모든 물리적 성질을 추상화하는 것이 아니라 특수한 성질만을 추상화하게 된다. 예를 들어 색깔, 맛, 물체의 상태와 같은 질적인 성질의 추상화가 아닌 크기, 순서, 모양과 같은 양적인 성질만을 추상화하게 된다.

같은 방법으로 수학적 모델이 물리적 세계로 선택되고 변형될 때, 재해석된 수학적 모델이 물리적 상황에 적합하지 못한 경우가 있다. 이럴 때, 그 물리적 문제에서 관찰된 사실들과 일치하는 해답과 예측을 산출하는 또 다른 수학적 모델이 발견되지 않으면 안 된다.

우리는 지금까지 물리적 세계와 관념적 세계의 상호 작용을 통하여 수학을 이해하기 위한 시도를 해 왔다. 이 상호 작용의 관찰을 통하여 우리는 학교 수학으로서의 수학의 본질과 수학적 활동을 정리할 수 있다.

가. 수학은 수학적 모델이라 불리는 모순 없는 명제들의 모임이다.

수학은 지식의 동체(胴體)로 수학적 모델이라 불리는 모순 없는 명제들의 모임이며, 수학적 모델을 구성하기 위한 수학적 활동은 물리적 상황이나 문제의 특수한 성질을 이상화하고 추상화하는 행동으로 구성된다.

수학적 모델은 수학의 주요한 네 가지 과목인 산술, 대수, 기하, 해석으로 나뉘어 구성된다.

산술은 수 체계에서의 특수한 성질, 관계, 연산을 연구하는 분야이고, 대수는 수 체계의 한 분야인 수학 내에서의 성질, 관계, 연산, 구조에 대한 일반화를 연구하는 분야이다.

기하학은 공간에서 곡선과 곡면의 수학적 성질에 대한 연구와 평면도형, 입체도형의 계량적, 비계량적 성질을 연구하는 분야이다.

해석학은 자연 상태에서의 연속적인 과정과 수직선에서의 연속성을 응용하는 것 등을 연구하는 분야이다.

그러나 이들 수학의 과목들은 내면적으로 서로 관련된 상태에서 상호 의존적이므로 독립적으로 분리되어 연구되지 않는다. 따라서 수학은 수학적 모델들을 잘 조직한 지식이라 말할 수 있다.

나. 수학은 하나의 언어이다.

수학은 물리적 상황이나 문제를 이상화하고 추상화하는 과정에서 관념을 나타내기 위하여 세밀하게 선택된 용어와 기호를 수학적 언어로 사용함으로써 불필요한 수식을 하지 않는다. 수학적 언어는 앞에서도 말한 것처럼 양을 나타내는 언어, 다시 말하면 크기나 순서를 나타내는 언어와 논리적 탐구를 위한 언어이다.

다. 수학은 양식(pattern)과 관계의 연구이다.

수학은 앞에서 설명한 것처럼 물리적 세계에서의 특수한 대상과 관계를 탐구 대상으로 하여 추상화한 수학적 모델을 구성한다. 예를 들어 일찍이 인간은 자연(물리적 세계)이 차례와 양식에 의하여 순서 지어진 것을 주목하였다. 자연에는 계절, 낮과 밤, 달의 주기, 조수(潮水)의 변화 등 일정한 양식이 있고, 자고 깨는 양식에 의한 생활의 리듬이 있으며, 어른이든 아이든 자신의 생활의 리듬이 깨지면 심하게 당황하게 된다.

이와 같은 물리적 세계의 변화를 알아차린 인간들은 자연과 매일매일의 생활에서 양식을 기록하고 싶은 욕구 때문에 일찍부터 수학적 모델의 하나인 명수 체계(命數 體系, enumeration system)를 고안하였다.

라. 수학은 사고의 방법이다.

수학은 물리적으로 존재하지 않는 관념들을 대상으로 취급한다. 물리적 세계로부터 이상화되고 추상화된 수학적 관념은 인간이 경험할 수 있는 물리적 상황에 국한된다. 그러나 수학적 관념은 인간이 물리적으로 경험할 수 없는 무한적인 차원에서도 가능하게 된다. 따라서 수학은 실험이 아닌 엄격한 논리적 추론에 의한 수학적 사고를 요구하게 된다.

추론의 주요한 두 가지 형태는 귀납적 추론과 연역적 추론으로 나눌 수 있다. 이때 귀납적 추론을 "부분에서 전체로, 특수한 것에서 일반적인 것으로 또는 개별적인 것에서 보편적인 것으로의 추론"으로 정의한다.[2]

귀납적 추론(歸納的 推論, inductive inference 또는 a posteriori reasoning)은 일반적으로 다음과 같은 단계를 거친다.

정보의 관찰, 수집, 기록 ➡ 수집된 자료의 분석 ➡ 결론의 추출 ➡ 응용과 일반화 시도

물리적 대상들 간의 관계를 수학화하기 위한 활동은 주어진 대상들로부터 정보를 관찰하고, 수집하고, 분석하는 활동에서부터 시작된다. 여기에서 기존의 지식과 과거의 경험에 바탕을 두고 잠정적인 결론을 내리게 된다. 이 잠정적인 결론은 수학적 또는 논리적 연역을 통한 증명을 시도하게 함으로써 귀납적 추론의 범위를 넘어서게 되며, 이 결론이 증명될 수 있을 때 그것이 다른 체계에 적합한지를 알아보기 위한 일반화를 시도하게 되는 것이다.

연역적 추론(演繹的 推論, deductive inference 또는 a priori reasoning)은 주어진 조건으로부터 필연적으로 어떤 결론이 수반되는 것을 증명하기 위하여 형식 논리를 바탕으로 엄격한 규범들을 사용하는 것을 뜻한다. 귀납적 사고에 의하여 얻어진 결론은 연역적 추론으로 증명된다.

수학에서 하나의 수학적 체계는 무정의 용어, 정의, 공리와 이들을 출발점으로 하여 연역적 추론으로 증명되는 정리로 구성된다. 무정의 용어, 정의, 공리들은 수학적 체계의 구조를 결정한다. 만약 수학적 체계 내에서 하나의 공리를 수정하거나 삭제한다면 그 체계는 바뀔 수 있다.

[2] Merriam-Webster, 『Webster's Seventh New Collegiate Dictionary』

Ⅱ 수학 교육의 목적과 목표

수학은 다른 학문과 달리 인류 역사의 시간과 더불어 발생하기 시작하여 문화 발전과 병행하여 발전해 온 것이기도 하다. 오늘날 모든 과학에서뿐만 아니라 생산, 기술을 비롯하여 국가 발전이나 인간 형성에 이르기까지의 각 분야에서, 그들의 필요에 따라 수학 교육에 요청하는 사항이 급격하게 증대하여 오고 있는 사실을 우리는 묵과할 수 없다. 이들 요청은 앞에서 진술한 수학의 특징 중에서 어떤 측면에 기대를 걸고 있으며, 그것을 강조하여 육성해 달라는 것임이 틀림없다. 실제로 수학 교육은 이러한 요청에 의하여 발생되고, 발전되어 왔다고 해도 과언이 아니다.

컴퓨터 사용이 생활화된 정보화 시대에 들어와 있는 오늘날에는 수학 교육이 이 시대에 대비한 어떤 역할을 해 주기를 강력하게 요청하고 있으며, 이런 흐름은 피할 수 없는 실정이기도 하다.

1 수학의 가치

앞에서 살펴본 수학의 특성과 본질에 대한 이해를 통하여 수학의 가치를 인식하게 되는데, 일반적으로 수학의 가치는 크게 실용적 가치, 정신 도야적 가치, 심미적 가치, 문화적 가치의 네 가지로 나눌 수 있다. 수학 교육의 목적과 목표는 이와 같은 수학의 가치를 구현하는 데 있으며, 수학의 가치에 대한 논의는 수학 교육의 목적과 목표를 설정하는 기초가 된다고 할 수 있다.

가. 실용적(實用的) 가치

이는 수학을 배우면 사회생활을 하는 데 그리고 장차 과학이나 다른 학문을 하는 데 유익하다는 것이다. 수 개념이나 사칙연산 등과 같이 어떤 수학적 지식은 사회생활을 하는 데 필수적이며, 또 어떤 수학적 지식은 사회생활에 직접 사용이 되지 않는다 하더라도 다른 학문을 하는 데 필수적이다. 과학 기술의 발달로 수학을 필요로 하는 분야가 많아지고 수학의 중요성이 점점 증대되고 있을 뿐만 아니라 공학, 경제학을 비롯하여, 산업, 금융, 국방, 정보 통신, 의학 등 많은 분야에서 수학은 기초적인 문제 해결의 도구로서 중요한 역할을 한다.

나. 정신 도야적(精神 陶冶的) 가치

이는 수학을 배우면 우리의 정신 능력을 신장시킬 수 있다는 것이다. 수학을 배우면서 습득한 합리적이고 논리적인 사고력, 추상화 능력, 창의성, 비판적 사고 능력, 기호화하고 형식화하는 능력, 단순화하고 종합화하는 능력 등은 수학이 아닌 다른 분야에서도 그 위력을 발휘할 수 있다. 이러한 능력은 수학과 관련이 없는 분야에 진출하는 사람에게도 요구되는 정신 능력으로서 수학을 배워야 하는 강력한 이유가 된다.

다. 심미적(深美的) 가치

이는 수학적 대상도 아름다우며, 수학의 공식이나 방법이 절묘하고 아름답게 적용되는 것을 통해 수학의 아름다움을 느낄 수 있다는 것이다. 학생들 수준에서 수학의 심미적 가치를 쉽게 인식하기는 어렵지만, 많은 수학자가 수학에서 볼 수 있는 추상화된 아이디어들의 아름다움을 강조하였다. 우주와 자연의 조화로운 질서를 밝혀내는 수학적 개념과 이론들은 그 자체로 아름답다.

라. 문화적(文化的) 가치

이는 인류가 오래전부터 오늘날까지 구축해 온 수학이라는 지적 문화유산을 수용하고 다음 세대에 잘 전달하는 것이 가치가 있다는 것이다. 수학은 수많은 사람의 노력을 거쳐 생동하며 발전해 오면서 시대마다 그 사회 발전에 크게 공헌해 왔다. 또한, 현대에도 다방면에 걸쳐 기여하는 바가 큰 인류의 소중한 정신적,

문화적 유산이다. 그러므로 수학을 배우는 것은 곧 인류가 남긴 문화적, 학문적 유산을 계승하여 활용하고 발전시키는 일에 참여하는 셈이 된다.

2 수학 교육의 목적

수학 교육은 학습자를 수학적 세계로 입문시키는 과정으로, 학교 수학을 통하여 유용성의 측면에서 수학의 본질을 깨닫게 하고, 수학적 활동을 훈련하는 것이다.

수학의 특성이 논리성과 일반성 그리고 추상성에 있다고 볼 때, 수학은 합리적이고도 종합적, 분석적 사고력을 함양하는 데 적합한 교과라 할 수 있다. 수학을 학습함으로써 길러질 수 있는 논리적이고 비판적인 사고력과 이들을 형식화하고 일반화하는 종합적 사고력 등은 수학이 인간이 가질 수 있는 가장 고도의 사고 능력을 함양하는 정신 도야적 기능을 갖추고 있음을 말해 준다.

수학은 합리적 문제 해결 방법을 제시하는 교과로서의 성격을 갖는다. 수학이 어려운 교과로 인식되는 이유는 아마도 문제 해결의 과정에서 조금의 빈틈도 허용하지 않기 때문일 것이다. 수학이 요구하는 문제 해결 방법은 처음부터 끝까지 논리적이어야 하고 매우 세심한 주의를 요구하기 때문에 가장 합리적인 절차를 따라야 하고, 가장 합리적인 결론에 이르게 한다.

수학은 또한 다루는 대상들 사이의 상호 관계를 연구하고 그들 사이의 관계를 규명하는 학문이므로, 사물의 구조와 계통을 파악하는 훈련을 하는 데 적합한 교과이다. 구조를 분석하여 계통을 세우고 분류하는 일은 수학뿐만 아니라 다른 학문을 하는 데에도 기본적인 소양이 되며, 우리의 일상생활에서도 중요한 수단의 하나이다.

수학 교육은 이와 같은 학문으로서의 수학의 성격과 더불어 인성 교육으로서의 성격과 목적을 갖는다. 수학은 민주 시민으로서의 전인적인 인간을 형성하는 데 있어서 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력을 길러 줌으로써, 사회적 규범을 준수하고 질서를 지키며 합리적인 근거에 의하여 자신의 의사를 결정할 수 있는 능력을 길러 줄 수 있는 교과이다. 또한, 수학은 실생활에서 직접적으로 부딪히는 여러 가지 문제를 합리적이고 창의적으로 해결할 수 있는 능력을 길러 주는 데에도 한몫을 하고 있다.

이와 같은 관점에서 2015 개정 교육과정[3]에는 수학과의 성격을 다음과 같이 기술하고 있다.

> 수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다.

수학은 오랜 역사를 통해 인류 문명 발전의 원동력이 되어 왔으며, 세계화 · 정보화가 가속화되는 미래 사회의 구성원에게 필수적인 역량을 제공한다. 수학 학습을 통해 학생들은 수학의 규칙성과 구조의 아름다움을 음미할 수 있고, 수학의 지식과 기능을 활용하여 수학 문제뿐만 아니라 실생활과 다른 교과의 문제를 창의적으로 해결할 수 있으며, 나아가 세계 공동체의 시민으로서 갖추어야 할 합리적 의사 결정 능력과 민주적 소통 능력을 함양할 수 있다고 설명하고 있다.

가. 수학 교육의 목적은 사회의 변화에 따라 영향을 받는다.

수학적 활동은 물리적 세계와 관념적 세계 간의 상호 작용의 과정으로, 물리적 대상과 이들 대상들 간의 관계를 수학적 모델로 구성하기 위한 이상화 · 추상화의 과정과 구성된 수학적 모델로부터 새로운 명제나 관계를 유도하는 귀납적 · 연역적 추론의 과정, 증명된 명제나 관계를 물리적 세계로 다시 전환하고 적용하는 과정 전체를 포함한다.

---

3 교육부, 「교육부 고시 제2015－74호 [별책 8] 수학과 교육과정」, 2015(3쪽)

수학 교육에서의 주체는 학습자이고 학습자의 수학적 세계로의 입문은 다음과 같은 요인들에 의하여 영향을 받는다.

- 학습자가 속한 문화적(인류학적) 배경
- 학습자의 감각적 지각을 통해 경험하는 물리적 세계
- 학습자의 인지 구조
- 학습자의 지적 욕구의 정도

또한, 수학 교육의 목적은 사회의 변화에 따라 영향을 받는다. 이처럼 수학 교육은 학습자 요인과 사회적 요인에 따라 영향을 받기 때문에 학교 수학의 프로그램은 이러한 특성들을 고려하여 설정되지 않으면 안 된다.

오늘날의 수학 교육은 '모든 사람을 위한 수학(Mathematics for All)'[4]으로 수학의 유용성에 강조를 둔다. 이 말은 일부가 아닌 대다수의 학생을 위해 수학이 유용한 도구로 활용될 수 있도록 학교 수학의 프로그램이 설정되어야 한다는 뜻이다.

이와 같은 요구를 충족시키기 위하여 학교 수학은

- 왜 수학을 배워야 하는가?

를 학생에게 분명하게 제시할 수 있어야 하며

- 무엇을 가르쳐야 할 것인가?
- 내용을 어떻게 조직할 것인가?
- 어떻게 가르쳐야 할 것인가?

를 결정해야 한다. 따라서 수학 교육의 목적은 '수학을 배움으로써 학습자에게 어떤 이득을 줄 수 있는가?'에 대한 답으로 제시될 수 있다.

나. 수학 교육의 목적은 수학적 지식을 통하여 사회에 기여하도록 하는 것이다.

수학 교육의 목적은 간단히 말해 학교 수학을 통하여 올바르게 획득시킨 수학적 지식과 형성시킨 태도와 가치관이 민주 시민으로서의 개인의 생활과 사회에 기여할 수 있도록 하자는 데 있다. 이때 수학적 지식으로는 다음과 같은 것을 들 수 있다.

1) 수학적 내용의 지식

- 학습자의 물리적 환경과 지적 환경을 이해하고 조작이 가능하도록 하는 수학적 모델에 대한 지식
- 학습자의 환경 내에서 유용한 수학적 모델에서의 관계, 연산, 조직에 대한 기능

2) 수학적 활동의 지식

- 물리적 또는 지적 상황에서 특수한 수학적 모델을 평가하고 재해석하고 적용하기
- 물리적 또는 지적인 상황으로부터 수학적 모델을 추상화하고 이상화하고 구성하기
- 구성된 수학적 모델에서 새로운 관계를 발견하고 그것을 엄격한 추론으로 실험하기
- 추상, 귀납, 연역적 증명, 분석, 종합, 수학적 모델의 적용과 같은 행동을 다른 분야의 훈련에 전이하기

이러한 수학적 지식의 획득은 개인을 위하여, 앞으로 종사할 사회의 여러 분야의 직종에서, 일상생활의 정보 처리에서, 개인의 삶을 풍부하게 해 주는 취미나 게임과 같은 여가에서도 활용될 수 있다.

한편, 2015 개정 수학과 교육과정의 성격에서는, 초등학교와 중학교에서 학습한 수학은 고등학교 수학 학습의 토대가 되고, 자연 과학, 공학, 의학뿐만 아니라 경제 · 경영학을 포함한 사회 과학, 인문학, 예술 및 체육 분야를 학습하는 데 기초가 되며, 나아가 창의적 역량을 갖춘 융합 인재로 성장할 수 있는 기반을 제공한다고 말한다.

[4] 1984년 호주의 Adelaide에서 개최된 ICME 5(The 5th International Congress on Mathematical Education)의 Theme Group Ⅰ에서 UNESCO의 지원을 받아 연구한 주제의 제목

또한, 이를 위해 학생들은 수학의 지식을 이해하고 기능을 습득하는 것과 더불어 문제 해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다고 하면서 교과 역량의 내용을 다음과 같이 기술하고 있다.

- 문제 해결: 해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력
- 추론: 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력
- 창의 · 융합: 수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결 · 융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력
- 의사소통: 수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제 해결 과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력
- 정보 처리: 다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력
- 태도 및 실천: 수학의 가치를 인식하거나 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력

2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교과 역량 함양을 통해 학생들은 복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고 개인의 잠재력과 재능을 발현할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 이해하고 수학 학습의 즐거움을 느끼며, 수학에 대한 흥미와 자신감을 기를 수 있음을 강조하고 있다.

3 수학 교육의 목표

수학 교육의 목표를 살핀다는 것이 쉬운 일은 아니지만 몇 가지 관점에서 살펴보자.

1973년 한국교육개발원에서 분석한 수학과의 일반 목표는 다음의 6가지이다.

- 수학적 대상을 올바르게 잡아내고, 수학에서 나타난 여러 가지 개념을 명확하게 인식하는 것
- 우리 주변에서 일어나는 자연 현상을 수학적 문장으로 나타내는 능력을 기르는 것
- 수학적 개념의 상호 관련성을 전체적으로, 통일적으로 파악할 수 있도록 수학을 구조화하는 것
- 개념 형성이나 수학적 표현 또는 수학적 구조 규명, 나아가서는 그 응용 등을 위하여 필수적인 수학적 사고를 하는 태도와 능력을 기르는 것
- 여러 가지 계산이나 기타 수학적 조작을 능숙하고 정확하게 처리할 수 있는 힘을 기르는 것
- 얻어진 수학의 내용이나 수학적 사고 과정 또는 사고 능력을 현실에 응용할 수 있는 힘을 기르는 것

또한, OECD 국가를 중심으로 실시하고 있는 '학업 성취도 국제 비교 연구(PISA: Programme for International Student Assessment)'에서는 수학 교육에서 기대하는 능력을 다음과 같이 제시하고 있다.[5]

- 정의, 기호, 연산, 개념을 기억하는 능력
- 빠르고 정확하게 계산하는 능력
- 기호적인 자료를 해석하는 능력

---

[5] The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary(OECD, 2003)

• 자료를 기호로 표시하는 능력
• 증명을 읽을 수 있는 능력
• 증명을 구성하는 능력
• 개념을 문제에 적용하는 능력
• 문제를 분석하고 문제를 해결하기 위하여 적용해야 할 조작을 결정하는 능력
• 수학적 원칙을 발견하는 능력

이와 같은 측면을 구체화하기 위하여 현재 우리나라 고등학교 수학 교육의 목표는 논리적 사고와 창의적 문제 해결로 집약한 수학과의 특징과 성격을 간결, 명확하게 제시해 주고 있다.

2015 개정 교육과정에서 제시하고 있는 수학과의 목표[6]는 다음과 같다.

> 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하며 수학적으로 추론하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변과 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

2007 개정 교육과정 문서의 ‘목표’ 항목에서는 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지의 수학 교육을 통해 추구해야 할 총괄 목표로 ‘수학적 지식과 기능의 습득’, ‘수학적 사고력, 의사소통 능력, 문제 해결 능력의 신장’, ‘수학에 대한 긍정적 태도의 육성’을 제시하고 있다. 이와 같은 능력과 태도는 수학 교육의 변하지 않는 기본 목표로서 2009 개정 교육과정에서도 제시된 것이며 앞으로의 수학 교육에서도 계속 강조될 필요가 있다.

한편, 2015 개정 교육과정에서는 최근 관심이 증대되고 있는 핵심 역량과 수학에 대한 긍정적인 태도를 강조하면서 고등학교 수학과의 과목별 목표를 다음과 같이 설정하고 있다.

〈수학〉, 〈수학 Ⅰ〉, 〈수학 Ⅱ〉, 〈미적분〉, 〈확률과 통계〉, 〈기하〉 및 〈실용 수학〉의 목표

> 가. 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여
>
> 〈수학〉에서는 문자와 식, 기하, 수와 연산, 함수, 확률과 통계
> 〈수학 Ⅰ〉에서는 지수함수와 로그함수, 삼각함수, 수열
> 〈수학 Ⅱ〉에서는 함수의 극한과 연속, 미분, 적분
> 〈미적분〉에서는 수열의 극한, 미분법, 적분법
> 〈확률과 통계〉에서는 경우의 수, 확률, 통계
> 〈기하〉에서는 이차곡선, 평면벡터, 공간도형과 공간좌표
> 〈실용 수학〉에서는 규칙, 공간, 자료
>
> 에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다.
>
> 나. 수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결한다.
>
> 다. 수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 역할과 가치를 이해하며 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

---

[6] 교육부, 「교육부 고시 제2015 – 74호 [별책 8] 수학과 교육과정」, 2015(4쪽)

〈경제 수학〉의 목표

가. 생활 주변에서 친숙하게 접하는 경제 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수와 생활경제, 수열과 금융, 함수와 경제, 미분과 경제에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다.
나. 수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결한다.
다. 경제 현상에 대한 흥미와 수학에 대한 자신감을 갖고, 경제 문제 해결에 수학을 적극적으로 활용하는 태도와 합리적으로 의사 결정하는 능력을 기른다.

〈수학과제 탐구〉의 목표

가. 수학과제 탐구의 필요성을 이해하고 수학과제 탐구 방법을 습득하며 수학과제 탐구 능력을 기른다.
나. 수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결한다.
다. 수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 역할과 가치를 이해하며 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

〈심화 수학 Ⅰ〉, 〈심화 수학 Ⅱ〉, 〈고급 수학 Ⅰ〉 및 〈고급 수학 Ⅱ〉의 목표

가. 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여
〈심화 수학 Ⅰ〉에서는 방정식과 부등식, 지수함수와 로그함수, 삼각함수, 수열과 극한, 미분
〈심화 수학 Ⅱ〉에서는 적분, 이차곡선, 공간도형과 공간좌표, 확률, 통계
〈고급 수학 Ⅰ〉에서는 벡터, 행렬과 선형변환, 복소수와 극좌표, 그래프
〈고급 수학 Ⅱ〉에서는 미적분의 활용, 급수, 수학적 모델링
에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다.
나. 수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결한다.
다. 수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 역할과 가치를 이해하며 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

끝으로 미국 수학 교사 협의회(NCTM)에서 '수학을 위한 공통 핵심 학업 기준'과 연계하여 수학적 사고 훈련에 효과적인 방법으로 제시하고 있는 8가지 기준을 소개한다.[7]

- 문제의 뜻을 이해하고 꾸준히 문제 풀기에 힘쓴다.
- 추상적으로 또한 양적으로 추론한다.
- 할 수 있는 토론 거리를 만들고 다른 사람의 논리를 따져본다.
- 수학적 모형을 만든다.
- 적절한 도구를 전략적으로 사용한다.
- 엄밀성을 키운다.
- 수학적 구조를 찾아서 이용한다.
- 반복적으로 추론하여 규칙을 찾아서 표현한다.

위에 제시한 기준을 실제 학습 지도에 적용하는 것이 수학 교육의 정상화를 위하여 필요할 뿐만 아니라, 수학 교육의 필요성을 강조하는 데에도 유용할 것으로 생각된다.

[7] Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All(NCTM, 2014)

III 수학 교육 이론

1 수학 학습 이론

많은 학자가 다양한 수학 학습 이론을 제시하였는데, 여기서는 피아제의 지적 발달 이론을 근거로 한 브루너와 딘즈의 학습 이론을 소개한다.

가. 브루너(Bruner, J.)의 수학 학습 이론

브루너는 많은 실험을 통하여 수학을 학습하는 4가지의 일반적인 이론을 제시하였다. 여기서는 그 이론을 간략하게 살펴보도록 한다.

1) 구성 이론

구성 이론이란, 학생들이 수학적 규칙, 개념 또는 원리를 학습하는 가장 좋은 방법은 이들의 표현 방법을 구성해야 한다는 것이다. 학생들은 수학적 아이디어를 교사가 제시하는 표현 방법을 분석함으로써 획득할 수 있다.

브루너는 초등학교 아동들은 수학적 아이디어에 대한 자기 자신의 표현 방법을 구성해야 한다고 믿고 있다. 그는 또한 구체적인 표현 방식을 갖고 학습을 시작하는 것이 더 좋을 것으로 생각하고 있다. 만일 아동들에게 수학적 규칙을 형성하는 데 도움을 주는 어떤 활동이 허용된다면, 아동들은 좀 더 그 규칙을 기억하려 하고 규칙들을 적절한 상황에 올바르게 적용할 것이다.

브루너는 아동들에게 완성된 규칙을 부여하는 것은 동기 유발을 감퇴시키는 경향이 있으며, 또한 학생들이 혼란을 일으키는 원인이 된다고 설명하고 있다.

2) 기법 이론

기법 이론이란, 조기의 구성과 표현 방식이 아동들의 정신적 발달 수준에 적절한 기법을 포함하고 있다면 이를 아동들이 쉽게 이해한다는 것이다.

효과적인 기법 조직이 수학적 원리를 창조하고 확장시키는 것을 가능하게 한다. 학생들은 수학적 아이디어에 대한 표현 방식을 선택하거나 창조하는 데 자기 나름의 의견을 갖고 있어야 하고 단순한 기법들은 어린 아동들에게만 사용되어야 한다.

예를 들어 초등학교 5학년까지는

$$5+2\times\square=9$$

와 같이 미지수를 □ 또는 ○, △ 등을 사용하여 표현하면 학생들은 위의 식에서 □에 알맞은 숫자가 2라는 것을 쉽게 발견할 것이다.

기법 조직을 세련되게 하는 학교 수학을 통한 일련의 접근은 수학의 교수 · 학습 과정의 나선형 접근에서 구체화되고 있다. 나선형 교수 · 학습 모형에서 각각의 수학적 아이디어는 처음에는 직관적으로 도입되었다가 점차 구체적으로 제시된다. 해를 거듭할수록 학생은 지적으로 성숙하게 되어서 같은 개념이라도 이제까지 사용하던 표기와는 다른, 높은 수준의 추상성과 상징적인 기호 조직을 사용하게 된다.

기법에 대한 단계를 도표로 나타내면 다음과 같다.

대화 형식 ➡ 직관 ➡ 구체적 표현 ➡ 기호 사용 ➡ 기호 변환

여기서 볼 수 있는 것처럼 언어에 기초한 대화 형식이 중요하다. 이것은 학습자의 심리적 발달 단계를 고려하여 기법 조직을 발전시켜야 수학적 아이디어나 개념의 표기 사용이 쉬워진다는 것을 시사하고 있다.

3) 대조와 변화 이론

대조와 변화 이론이란, 수학적 개념의 구체적인 표기 방식으로부터 좀 더 추상적인 표기 방식으로 되는 과정은 상이하게 대조되는 개념과 각 개념에 대한 변화된 예를 포함하고 있다는 것이다. 예를 들어 기하학에서 호, 반지름, 지름, 현의 개념은 각각을 서로 대조할 때 학생들에게 좀 더 의미 있게 된다.

사실 많은 수학적 개념들은 대조 성질에 따라서 정의되고 있다. 예를 들어 합성수는 1도 아니고 소수도 아닌 수로 정의된다. 무리수는 유리수가 아닌 수로 정의되어 있다. 또, 허수는 실수가 아닌 수로 정의되고 있다.

이러한 대조는 학생들이 새로운 수학적 화제에 대한 직관적인 이해를 확립하도록 도와주는 가장 유용한 방법 중의 하나라 할 수 있다. 개념을 대조시키는 것은 학생들이 여러 가지 개념의 표현 방법을 구체적인 것에서 추상적인 것으로 진전시키는 데 도움을 주고 있다.

학생들이 수학에서 일반적인 개념을 배우고자 한다면, 각각의 새로운 개념은 다양한 예에 의하여 설명되어야 한다. 그렇지 않다면 그 개념은 그 특수한 표현 방법과 관련하여 부분적으로만 학습되는 것이다. 수학을 가르치는 데 있어서 각 개념에 대한 많은 변형된 예를 제기하여 일반적으로 추상적인 아이디어는 여러 가지 많은 구체적인 예를 포함하고 있다는 것을 학생들이 알 수 있게 하여야 한다.

4) 연계 이론

연계 이론이란, 수학에 대한 각각의 기능, 개념, 원리는 다른 기능, 개념, 원리에 연계되어 있다는 것이다. 수학을 가르치는 데 있어서 교사는 학생들이 수학 구조 속에서 대조와 변화를 알도록 도와주는 것뿐만 아니라, 학생들이 여러 가지 수학적 아이디어 간의 연계성을 알게 할 필요가 있다.

일대일대응이나 동치류 같은 연계가 설명되면 수학의 구조는 단순화되고 학습은 쉬워진다. 사실 대부분의 수학 교육과정은 산술, 대수, 기하, 해석 사이의 연계를 시도하고 있다. 독립적으로 수학적 개념이 존재하는 경우는 거의 없기 때문에, 학생들이 점진적이고 의미 있는 학습을 수행하려면 개념들 사이의 연계성이 이해되어야 한다.

이 네 가지 이론은 교수 · 학습 과정에서 연대순으로, 연속적으로 단계를 거친다는 것을 의미하지 않는다. 수학적 화제를 가르칠 때, 어떤 때는 동시에 여러 개의 이론을 적용하는 것이 적절한 경우도 있고, 어떤 때는 고려되어야 할 수학적 화제와 수학적 개념을 학습하는 학생에 따라서 위의 이론들을 여러 가지 다른 순서로 적용하는 경우도 있다.

나. 딘즈(Dienes, Z.)의 수학 학습 이론

딘즈는 피아제의 학습 심리학에 부분적으로 기초를 두고 수학을 흥미 있게 공부하는 방법에 대하여 연구하였다. 그는 구조를 분류하기, 구조 내에서의 관계성을 식별하기, 구조들 사이에서 관계성을 범주화하기와 같이 수학을 구조를 연구하는 학문으로 생각하였다.

딘즈는 수학적 개념은 아동들에게 구체적이고 물리적인 표현의 다양성을 통하여 제시될 때 적절히 이해된다고 믿고 있다. 그는 수학적 구조를 의미하는 것으로 개념이란 단어를 사용하고 있는데, 이는 가네(Gagne, R., 1916~2002)가 정의한 개념보다는 더 일반적이라 할 수 있다.

딘즈에 따르면 개념에는 세 가지 종류가 있는데, 그것은 다음과 같은 순수한 수학적 개념, 표기적 개념, 적용적 개념이다.

1) 순수한 수학적 개념

이는 수를 분류하는 것과 수 사이에서의 관계성을 말하는 것으로, 수가 제시되는 방법과는 무관하다. 예를 들어 여섯, 8, Ⅳ, $1110_{(2)}$, 100 등은 모두 짝수의 개념에 대한 예이다. 그러나 이 기호들은 어떤 특

별한 짝수를 나타내는 것에는 각기 다른 방법을 취하고 있다.

2) 표기적 개념

이는 수가 제시된 직접적인 결과에 대한 수의 성질을 말한다. 예를 들어 275는 십진법으로 나타내어지는 수 조직에서는

$$2\times100+7\times10+5\times1$$

을 나타내는 것이고, 또 팔진법으로 나타내어지는 수 조직에서는

$$2\times8^2+7\times8+5\times1$$

을 나타내는 것이다.

역사를 거슬러 살펴보면 수를 표현하는 데 좋은 표기적 조직이 만들어지기 이전에는 산술의 발전 속도가 매우 더디었다.

3) 적용적 개념

이는 수학적 문제 해결과 다른 분야에서의 문제 해결에서 순수한 수학적 개념과 표기적 개념의 적용을 말한다. 길이, 넓이, 부피 등은 물리적인 문제 해결에서 수를 적용하는 방법을 제공해야 하기 때문에 적용적 개념이 된다.

순수한 수학적 개념은 표기적 개념과 적용적 개념을 배우기 이전에 학습되어야 한다. 그렇지 않으면 학생들은 단지 기호를 조직하는 형태만을 기억하게 되는 것이다.

예를 들어 학생들이

$$\sqrt{9+16}=3+4,\quad \frac{5+2}{2}=5,\quad 3(4+2)=12+2=14$$

와 같은 실수를 범하게 되는데 이는 순수한 수학적 개념과 표기적 개념을 잘못 이해해서 적용된 소치이다.

딘즈는 개념 학습을 가네의 학습 단계에서 자극 · 반응 이론에 의해 적절히 설명될 수 없는 창조적인 기술로 간주하고 있다. 그는 모든 추상성은 직관과 구체적인 경험에 기초하고 있다고 믿고 있다. 결론적으로 딘즈의 수학 학습은 조작, 게임 등과 같은 수학 실험실에 기초하고 있다.

딘즈는 학생들이 수학을 학습하기 위해서는 다음과 같은 사항을 다룰 능력이 있어야 한다고 생각하고 있다.

- 수학적 구조와 그 구조 간의 관계성을 분석할 수 있어야 한다.
- 여러 가지 상이한 구조 또는 상황으로부터 공통된 성질을 추상화할 수 있고, 구조 또는 상황이 속한 것에 따라 분류할 수 있어야 한다.
- 협의적으로 정의된 유(類)에서 발견되는 비슷한 성질을 갖는 좀 더 넓은 유(類)를 만듦으로써 이미 배운 수학적 구조를 일반화할 수 있어야 한다.
- 사전에 학습된 단순한 추상으로부터 좀 더 복잡하고 높은 수준의 추상을 구성할 수 있어야 한다.

2 수학적 사고와 창의적 사고

2009 개정 교육과정에 이어 2015 개정 교육과정 총론의 핵심은 학생들의 창의성 계발에 있으며, 이에 따른 수학과 교육과정에서는 2009 개정 교육과정에서 강조한 수학적 추론, 수학적 문제 해결, 수학적 의사소통을 기본 요소로 하는 수학적 과정에 창의 · 융합, 정보 처리, 태도 및 실천의 요소를 추가한 6가지 수학 교과 역량을 통하여 수학적 창의성을 키우는 것이 그 목적이다.

여기서는 수학적 추론, 문제 해결, 의사소통의 요소가 수학이 갖는 본질적 기능임을 확인하고, 이를 통하여 창의성을 신장할 수 있는 근거를 뇌 발달 이론에서 제시하려고 한다.

이를 위하여 먼저 앞에서 기술한 수학 교육의 목적을 역사적 관점에서 다시 살펴보고, 학문으로서 수학의 기능에 대하여 알아본 후에, 분할 뇌 이론과 다중 지능 이론에 근거하여 수학적 사고 구조를 분석한다. 또, 창조적 사고 과정과 수학적 사고 과정을 비교하여 수학적 창의성의 의미를 알아보도록 한다.

가. 역사적 관점에서 본 수학 교육의 목적

고대 그리스의 수학자이자 철학자인 플라톤(Platon, B.C. 427?~B.C. 347?)은 기원전 385년경에 '아카데미아(Academia)'라는 학교를 설립하여 학생들에게 철학, 정치학, 수사학, 기하학 등을 가르쳤다.

플라톤은 수학, 특히 기하학 공부를 통해서 습득되는 생각하는 방법이나 엄밀성이 철학을 공부하는 데 필수적이라 믿었기 때문에, 아카데미아에서는 기하학을 매우 중요하게 여겼다. 이와 같은 역사적 배경에 따라 논리적 사고 방법과 합리성을 키우기 위하여 서양에서는 기하학을 바탕으로 한 수학을 학교에서 전통적으로 강조해 왔다.

한편, 17세기~18세기에 서양에서는 천문학, 화학, 물리학, 생물학, 의학 등의 과학이 발전하게 되면서 실용적 문제를 해결하기 위한 도구로서의 수학이 발전하게 되어 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)에 의하여 미적분학의 발견에까지 이르게 되었다. 특히, 18세기 중엽부터의 산업 혁명을 기폭제로 하여 과학 기술이 급속도로 발전함에 따라 여기에 필요로 하는 수학도 여러 갈래로 분야가 나누어지면서 크게 발전하게 되었다.

지금 우리가 학교에서 가르치는 수학은 고대 그리스 시대에 뿌리를 두고 미적분학을 토대로 하여 발전한 근대 수학의 내용에서 나온 것이다. 그러므로 수학 교육의 기본 방향은

순수성 탐구(기하) 및 실용성 구현(미적분)

의 두 가지로 볼 수 있다.

1) 수학 교육의 목적

기하와 미적분은 학문으로서의 수학을 공부하거나 수학적 지식을 응용하는 분야에서 필요한 최소한의 내용이기 때문에 반드시 알아야 한다. 또, 이러한 수학적 내용과 지식을 연마하는 과정에서 논리적이며 합리적으로 생각하는 방법과 전략을 익히게 된다. 이와 같은 관점에서 수학 교육의 목적으로 다음 두 가지를 들 수 있다.

- 수학적 내용과 지식을 습득한다.
- 생각하는 방법과 기술을 익힌다.

학생들이 초등학교에서부터 고등학교까지의 과정을 통하여 사칙계산, 수의 체계, 방정식과 부등식의 풀이, 함수의 성질, 도형의 특성, 도형 사이의 관계, 미적분 등에 포함된 수학적 개념과 계산 방법을 이해하며 필요한 계산 능력을 숙달하는 것이 첫 번째 목적이다. 그런데 교육과정에 제시된 수학적 내용은 사회적 현상이나 역사적 사실처럼 그 과정이나 결과를 단순히 눈으로 보거나 귀로 듣고 이해함으로써 습득되는 것이 아니다. 수학적 내용과 지식을 습득하기 위해서는 반드시 학습 과정에서 탐구하고 생각하는 과정을 거쳐야 하는데, 이를 통하여 합리적이고 논리적으로 생각하는 추론 방법과 기술을 익히게 된다. 이것이 수학 교육의 두 번째 목적이다.

대부분의 사람이 첫 번째 목적만을 생각하여 수학이 직접적으로 필요하지 않은 분야에서 일하게 될 학생들에게 수학을 왜 가르쳐야 하는가 하고 오해를 한다. 첫 번째 목적은 눈에 보이지만 두 번째 목적은 눈에 분명하게 보이지는 않기 때문에 이러한 오해가 생기는 것이다.

2) 수학 교육의 내용적 도달점

수학 교육의 목적을 달성하기 위하여 수학의 어떤 내용을 어느 정도까지 학교에서 가르쳐야 하는가? 앞에서 설명한 근대 수학 교육의 배경을 생각하면 답을 찾을 수 있다.

즉, 수학 교육의 내용적 도달점은 다음과 같다.

미적분(Calculus)과 기하(Geometry)

미적분은 수학적 내용과 지식을 습득하는 데 필요하며, 기하는 생각하는 방법과 기술을 익히는 데 필요하다. 물론 미적분의 내용을 습득하면서도 생각하는 방법과 기술을 익힐 수 있고, 기하를 공부하면서도 관련된 수학적 내용과 지식을 습득하게 된다.

이와 같은 내용적 도달점에 이르기 위하여 각 나라에서는 시대적 상황과 교육적 환경의 변화에 따라 적절히 내용을 가감하면서 수학과 교육과정을 정하고 있다.

나. 수학의 기능

수학 교육을 통하여 수학적 지식과 추론 및 문제 해결 방법을 왜 배워야 하는가? 이 질문에 대한 답은 학문으로서의 수학의 기능이 무엇인가를 생각해 봄으로써 찾을 수 있다.

궁극적으로 수학의 기능을 크게 다음 두 가지로 볼 수 있다.

- 과학적 의사소통의 언어
- 문제 해결의 기술적 도구

1) 과학적 의사소통의 언어로서의 수학

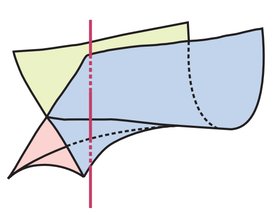
과학적 의사소통의 언어로서의 수학의 기능을 이해하기 위하여 다음과 같은 예술과 과학의 성격을 생각해 보자.

- 예술: 우리 주변의 현상이나 자신의 감정을 주관적으로 표현한 결과
- 과학: 우리 주변의 현상이나 자신의 감정을 객관적으로 표현한 결과

즉, 예술과 과학은 현상이나 감정을 표현한다는 점에서는 차이가 없으나, 표현의 관점이 주관적이냐 객관적이냐에 따라 구분된다. 이때 말하는 과학이란 자연 과학이나 공학뿐만 아니라 넓게는 학문적 계통성과 체계를 갖고 있는 사회 과학이나 인문 과학의 분야까지도 포함한다.

예술적 표현을 하는 도구로서 문학에서는 언어, 무용에서는 신체, 연주에서는 악기가 사용되는 데 비하여 과학적 표현을 하는 도구로 사용되는 것이 수학이다. 이런 맥락에서 학교 교육에서 수학을 도구 과목이라고 부른다.

다음 그림은 프랑스의 수학자 톰(Thom, R. F., 1923~2002)이 1968년에 발표한 파국 이론(Catastrophe Theory)의 한 종류인 '제비 꼬리 파국(swallowtail catastrophe)'의 수학적 모델 $V=x^5+ax^3+bx^2+cx$를 스페인의 화가 달리(Dali, S., 1904~1989)가 1983년에 예술적 관점으로 표현한 '제비 꼬리–파국에 관한 연작'이라는 이름의 작품이다. 이는 과학과 예술의 양면적 관점을 보여 주는 대표적 사례이다.


제비 꼬리 파국의 수학적 표현


제비 꼬리 파국의 예술적 표현

학자들이 발견하거나 고안한 과학적 현상이나 결과를 설명하고 표현하는 방법으로 수학적 모델(Mathematical Model)을 이용하는데, 이는 지금까지 인류가 발전시켜 온 학문 중에서 수학만이 이러한 기능을 담당할 수 있기 때문이다. 따라서 학교에서 외국어와 마찬가지로 수학도 의사소통의 언어로서 가르치는 것이다.

한편, 이종희 · 김선희(2002)는 수학적 의사소통의 개념을 다음과 같이 기술하고 있다.

> 수학을 학습하는 방법이 형식적이고 추상적인 기호의 사용에만 집중되고 교사의 일방적인 설명만을 학생들이 이해하도록 한다면, 현재와 미래의 학생들은 수학이 실용적이지 못하고 기호들로만 이루어진 추상적인 학문이라는 생각에서 벗어나지 못할 것이다. 이러한 점을 인식하고 수학 교육은 수학적 힘의 신장이라는 목표를 갖고 수학의 유용성과 수학 자체의 가치를 확인하고, 다양한 교수 방법과 평가를 통해서 학습 지도가 이루어지는 방향으로 변화되고 있다. 이러한 변화 중에서 수학 수업에서 학생들이 자신이 알고 있는 개념을 말과 글, 신체 활동으로 보여 주고, 설명하고, 다양한 표현을 이해하고 해석하는 경험을 하는 능력을 신장시켜야 한다는 것을 강조한 것이 수학적 의사소통이다.
>
> 수학적 의사소통을 함으로써 학습자는 수학 학습의 주체임을 깨닫고 활동적으로 학습에 참여하게 되고, 스스로 더 나은 학습을 위한 노력을 하게 되며, 수학을 지도하는 수학 교사들은 학생들의 학습 과정을 더 자세히 알고 교수 · 학습의 계획과 실행에 많은 정보를 얻을 수 있다.

2) 문제 해결의 기술적 도구로서의 수학

(가) 수학적 문제 해결

'수학적 문제 해결'이란 제시된 문제를 수학적 사고와 수학적 활동을 통하여 해결하는 행위 또는 과정 전체를 말하는데, 이때 '문제(problem)'는 좁게는 수학 교과에서 다루는 수학적 문제를 뜻하지만 넓게는 형식적이든 비형식적이든 일상생활이나 사회생활에서 부딪치는 모든 형태의 문제를 뜻한다.

폴리아(Pólya, 1962)는 문제 해결을 '명확하게 인식하고는 있지만 즉각적으로 성취할 수 없는 목적을 달성하기 위해 적절한 행동을 의식적으로 찾는 것'이라 정의하고 있다.

한편, 브라운 · 월터(Brown & Walter, 1990)는 추가적인 문제나 질문을 생성하여 분석하지 않고 단편적으로 답을 찾는 것의 문제점을 지적하였다. 또, 문제 해결 활동에는 본질적으로 문제 생성 활동으로 볼 수 있는 원래 문제의 여러 가지 재구성이 수반되어야 한다고 주장하여 문제 해결(problem solving)과 문제 생성(problem generation) 및 문제 설정(problem posing) 사이의 강한 관련성에 대하여 강조하였다.

수학은 학생들에게 합리적 문제 해결 방법을 제시하고 훈련하는 교과로서의 성격을 갖는데, 수학이 어려운 교과로 인식되는 이유는 문제 해결 과정에서 요구되는 강한 엄밀성과 논리적 무결점성 때문일 것이다. 수학적 활동에서 요구되는 문제 해결 방법은 논리적으로 엄밀해야 하므로 합리적인 풀이 과정과 추론 절차에 따라 결론에 도달해야 한다. 또, 수학은 타 교과목이나 실생활에서 부딪치는 여러 문제를 합리적이고 창의적으로 해결할 수 있는 능력을 길러 준다.

이와 같은 이유에서 1980년대부터 전 세계적으로 학교 수학에서 문제 해결에 대하여 강조해 왔지만 시대 상황과 교육적 환경의 변화에 따라 그 강도와 방향이 변해 왔다. 문제 해결에 대한 이러한 상황은 우리나라 수학과 교육과정에도 영향을 끼쳤다. 제5차 교육과정에서부터 지금까지 문제 해결력의 신장을 강조하고 문제 해결력의 지도에 중점을 두고 있으며, 2009 개정 교육과정에서는 수학적 과정을 통해 학생들의 수학적 창의성을 계발하도록 했으며, 이 관점은 2015 개정 교육과정에서도 이어지고 있다.

(나) 수학적 문제 해결의 전략

해결해야 할 문제의 특성에 따라 문제 해결의 전략은 달라져야 하지만, 문제 상황에 상관없이 문제 해결에 도움이 되는 일반적인 전략을 설정하는 것은 쉬운 일이 아니다.

미국의 초 · 중등학교 수학 올림피아드를 처음 만든 수학 교사인 런치너(Lenchner, 1983)는 구체적인 문제 해결 전략으로 다음 11가지를 제시하였다.

- 그림이나 도표 그리기
- 규칙 찾기
- 목록을 정리하여 만들기
- 표 만들기
- 단순화하여 풀기
- 시행착오 거치기
- 실험하기
- 실행하기
- 거꾸로 풀기
- 방정식 세우기
- 연역적으로 생각하기

한편, 찰스 · 레스터(Chales & Lester, 1982)는 문제 해결의 전략을 다음과 같이 일반적 전략과 이에 보조적인 성격을 갖는 보조적 전략으로 구분하여 제시하고 있다.

일반적 전략	보조적 전략
• 규칙 찾기: 일반화하기	• 문제 다시 읽어 보기
• 연역, 귀납, 추론하기	• 단서가 될 만한 것 찾기
• 거꾸로 생각하여 풀기	• 중요 정보 기록하기
• 추측하고 검토하기	• 정리하여 세목별 표 만들기
• 유사한 문제 관련짓기	• 삽화, 교구, 그래프 사용하기
• 방정식 세우기	• 실험, 시연해 보기
	• 단순화하여 생각하기

(다) 수학적 문제 해결의 과정

다음은 폴리아(Pólya, 1945)가 제시한 문제 해결을 위한 4단계의 과정이다.

문제 이해 ➡ 계획 수립 ➡ 계획 실행 ➡ 반성

① 문제 이해: 문제를 풀기 전에 그 문제의 뜻을 이해해야 한다.
문제를 주의 깊게 읽으면서 문제 해결에 도움이 되는 단서를 찾는다. 이때 다음과 같은 것을 염두에 둔다.
- 미지인 것은 무엇인가?
- 자료는 무엇인가?
- 조건은 무엇인가?

② 계획 수립: 문제를 이해하고 해결의 단서를 찾은 후에는 유사한 문제를 풀었던 경험을 이용하여 이 문제의 답을 찾는 전략과 도구를 찾도록 한다. 이때 다음과 같은 것을 염두에 둔다.
- 관련된 문제를 알고 있는가?
- 미지인 것을 잘 살펴서 친숙한 문제 중에서 비슷하거나 같은 미지인 것이 있는지 생각하시오.

③ 계획 실행: 전략을 정한 다음에 이를 적용하여 문제를 해결하여 어떤 답을 얻는지 확인하도록 한다. 이때 다음과 같은 것을 염두에 둔다.
- 문제 해결 과정이 정확한지를 분명히 알 수 있는가?
- 문제 해결 과정이 정확한지를 증명할 수 있는가?

④ 반성: 문제 해결을 시도하여 답을 찾았다면, 문제로 다시 돌아가서 찾은 답이 확실히 그 문제의 답인지 확인하도록 한다. 간혹 아주 사소한 조건을 빠뜨리기도 한다. 만약 어떤 조건을 빠뜨리고 문제를 해결했다면 그 문제를 다시 해결하도록 한다. 이때 다음과 같은 것을 염두에 둔다.

- 결과를 점검할 수 있는가?
- 풀이 과정을 점검할 수 있는가?
- 다른 방법으로 결과를 이끌어 낼 수 있는가?
- 잠깐만 봐도 결과를 알 수 있는가?

다. 수학적 사고 구조와 뇌 구조

우리의 생각 또는 사고의 기능은 대뇌의 피질에서 담당하고 있으며, 문제 해결의 과정 또한 대뇌의 작용으로 결정된다. 따라서 우리의 수학적 사고 구조와 사고 과정을 이해하기 위해서는 뇌의 구조와 기능에 대한 이해가 있어야 한다. 여기서는 분할 뇌 이론에서 출발한 좌뇌와 우뇌의 기능 및 다중 지능 이론에 입각하여 수학적 사고 구조의 특성에 대하여 알아본다.

1) 수학적 사고 구조

수학적 사고 구조는 크게 수 구조(Numeral structure)와 도형 구조(Figural structure)로 나눌 수 있다. 수 구조는 계산 원리의 관념적 이해를 바탕으로 발달하는 '수와 연산', '문자와 식'과 같은 대수학 구조와 공리적 구조에 기초하며, 수 구조의 학습은 좌뇌의 기능을 향상시키는 것으로 알려져 있다. 반면에 도형 구조는 도형 원리의 경험적 이해를 바탕으로 발달하는 '도형', '기하'와 같은 기하학적 구조와 위상적 구조에 기초하며, 도형 구조의 학습은 우뇌의 기능을 향상시키는 것으로 알려져 있다.

흔히 수학의 학습은 좌뇌적 활동에 치우쳐 있다고 생각하는 사람들이 많은데, 이는 수학의 수리적 특성과 엄밀성, 논리성의 측면에서 보는 관점일 뿐이다. 예를 들어 규칙 찾기(패턴 인식), 직관적 통찰, 정보의 조직화, 기호 인식, 도형 인식, 공간 지각, 추상화 등과 같은 기능은 도형 구조와 관련이 있는데, 이는 우뇌에서 주로 담당한다고 알려진 패턴 인식력, 공간 인식력, 회화적 인식력, 도형 인식력, 직감력 등과 직접적인 관련이 있기 때문이다.

따라서 수학은 좌뇌는 물론이고 우뇌의 발달에도 매우 효과적일 뿐 아니라, 학교에서 배우는 모든 교과목 중에서 전뇌 교육에 가장 적합한 교과목임을 알 수 있다. 특히, 음악, 미술, 건축, 디자인 등에 필요한 창의적 사고 능력과 심미적 추상 능력을 담당하는 것이 우뇌이므로, 놀랍게도 예술적 소양을 키우는 데에도 수학이 매우 중요한 역할을 한다. 이와 같은 이유에서 수학을 도구 과목이라 하며, 수학이 모든 학문의 기초가 된다고 말하는 것이다.

2) 분할 뇌 이론

학습 과정에서 일어나는 수학적 활동은 대부분 두뇌를 통하여 이루어지기 때문에 뇌의 기능에 대한 이해가 필요하다. 미국 신경 생물학자인 스페리(Sperry, R. W., 1913~1994)가 이끄는 연구 팀은 1970년대에 사람의 좌뇌와 우뇌가 담당하는 사고 기능이 서로 다르다는 사실을 실험을 통하여 알아냈다. 그 후 양쪽 뇌의 기능을 좀 더 세밀하게 분석하는 연구를 통하여, 좌뇌는 몸의 우측을 통제하며 지성을 담당하고 우뇌는 몸의 좌측을 통제하며 감성을 담당한다는 '분할 뇌 이론(Split Brain Theory)'을 제기하였다. 이 이론에 의하면 좌뇌는 언어의 뇌로서 이성적, 논리적, 구체적, 수리적 사고를 주로 담당하는 데 비하여, 우뇌는 이미지의 뇌로서 감성적, 직관적, 추상적, 공간적 사고를 주로 담당하는 것으로 확인되었다.

처음에 스페리 박사 팀은 간질 발작 증세를 치료하기 위한 연구를 하는 과정에서, 좌뇌와 우뇌를 연결하는 뇌량을 잘라 좌뇌와 우뇌를 분리하면 간질 환자의 고통은 멈춰지지만 좌뇌와 우뇌의 교류 기능에 이상이 나타남을 알게 되었다. 속이 보이지 않는 주머니 속에 들어 있는 머리빗을 좌뇌와 우뇌가 분리된 환자가 왼손(우뇌가 통제하며 구체적 현실을 인지함)으로 만지도록 한 후에, 이것의 이름을 말하라고

했더니 머뭇거리다가 "머리빗"이라고 말하지 못하였으나, 이것의 용도를 물었더니 머리를 빗는 시늉을 했다고 한다. 그러나 오른손(좌뇌가 통제하며 추상적 상상을 담당함)으로 만지도록 한 후에, 이것의 이름을 말하라고 했더니 즉시 "머리빗"이라고 큰 소리로 대답했으나, 이것의 용도를 행동으로 나타내지는 못했다고 한다.[8]

3) 수학적 사고 구조와 뇌 구조의 비교

앞에서 좌뇌와 우뇌의 기능이 사뭇 다르다는 사실을 확인하였다. 좌뇌에 비해 지금까지 상대적으로 경시됐던 우뇌의 기능을 강조하는 사회 분위기와 창의적 사고를 주로 우뇌가 담당한다는 이론으로 인하여 우뇌의 기능을 발달시키는 교육이 지나치게 강조되어서, 오히려 양쪽 뇌의 균형 있는 발달에서 좌뇌 교육이 소외되기도 하였다.

그런데 합리성이 결여된 창의성과 독창성은 그 가치가 반감되며, 구체화 기능을 무시한 추상화 기능의 강조는 논리적 결함을 초래할 수 있다. 우뇌의 기능만 발달시키는 학습보다는 양쪽 뇌를 균형 있게 발달시키는 학습을 통하여 창의적 사고력이 더 키워질 수 있음은 잘 알려져 있다.

특히, 전인 교육이 이루어지기 위해서는 양쪽 뇌가 균형 있게 발달할 수 있는 교육 환경이 제공되어야 한다는 주장이 설득력을 갖게 되면서 1900년대 중반부터 '전뇌 학습(Whole Brain Learning) 이론'이 관심을 받게 되었다. 또, 아이들의 두뇌 발달 단계에 맞는 적기 교육을 하는 것이 중요하다는 이론을 적용한 '뇌 기반 학습(Brain-Based Learning) 이론'도 주목을 받고 있다.[9]

앞에서 확인한 좌뇌와 우뇌의 기능과 수학적 사고 구조에서 수 구조와 공간 구조의 체계를 비교하면 담당하는 요소들이 그대로 들어맞음을 다음 표에서 확인할 수 있으며, 이로부터 수학이 좌 · 우뇌를 균형 있게 발달시키는 전뇌 교육에 가장 적절한 교과목이라 할 수 있다.

수학적 사고 구조와 뇌 구조의 비교

<table>
<tr><td colspan="6">수학적 사고 구조</td></tr>
<tr><td rowspan="2">합리적
분석적
수렴적
연역적
이성적</td><td>구체적
논리적</td><td>수 구조</td><td>도형 구조</td><td>추상적
감각적</td><td rowspan="2">창조적
통합적
발산적
귀납적
경험적</td></tr>
<tr><td>과학적
언어적</td><td>좌뇌</td><td>우뇌</td><td>예술적
운동적</td></tr>
<tr><td colspan="6">뇌 구조</td></tr>
</table>

4) 수학적 사고 구조와 다중 지능 이론의 비교

지적 능력의 척도인 지능 지수(IQ)가 인간의 다양한 정신 능력을 대표하기에 충분하지 않다는 견해에서 더 세분화된 능력을 나타내기 위하여 심리학자인 가드너(Gardner, H., 1943~)는 다중 지능(MI: Multiple Intelligence)이론을 제안했으며,

- 음악 지능(Musical Intelligence)
- 신체 운동 지능(Bodily-Kinesthetic Intelligence)
- 논리 수학 지능(Logical-Mathematical Intelligence)

[8] 이와 같은 실험을 통하여 스페리 박사 팀은 좌뇌와 우뇌가 독립적인 기능을 갖고 있음을 확인하였으며, 이 공로로 1981년에 노벨 생리의학상을 수상하였다.

[9] Eric Jensen, 『뇌기반 교육의 원리』, 정종진 역, 학지사, 2010(36~37쪽)

- 언어 지능(Linguistic Intelligence)
- 공간 지능(Spatial Intelligence)
- 인간 친화 지능(Interpersonal Intelligence)
- 자기 성찰 지능(Intrapersonal Intelligence)

과 같은 일곱 가지 다중 지능을 제시하였고, 1999년에

- 자연 친화 지능(Naturalistic Intelligence)

을 추가하였다. 또, 최근에 와서 일부 학자들은 여기에

- 실존적 지능(Existential Intelligence)

을 추가하는 추세이다. 여기서 논리 수학 지능, 언어 지능, 자연 친화 지능은 좌뇌의 기능과 관련이 있고, 나머지 지능들은 우뇌의 기능과 관련이 있다고 알려져 있다.

이때 위의 9가지 지능 중에서 공간 지능은 수학적 사고 구조의 도형 구조에 해당하고, 논리 수학 지능은 수 구조에 해당한다. 특히, 수열의 극한 개념에 바탕을 둔 고등 수학을 공부하면 무한적 상상력을 필요로 하는 실존적 지능을 계발할 수 있음을 알 수 있다. 즉, 수학적 활동이나 학습을 통하여 다중 지능의 두 요소 또는 세 요소를 키울 수 있다는 뜻이다.

라. 창의성

미래학자인 토플러(Toffler, A., 1928~2016)는 미래 사회는 조직력에서 창의성으로, 물질적 자산에서 지식 자산으로, 그리고 제조 중심에서 서비스 중심으로 재편될 것이며, 한 개인의 창의성이 전 세계를 뒤흔들 유망 사업이 될 수 있다고 하였다. 이처럼 미래학자들은 21세기에 개인이나 국가의 경쟁력에 있어서 가장 중요한 요소로 창의성을 들고 있으며, 우리나라에서도 2009 개정 교육과정의 핵심이 창의성 계발이며 이를 구현하기 위하여 수학 교과에서는 수학적 과정을 정규 교육과정에 도입했으며, 이 기조는 2015 개정 교육과정에서도 유지되고 있다.

고대 그리스 · 로마 시대에는 창의성(creativity)을 예술적 상상력으로 이해하였다. 기원후부터 중세 시대까지에는 창의성을 신의 영역으로 간주하였으며, 이것은 신으로부터 '부여받은(gifted)' 능력으로 생각했다. 그 후 14세기~17세기의 르네상스 시대에 들어서서 창의성을 인간의 영역으로 간주하였으며, 발명 능력을 창의성으로 보았다. 18세기 계몽 시대에 휴머니즘 사상을 바탕으로 창의성은 다시 예술적 상상력으로 인식되었으며, 19세기의 산업 혁명 시대에 와서야 독일의 생물학자이자 물리학자인 헬름홀츠(Helmholtz, H. von, 1821~1894)와 프랑스의 수학자인 푸앵카레(Poincaré, J. H., 1854~1912) 등에 의하여 과학적 상상력이 창의성의 범주에 포함되게 되었다. 창의성 연구가 심리학의 학문적 대상이 된 것은 제2차 세계 대전이 끝난 1950년대부터로, 미국의 심리학자 길퍼드(Guilford, J. P., 1897~1987) 등에 의하여 시작되었다.

1) 창의성

창의성을 정의하는 견해는 그것을 필요로 하는 학문의 성격에 따라 달라지기도 하지만, 아래의 몇 가지 정의에서 알 수 있듯이 창의성이란 새로운 결과를 만들어 내는 성향이나 능력을 말한다.

- 브루너(Bruner, 1962): 예상 밖의 효과적인 일을 만들어 내는 행동
- 가드너(Gardner, 1989): 새롭지만 궁극적으로 문화에 수용되는 결과
- 멈퍼드(Mumford et al., 1994): 새롭고 사회적으로 가치 있는 결과의 생성
- 아마빌(Amabile, 1996): 참신하고 적절하며, 유용하고 정확하며 가치 있는 것을 스스로 발견해 내는 능력
- 니커슨(Nickerson, 1999): 독창성 및 생각의 주관적 참신성

2) 창의성의 구성 요소와 특징

길퍼드는 창의성의 특성을 인지적 측면에서 내연적 요소로 설명하는 반면에, 토랜스(Torrance, E. P., 1915~2003)는 정의적 측면에서 외연적 요소로 설명하고 있다.

창의성의 구성 요소와 특징

구성 요소 (내연)	유창성(fluency, 다양성)	자발성	특징 (외연)
	융통성(flexibility, 유연성)	독자성	
	독창성(originality, 새로움)	집착성	
	정교성(elaboration, 치밀함)	호기심	

여기서 유창성은 다양한 아이디어를 생성하는 능력이고, 융통성은 사고의 유연성을 말하며, 독창성은 새로운 아이디어를 생성하는 능력이고, 정교성은 아이디어의 세련미를 말한다.

3) 창의적 사고 과정

창의성 연구의 초기 학자인 영국의 사회 심리학자 월러스(Wallas, 1926)는 창의적 사고 과정을 다음의 4단계로 설명하였다.

준비 ➡ 배양 ➡ 조명 ➡ 증명

여기서 '준비(preparation) 단계'는 적절한 분야에서 선별한 문제 해결에 필요한 도구들을 창의적으로 사용하여 문제 해결 방안을 모색하는 단계이고, '배양(incubation) 단계'는 문제 해결에 필요한 여러 가지 아이디어들을 알을 품어 부화하듯이 충분한 시간을 갖는 단계로서 그는 잠깐의 휴식기가 오히려 창의성을 자극한다고 생각하였다.

'조명(illumination) 단계'는 문제 해결의 아이디어를 발견해 내는 단계로서 배양 단계에서 생각해 왔던 것이 '유레카(Eureka)'처럼 갑작스럽게 나타나는 단계이며, '증명(verification) 단계'는 아이디어를 성공적으로 적용하여 문제를 해결하는 단계이다.

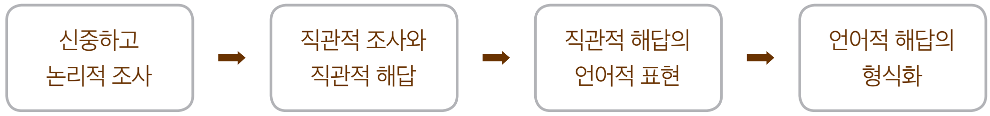
창의적 사고 능력을 키우는 방법 중에서 옥스퍼드 대학과 하버드 대학의 교수를 역임한 의사이자 발명가인 드보노(de Bono, E., 1933~)는 1967년에 창의적 아이디어를 창출하는 직관적 사고(intuitive thinking)와 발산적 사고(divergent thinking)를 잘할 수 있도록 훈련하는 방법을 고안하였는데, 이를 '수평적 사고법(Lateral thinking method)'이라고 한다. 이것은 직관적 사고력에 의하여 감각적 또는 육감적으로 문제 해결 방법을 찾아내는 융통성과 순발력을 키우는 아이디어 발상법이다.

이에 반하여 계획적이고 분석적이며 엄밀한 논리적 사고를 통한 발상법을 '수직적 사고법(Vertical thinking method)'이라 하는데, 주로 체계화되고 조직화된 논리적 학습이 이 범주에 속한다.

이와 같은 입장에서 지능지수(IQ)를 수직적 사고 능력의 측도, 감성지수(EQ)[10]를 수평적 사고 능력의 측도로 이해할 수 있다.

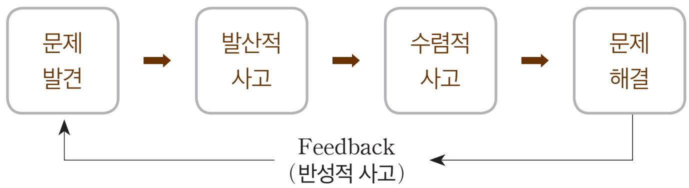
한편, 옛 소련 최초의 심리학자인 포노마레프(Ponomarev, I. A.)는 1987년에 창의적 사고 과정을 다음과 같은 4단계로 설명하였다.

[10] 1990년 미국 New Hampshire 대학의 John Mayer 교수와 Yale 대학의 Peter Salovey 교수가 처음 설정한 개념이다.



일반적으로 창의적 사고는 문제를 발견하거나 문제가 제시되는 경우, 다음과 같이 발산적 사고와 수렴적 사고 과정을 거쳐 문제를 해결한 후 반성적 사고 또는 비판적 사고를 통하여 피드백하는 순환 구조를 갖는다.

창의적 사고의 흐름



이와 같은 창의적 사고 과정은 놀랍게도 수학 문제를 해결할 때 일어나는 사고의 흐름, 이를테면 폴리아의 문제 해결 4단계 과정과 매우 흡사하기 때문에 수학적 사고 훈련을 통하여 창의적 사고 훈련이 가능하다고 할 수 있다.

마. 수학적 창의성

수학적 창의성의 연구는 20세기 초반에 뛰어난 수학자나 물리학자들의 학문적 성취에 대한 연구에서 시작되었으며, 프랑스의 수학자인 푸앵카레와 아다마르(Hadamard, J. S., 1865~1963)를 시초로 볼 수 있다.

푸앵카레(1908)는 수학적 창의성을 '식별력(discernment)'이라 표현했는데, 유용한 결과를 가져옴과 그렇지 않음에 대한 '선별력(choice)' 또는 사물이나 현상의 본질을 꿰뚫어 보는 '통찰력(insight)'이라는 뜻이다. 그는 수학자들이 새로운 수학적 사실을 발견하거나 증명하는 것은 바로 이와 같은 식별력의 산물이라고 하였다. 한편, 아다마르(1945)는 수학자의 창의적 사고 과정을 월러스의 4단계 게슈탈트(Gestalt) 모델로 설명하면서 문제 해결의 조명 단계에 통찰력이 필요하다고 하였다.

20세기 후반에 들어 어빙크(Ervynck, 1991)는 수학적 창의성의 발달 단계를 다음과 같이 세 단계로 나누었다.

- 예비적 기교 단계: 기교적이며 실용적인 응용으로 구성되는 단계. 수학적 절차와 규칙에 대한 이론적 기초를 인식하기 전에 기술적 또는 실제적으로 적용해 보는 예비 단계.
- 알고리즘적 활동 단계: 수학적 연산들을 계산하고 이를 조정하여 해결하는 단계. 이 단계를 거쳐야 창의적 사고 단계로 나아갈 수 있음. 정확히 계산하는 단계이기 때문에 매우 분명한 활동이 이루어진다는 특징이 있음.
- 창의적(개념적, 구성적) 활동 단계: 진정한 수학적 창의성이 발생하는 단계.

일반적으로 수학에서의 연역적 추론은 창의성과 관련이 적다고 인식되는데, 미국의 심리학자인 니커슨(Nickerson, 1999)은 수학자 칸토어(Cantor, G., 1845~1918)가 실수의 불가산성(uncountability)을 증명할 때 사용했던 연역적 추론인 대각선 방법(diagonal method)이 뛰어난 창의성의 결과라고 말하였다. 또, 그는 창의성과 비판적 사고는 동전의 양면과 같으며, 이들이 균형을 맞출 때 좋은 사고를 할 수 있다고 하였다.

이경화(2015)는 우리나라 수학과 교육과정에서 '창의성'이라는 표현이 처음 나타난 것은 1963년에 공표된 제2차 교육과정이라 말하면서, 여기에서 정의된 창의성과 제3차 교육과정에서 제시된 창의성의 의미를 다음과 같이 기술하고 있다.

> 우리나라의 교육과정 문서에 창의성에 관련된 언급이 나타난 것은 1963년에 공표된 제2차 수학과 교육과정부터이다. 여기서는 "향토 사회와 우리나라가 당면하고 있는 여러 문제의 해결을 돕는 창의적 실천을 위한 학습 활동에 노력한다."라고 서술하고 있다. 이 문장에서 '창의적 실천'은 학습자가 수학을 배우는 것에 관련된 것이라기보다는, 우리나라의 경제 발전과 같은 외적인 것에 관련된다. 국외에서는 지능, 사고력, 창의력에 대한 심리학 연구가 교육학 연구에 활발하게 유입되던 시기였다. 그러나 그 연구들을 온전하게 이식할 형편이 되지 않았던 국내에서는 단지 실천에서의 창의성을 논의하고 있을 뿐이었다. 이와 관련된 다른 언급이나 추가 자료가 없는 것으로 보아 이 시기에 추구한 창의성 교육은 선언적인 수준에 머무르고 있다는 것을 짐작할 수 있다.
>
> 제3차 수학과 교육과정에서는 다음과 같이 창의성의 의미와 교육 목표로서의 특질을 더 구체화하여 제시하였다.
>
> *이미 이루어진 지식과 기술의 단순한 전달에 그치지 않고, 계속 미지의 세계를*
> *탐구하고 문제를 해결할 수 있게 하기 위하여, 판단력과 창의력을 함양하도록 한다.*
>
> 위 문장에서는 기존의 지식과 기술을 반복하는 것이 아니라 새로운 것을 만들어 낼 수 있는 능력으로서의 창의성이 명확하게 언급되고 있음을 알 수 있다. 여기서 '미지의 세계'를 탐구하도록 한다는 것은 명백히 창의성 교육의 필요조건이다. 수학 교육의 맥락에서 이 조건의 의미를 고려하면 왜 그런지 알 수 있다.
>
> 가령, 함수의 정의를 알고 있는 학생에게 그것을 적용하여 어떤 대응이 함수인지 아닌지 판단하는 문제를 해결하도록 한다면 창의성을 발휘할 기회를 제공하지 못한다. 함수의 정의를 곧바로 적용할 수 없는 '미지의 세계'에서 어떤 관계가 함수인지 아닌지 또는 함수라고 추측되는 두 변량을 학생 스스로 찾아내어 함수로 주어진 맥락을 모델링하고 탐구하는 등, 모종의 '미지'가 포함되어 있어야 창의적으로 사고하고 대처하게 된다. 학생에게 '미지'인 어떤 맥락이 창의성을 발휘할 필요를 자극한다. 그런데 언제나 그렇듯이, 교육과정 문서에 어떤 관점을 천명하는 것과 그것을 구체화하는 것은 별개의 일이다. 제3차 교육과정기에 만들어진 수학 교과서가 이전에 비하여 미지의 세계에서 탐구하도록 하는 기회가 증가된 흔적은 발견되지 않는다. 오히려 구조와 엄밀성 등 이른바 '새 수학 운동'의 영향을 받은 터라 모험의 기회를 담고 있는 미지의 세계는 수학 교육과 거의 관련을 맺지 못한 것으로 보인다. 제3차 교육과정 이후 계속되었던 교육과정 개정에서 창의력 함양에 관한 언급은 빠진 적이 없다. 더불어 수학 교육과정이 이론적으로 그리고 체계적으로 질적 관리가 되면서 창의성 함양에 대한 논의는 점차 구체적으로 바뀌었다. (3~5쪽)

IV 수학과 학습 평가

1 수학과 평가의 특성

수학은 학문 중에서 가장 오랜 역사를 지닌 것으로서 일반적으로 다음과 같은 특징을 갖고 있다.

- 추상성
- 이상성
- 실용성
- 논리성과 직관성
- 형식성
- 일반성과 특수성
- 계통성

이러한 특징을 지닌 수학의 본질은 고등학교 교육과정 수학 교과의 성격에서 잘 나타내어지고 있다.

한편, 2015 개정 수학과 교육과정[11]에 따른 고등학교의 평가 방향에서의 원칙과 방법은 다음과 같다.

1) 평가 원칙

(가) 수학과의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 수집 · 활용하여 학생의 수학 학습과 전인적 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 것을 목적으로 한다.

(나) 수학과의 평가는 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수하고, 교육과정에 제시된 목표, 내용, 교수 · 학습과 일관성을 가져야 한다.

(다) 수학과의 평가에서는 수학의 개념, 원리, 법칙, 기능뿐만 아니라 문제 해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천과 같은 수학 교과 역량을 균형 있게 평가한다.

(라) 수학과의 평가는 학습자의 수준을 고려하고 평가 목적과 내용에 따라 다양한 평가 방법을 활용한다.

(마) 평가 결과는 학생, 학부모, 교사 등에게 환류하여 학생의 수학 학습 개선을 도울 수 있게 한다.

2) 평가 방법

(가) 수학과의 평가는 학습 결과 평가뿐만 아니라 과정 중심 평가도 실시하여 종합적인 수학 학습 평가가 될 수 있게 한다.

(나) 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가를 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통해 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

(다) 학생의 수학 학습 과정과 결과는 지필 평가, 프로젝트 평가, 포트폴리오 평가, 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가, 동료 평가 등의 다양한 평가 방법을 사용하여 양적 또는 질적으로 평가한다.

① 지필 평가는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력과 문제 해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통 능력 등을 평가하는 데 활용할 수 있고, 선택형, 단답형, 서 · 논술형 등의 다양한 문항 형태를 활용한다.

② 프로젝트 평가는 수학 학습을 토대로 특정한 주제나 과제에 대해서 자료를 수집하고 분석, 종합, 해결하는 과정과 결과를 평가하는 방법으로, 문제 해결, 창의 · 융합, 정보 처리 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

③ 포트폴리오 평가는 일정 기간 동안 수학 학습 수행과 그 결과물을 평가하는 방법으로, 학생의 학습 내용 이해와 수학 교과 역량을 종합적으로 판단하고 학생의 성장에 대한 정보를 얻는 데 활용할 수 있다.

---

[11] 교육부, 「교육부 고시 제2015－74호 [별책 8] 수학과 교육과정」, 2015(57~58쪽)

④ 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가는 학생 개인 및 소집단을 관찰, 학생과의 대화, 학생의 발표를 통해 학생의 이해 정도와 사고 방법, 수행 과정 등을 평가하는 방법으로, 의사소통, 태도 및 실천 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

⑤ 자기 평가는 학생 스스로 자신의 이해와 수행을 평가하는 방법으로, 문제 해결과 추론 과정의 반성, 자신의 생각 표현, 태도 및 실천 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

⑥ 동료 평가는 동료 학생들이 상대방을 서로 평가하는 방법으로, 협력 학습 상황에서 학생 개개인의 역할 수행 정도나 집단 활동에 기여한 정도를 평가할 때 활용할 수 있다.

(라) 평가 내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다.

앞의 평가 방법 (나)에서 제시한 진단평가, 형성평가, 총괄평가에 대한 내용과 특징을 정리하면 다음과 같다.

① 진단평가

진단평가의 주목적은 어떤 단위 학습이 시작되기 전에 수업의 대상이 되는 집단의 학생이 지니고 있는 학습에 대한 특성, 과거 학습의 성취 정도, 흥미도, 학습 동기 상태 등의 초기 상태를 진단하여 교수의 효율과 학습의 능률을 향상시키기 위한 것이다. 특히, 학습의 시발점에 있는 학습자가 지닌 지적, 정의적 행동의 정보를 교수 · 학습 과정에 투입함으로써 학생의 성취 수준을 향상시키고 극대화하는 것이 중요한 목적이다.

수학의 특징에서 제시한 계통성을 고려할 때 수학과에서의 진단평가는 필수적인 것으로서 평가 결과의 처치가 불완전하면 학습의 효과를 기대하기 곤란한 것이다. 따라서 고등학교 수학에서 교재를 구성할 때, 적어도 중단원 수준에서 형성평가를 실시하고 그 결과를 통하여 보충 · 심화 학습을 해야 하며 학습 지도 방법의 계획에 기초 자료로 삼아야 할 것이다. 보충 · 심화 과정에서 특히 중요한 것은 일제 학습을 전제로 했을 때, 보충 수업이다. 보충 수업에는 개별화가 불가피하게 되는데, 과외 학습은 이런 데 활용해야 할 것이다.

일반적으로 진단평가를 통하여 다음 문제를 해결할 수 있다.

• 계획된 학습 과제의 목표를 성취하는 데 선수 조건이 되는 시발 행동 및 기초 기능을 학생이 소유하고 있는가?
• 주어진 학습 내용을 학습할 수 있는 능력을 어느 정도나 갖고 있는지를 평가하여 어떤 수준의 학습 프로그램을 제공할 것인가?
• 학생의 관심, 흥미, 동기, 적성, 기초 기능, 선행 학습의 과정 등을 파악하여 그에 따라 어떤 교수 방법을 제공할 것인가?

② 형성평가

형성평가의 주목적은 학습 과정에서 발생하는 학생과 교사 사이에 어떤 오류나 곤란에 대한 정보의 피드백과 교정에 있다.

또한, 학습이 아직 유동적인 과정에서 교과 내용이나 학습 방법의 개선을 추구하고, 형성평가의 제작은 수업을 이끌어 가면서 이를 개선하려는 교사가 직접 해야 하며, 형성평가 시에 필수적으로 요구되는 사항은 목표의 상세화와 학습 목표의 명확화인 것이다.

형성평가의 역할을 몇 개의 항목으로 열거하면 다음과 같다.

• 학습자의 학습 보조를 적절히 개별화하는 데 도움을 준다.
• 학습의 각 단계에서 발생하는 정보에 대한 피드백을 주며 그것을 교정해 준다. 또한, 보상과 강화의 역

할을 병행하여 실시할 수 있다.
- 평가 결과는 학습의 성패를 알려 줄 뿐 아니라 실패의 원인을 제공해 줌으로써 학습의 곤란도를 진단하게 된다.
- 학습자에게 학습하고자 하는 내발적 동기를 부여하는 매개 역할을 함으로써 학습의 동기를 촉진시킨다.
- 평가 결과는 교사에게 있어서는 교수 방법을 개선할 수 있는 정보를 제공해 준다.

이상의 평가 목표나 특징으로 인하여 교수 · 학습 과정에서 형성평가의 중요성은 절대적이고, 어떤 의미에서 이것은 학습의 방법을 좌우하게 되고 그 자체가 되기도 한다. 따라서 학습 지도 시에 규칙적이거나 수시로 형성평가를 어떻게 적용하는지가 지도 방법의 핵심이 된다고 볼 수 있다.

③ 총괄평가

단위 학습이 끝난 후에 실시하는 총괄평가는 학생의 학습 결과를 나타내는 성적에 대한 점수 판정이 가장 주된 역할이며, 그 학습 이후에 후속되는 학습 과제에서의 성공 여부를 예언하고, 교수 방법에 이용하여 학생에게 피드백하며, 집단 간 비교, 자격 인정의 의사 결정에 중요한 역할을 한다.

결국 총괄평가는 행정적 의사 결정에 그 주목적이 있다고 말할 수 있다. 그러나 현실적으로 중간고사나 기말고사에 시험을 평가하는 역할에는 총괄평가의 역할 이외에 학생에게 학습 정리의 기회를 줄 뿐 아니라 이 기회에 반복 연습하여 숙지시키는 역할을 하고 있음에 유의할 필요가 있다. 다만 점수와 석차에 급급한 나머지 학습의 기본적인 사실을 망각해서는 안 될 것이다.

이상의 진단평가, 형성평가, 총괄평가의 형태에 대한 특징을 비교하면 다음 표[12]와 같다.

비교 내용	진단평가	형성평가	총괄평가
기능	• 선수 기능의 유무 판정 • 학습 전 성취 수준의 판정 • 교수 방법의 대안과 관련된 학생의 분류 • 계속적인 학습의 곤란 요인 진단	• 학습 단위와 관련된 학생, 교사에게 피드백 제공 • 학습 단위의 구조에 따라 오류를 확인함으로써 교정, 교수 방법의 대안을 제시	• 학습 단위 시기, 학년 말에 학생 성적의 판정 및 자격 부여
시기	• 학습 시초 • 학기, 학년의 시초 배치 시 • 정상 수업으로서 학생이 계속해서 도움을 못 받을 때 수업 중에 실시	• 수업이 진행 중일 때	• 일련의 학습 과제, 학기, 학년이 끝날 때
강조 사항	• 지적, 정의적, 심리 운동적 행동 • 신체적, 환경적, 심리적 요인	• 지적 활동	• 일반적으로 지적 활동 (교과에 따라서는 심리 운동적 행동과 정의적 특성)
검사 도구의 형태	• 사전 검사를 위한 형성평가 및 총괄평가 도구 • 표준화 학력 검사 • 표준화 진단 검사 • 교사 제작의 평가 도구 • 관찰 및 체크리스트	• 학습 목표에 맞게 특별히 제작된 형성평가 도구 • 교사가 수시로 제작하는 것이 원칙	• 종말 또는 총괄평가 도구

[12] 황정규, 『학교 학습과 교육 평가』, 교육과학사, 1998(342쪽)

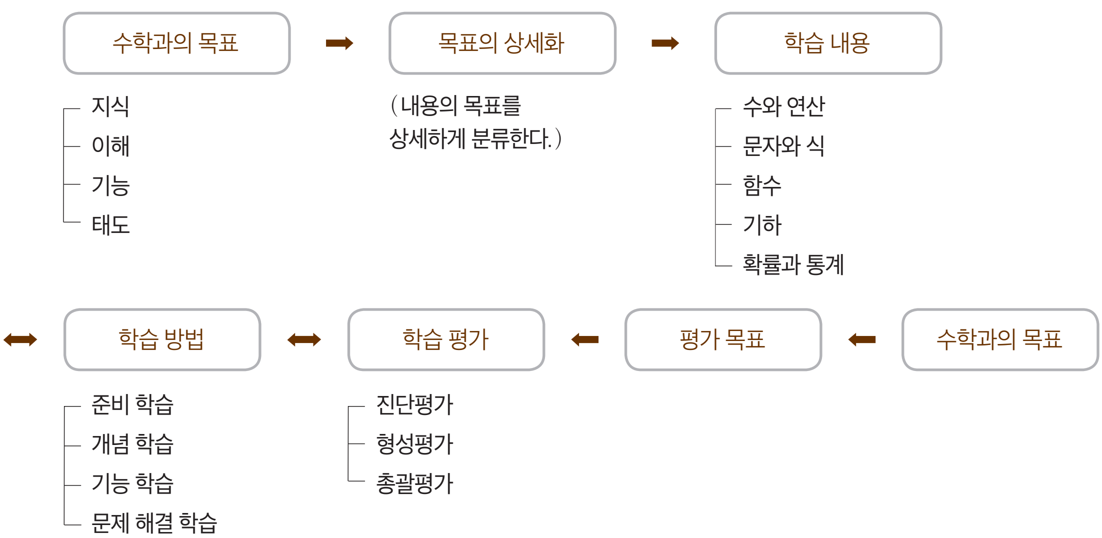
교육 목표의 표본 방법	• 각 선행 기능 행동의 구체적 표본 • 비중을 둔 교과 목표의 표본 • 교수 형태와 관계있다고 생각되는 학생 변인의 표본 • 신체, 정서, 환경에 관련된 행동의 표본	• 학습 단원 위계에 포함된 모든 관련된 과거의 구체적 표본	• 비중을 둔 교과 목표의 표본
문항의 난이도	• 선수 기능 및 능력의 진단 (쉬운 문항 65 % 이상의 난이도)	• 미리 구체화할 수 없음	• 미리 구체화할 수 있음 (대체적으로는 다양한 수준의 난이도를 갖는 문항의 표본)
채점	• 규준 지향 및 목표 지향 채점 적용	• 목표 지향 채점	• 일반적으로 목표 지향적이나 필요에 따라 규준 지향 채점도 이용

2 수학과 평가의 실제

이제 실제 수학과에서 평가해야 할 것과 평가와 관련하여 일어날 수 있는 문제에 대하여 알아보자.

가. 수학과 교육과정의 측면에서 본 평가

수학과의 학습 지도에 나타나는 평가를 교육과정과 관련하여 제시하면 다음과 같다.



나. 목표 지향적 평가와 그에 대한 예시

학습 목표를 크게 인지적 영역과 정의적 영역으로 나누어 평가에 대한 문제를 생각해 본다.

인지적 영역은 정신적 또는 지적 활동을 필요로 하는 학습으로서 학습의 결과로 지식이 축적된다. 실제로 수학에서 학습하는 대부분이 인지를 수반하며, 수학은 기본적으로 지적인 노력의 산물이라 말할 수 있다.

정의적 영역은 태도, 가치, 기호, 열심, 책임 등을 수반한다. 대부분의 수학 수업에서 인지적 학습이 이루어지고 있으나, 학교 수학은 인지적 학습 못지않게 정의적 학습이 중요함을 인식해야 한다.

이때 인지적 학습과 정의적 학습은 서로 결합된 상태에서 이루어져야 한다. 따라서 수학의 학습 목표의 선정에서도 인지적 목표와 정의적 목표가 함께 고려되어야 한다.

예를 들어 학습 목표를 '두 분수의 덧셈을 이해한다'고 선정하였을 때, 이 목표를 성취했는지를 평가함에 있어 많은 격차가 생길 수 있다. 우선 다음과 같은 애매한 표현이 생길 수 있기 때문이다.

• 두 분수란 어떤 것을 가리키는가?
• 덧셈의 개념을 요구하는 것인가? 또는 원리를 요구하는 것인가?
• '이해한다'란 무엇을 뜻하며 어떻게 된 형태가 이해한 수준인가?

이해라는 말은 정신적 활동을 뜻하는 용어이기 때문에 그 과정을 눈으로 볼 수 없다. 우리는 다만 이해의 결과로 나타내어지는 행동을 관찰할 수 있다.

따라서 이러한 목표의 진술은 '두 분수', '덧셈', '이해한다'를 명확히 측정할 수 있는 용어로 바꾸어야 평가할 수 있게 된다.

인지적 목표를 6개의 위계적인 범주로 나누면 다음과 같이 분류[13]할 수 있는데, 학습 평가에서는 그 각각에 대하여 평가할 수 있어야 한다.

1) 지식(Knowledge)

수학과에서는 수학적인 사실, 용어, 정의, 정리, 해법 등의 기억과 재생이 이 범주의 목표에 속한다.

예 **학습 목표**: 짝수의 뜻을 말할 수 있다.

평가 문항: 짝수란 어떤 수인가?(짝수의 뜻을 말할 수 있는가?)

2) 이해(Comprehension)

이해의 행위는 번역, 해석, 추정으로 분류된다. 예를 들어 자료를 정리하여 표나 그래프로 나타내고 이것들에서 자료의 특성을 파악하는 것은 번역, 해석, 추정의 행위를 요구하게 된다.

예 **학습 목표**

• 두 자연수의 최소공배수를 구할 수 있다.
• 자연수에 짝수, 홀수의 이름을 붙일 수 있다.

평가 문항

• 두 수 12와 8의 최소공배수를 구하시오.
• 8, 11, 13, 16, 19 중에서 짝수는 어느 것인가?

3) 적용(Application)

수학적 사실, 기능, 개념, 원리 등을 어떤 상황에서 적절하게 선택하고 사용할 수 있는 것을 말한다. 예를 들어 학생이 어떤 추상 개념의 사용법을 배우고 그것을 해 보라고 지시받았을 때, 해결 방안이 구체적으로 주어지지 않은 상황에서 그 추상 개념을 정확하게 사용할 수 있는 것이 적용이다.

예 **학습 목표**: 비율의 개념을 적용할 수 있다.

평가 문항: 연필 세 자루를 680원에 살 때와 두 자루를 500원에 살 때 중에서 어떤 경우가 더 유리한가?

4) 분석(Analysis)

이해나 적용보다 약간 높은 수준에 있는 기능이 분석과 관련이 있다. 이해에서는 자료의 뜻하는 바를 파악하는 데 강조점이 있고, 적용에 있어서는 알맞은 개념이나 원리를 기억했다가 주어진 자료와 관련짓는 것이 중요하고, 분석에서는 자료를 그 구성 부분으로 분해하고 부분 간의 관계와 그것이 조직되어 있는 구조를 발견하는 것을 중요시한다.

---

[13] Bloom, B. S. et al., 『Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals, Handbook Ⅰ: Cognitive Domain』, Longmans, 1956(18쪽)

㉠ **학습 목표**: 자연수에서 곱셈과 덧셈의 관계를 설명할 수 있다.

평가 문항: 두 자연수의 곱셈을 덧셈으로 나타낼 수 있는 보기를 찾으시오.

5) 종합(Synthesis)

종합은 하나의 독특한 체계를 구성하기 위하여 여러 가지 아이디어를 결합하는 것을 말한다. 예를 들어 두 직선의 교점의 좌표를 구하기 위하여 연립일차방정식을 이용하는 것을 종합이라 할 수 있다.

예 **학습 목표**: 연립일차방정식을 이용하여 두 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.

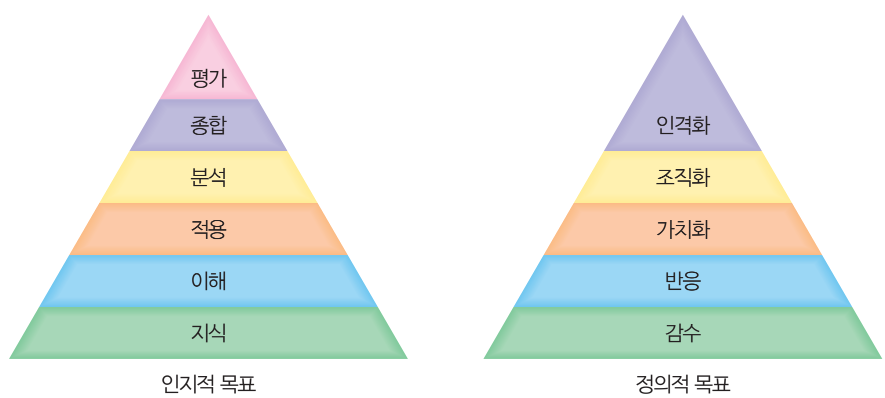
평가 문항: 두 직선 $x-3y=2$와 $3x-5y=-1$의 교점의 좌표를 구하는 과정을 서술하시오.

6) 평가(Evaluation)

평가는 아이디어들의 가치, 구조, 절차, 방법 등에 대하여 판단을 내리는 것을 말한다. 따라서 평가는 새로운 지식, 더 좋은 수준의 이해, 새로운 적용, 독창적인 분석과 종합을 이끌어 내기도 한다. 예를 들어 "수학이 우리 생활에서 갖는 가치는 무엇인가?", "왜 우리는 수학을 알아야 하는가?" 등의 질문이 평가에 해당한다고 할 수 있다.

예 **학습 목표**: 수 체계에서 0의 중요성을 설명할 수 있다.

평가 문항: 수 체계에서 0이 없다면 수학을 하는 데 있어서 어떤 제한점이 있겠는가?



블룸의 교육 목표 분류 위계표

블룸은 정의적 영역의 수준을 다음과 같이 5단계로 분류[14]하였다.

1) 감수(Receiving)

이 수준에서의 관심은 학생이 특정한 현상이나 자극의 존재를 의식하게 되는 데 있다.

예 **학습 목표**: 정수에 대한 학습의 중요성을 깨닫는다.

평가 문항: 수학에서 정수가 왜 필요한가? 또, 그것들은 과학에서 어떻게 활용되는가?

2) 반응(Responding)

감수는 단지 수동적인 행동을 요구하나 반응은 학생들의 능동적인 수준의 참여를 요구한다.

예 **학습 목표**: 수학적 게임을 하는 것을 즐긴다.

평가 문항: 수학적 게임을 만들고 그것을 교실에서 할 수 있도록 교사에게 허락받는다.

3) 가치화(Valuing)

이 수준에서의 행동은 일관성과 안정성이 충분하여 하나의 신념 또는 태도로서의 특징을 갖는다.

[14] 이 내용은 Krathwohl et al(1964)에 나와 있다.

예 **학습 목표:** 수학 학습을 좋아하는 태도를 보인다.

평가 문항: 수학 문제를 해결하기 위하여 도전하고, 수학 동아리에 참가한다.

4) 조직화(Organizing)

학생이 여러 가치를 계속적으로 내면화해 갈수록 그는 하나 이상의 가치와 관련되는 사태에 당면하여 여러 가지 가치를 하나의 체계로 조직하고 그 둘 사이의 상호 관계를 결정하며 지배적인 가치와 모든 경우에 통용되는 가치를 설정할 필요가 생긴다.

예 **학습 목표:** 수학의 논리적 구조를 알기 위하여 노력한다.

평가 문항: 증명의 본질과 수학의 논리적 기초에 대한 논의를 수행하고, 수학의 발전에서의 그들의 가치를 설명한다.

5) 인격화(Characterizing)

이 수준에서 가치는 일정한 구조로 내면화되며, 내면화된 이 일정한 구조는 개인의 특성으로 형성되어 있다. 인격화의 수준은 일반화된 행동 태세를 넘어서 개인의 우주관, 인생 철학, 세계관과 관련된 개인의 특성을 말한다.

오랜 기간에 걸쳐 형성되는 이 목표의 수준은 제어하거나 예측하기 매우 어려우며, 또한 측정하거나 평가하기란 더욱 어려워서 학교 교육 목표에서 수준을 설정하지 않는다.

이상에서 간단히 살펴본 평가와 관련하여 수학 교육 전반에서 야기되는 문제에는 다음과 같은 것들이 있다.

- 학습 평가에서 '다음 문제를 푸시오.', '다음 계산을 하시오.'와 같은 표현은 좋지 않다. 이런 문제 중에서 어떤 것이 어떤 목적에서의 평가 문항인지를 판별할 수 있는 능력이 있어야 하고 그것이 그 목표의 평가에 적절할지를 판단할 수 있어야 한다. 또한, 그 평가 결과에 대한 처치 대책까지를 꿰뚫고 있어야 한다.
- 평가 목표가 설정되면 그 문제 형태가 결정되어야 하는데 그것은 반드시 평가 목표에 부합되어야 한다. 이 문제에서 가장 많은 결함을 갖는 것이 선택형 문제로, 교육 효과에 역기능을 많이 갖고 있다는 것을 인식해야 한다. 또, 단답형도 목표 측정 면에서 선택형보다 우수하나 결과 처치에 있어서는 결함이 많음을 인식해야 한다.
- 진단평가나 형성평가를 점수화하거나 서열화하는 것은 의미가 없다.
- 총괄평가에서도 관리 목적으로 정수화, 서열화하지만 그것이 학습 성취의 절대적인 수준이 될 수 없음을 교사, 학생, 학부모는 공히 인식해야 한다. 더욱이 이것으로 수학 외적인 측면을 서열화하려는 오류는 지극히 위험한 것이다.
- 학습 평가가 어떤 목적에 의하여 이루어지고 있지만, 그 부수적인 작용을 염두에 두지 않을 수 없다. 즉, 형성평가나 총괄평가가 예고되었을 경우 평가에 대비한 준비에서 기대되는 효과를 고려해야 한다. 단순 선발을 목적으로 치러지는 입시의 평가 문항 개발에 있어서도 그것이 학습 효과에 미칠 영향을 고려해야 한다. 우리나라 교육의 문제 대부분이 여기에 기인하고 있음은 너무도 잘 알려진 사실이다.
- 각종 평가에 대하여는 가급적 지도 교사가 직접 채점함으로써 각 개인의 문제를 피부로 느껴야 하고 그것을 곧바로 다음 교수 · 학습 과정에 반영하여 학습자와 밀접한 관계를 유지해야 한다.
- 수학은 계통적인 특성을 갖고 있으므로 학습 평가의 결과는 지속적으로 측정되고 연결되어야 한다.

V 수학 교육의 동향

1 외국 수학 교육의 동향

1980년대 이후로 세계 수학 교육의 방향을 선도해온 미국의 NCTM은 1989년에 「학교 수학의 교육과정과 평가 규준(The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)」을 발간하였고, 1991년에는 「수학 수업의 전문적 규준(Professional Standards for Teaching Mathematics)」, 1995년에는 「학교 수학의 평가 규준(Assessment Standards for School Mathematics)」을 연달아 제시하였다. 또, 2000년에는 「학교 수학을 위한 원리와 규준(Principles and Standards for School Mathematics)」을 확립하여 21세기 학교 수학의 방향을 제시하였다.

NCTM은 이 자료들에서 21세기의 자유 민주주의 체제하의 정보산업사회를 살아갈 학생들에게 요구되는 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 수학 교육이 필요하다고 보고 있다. NCTM은 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 자신의 수학적 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고 있다.

또, 초 · 중등 수학 교육을 통하여 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다.

1989년에 제시한 「학교 수학 교육과정과 평가의 새로운 규준」은 우리나라 제7차 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 많은 영향을 주었다. 예를 들어 수학과 교육과정에서 '수학적 힘(mathematical power)'을 강조하고, 기술 공학 사용을 권장하며, '공간 감각', '이산수학' 등이 새로운 학습 내용으로 도입되었다.

2000년의 「학교 수학을 위한 원리와 규준」은 앞선 세 가지 규준에 기초하여 원리와 규준을 일관성 있게 조직하고, 강조점과 근거를 명확히 하는 데 초점을 두었다. NCTM은 교사와 학교 당국자, 그리고 다른 교육 전문가에 의하여 내려지는 교육적 결정은 학생들과 사회에 미치는 영향이 매우 크므로 이러한 결정을 내리는 데 지침이 될 수 있는 원리를 제공한다고 밝히고 있다.

「학교 수학을 위한 원리와 규준」에서는 학교 수학의 원리를 다음과 같이 평등, 교육과정, 수업, 학습, 평가, 기술 공학의 6개 주제 영역으로 구분하여 설명하고 있다.

- **평등**: 수학 교육에서 수월성은 평등성을 필요로 하는데, 모든 학생에게 높은 기대와 강한 뒷받침이 있어야 한다.
- **교육과정**: 교육과정은 활동을 모아 놓은 것 이상이어야 한다. 이것은 일관성이 있고 중요한 수학에 초점을 두어야 하며 모든 학년에 걸쳐서 매우 명료하게 기술되어야 한다.
- **수업**: 수학을 효과적으로 가르치려면 학생들이 무엇을 알고 있으며 어떤 것을 학습할 필요가 있는지에 대해 이해해야 하며, 그들이 수학을 잘 배우도록 도전하게 하고 지원해야 한다.
- **학습**: 학생들은 경험과 선행의 지식으로부터 새로운 지식을 이해하고 능동적으로 구성함으로써 수학을 학습해야 한다.
- **평가**: 평가는 중요한 수학의 학습을 뒷받침해야 하며 교사와 학생 모두에게 유용한 정보를 제공해야 한다.
- **기술 공학**: 기술 공학은 수학을 가르치고 배우는 데 필수이다. 그것은 수학의 지도 내용에 영향을 미치며 학생들의 학습을 촉진시킨다.

「학교 수학을 위한 원리와 규준」은 이러한 학교 수학의 원리로 교육과정의 틀을 개발하고, 교수 · 학습 자료를 선택하며, 수업을 계획하고, 평가를 설계하며, 수업에서 교육적인 결정을 내릴 때 그리고 교사의 전문성 신장 프로그램을 만드는 데 기초로 삼도록 하고 있다. 또, 「학교 수학을 위한 원리와 규준」은 학생들이 유치원에서 12학년까지 학교 수학 교육을 통하여 학습해야 할 이해, 지식, 기능을 내용 규준과 과정 규준으로 구분하고, 다시 내용 규준은 수와 연산, 대수, 기하, 측정, 자료 분석과 확률로 구분하고, 과정 규준은 문제 해결, 추론과 증명, 의사소통, 연결성, 표현으로 구분하여 각 규준에 대하여 상세히 기술하고 있다.

NCTM의 「학교 수학을 위한 원리와 규준」 이외에 최근 수학 교육계에는 수학도 인간의 활동으로 보며 산물로서의 수학보다는 과정으로서의 수학을 강조하는 경향이 널리 퍼져 있다. 여기에는 1960년대의 '새 수학(New Math)'이 실패한 이후 그 대안으로 대두된 구성주의 인식론이 그 바탕을 이루고 있는데, 그중 주목할 만한 것은 프로이덴탈(Freudenthal, H., 1905~1990)의 수학화 이론에 기초를 둔 네덜란드의 '현실적 수학 교육(Realistic Mathematics Education)' 이론이다.

현실적 수학 교육 이론은 PISA에서도 주요 배경 이론이 되고 있으며, 미국을 비롯한 여러 국가에서 공동 연구를 통한 교육과정 개발 작업 등이 추진되고 있다.

이상으로부터 현재 외국 수학 교육의 동향을 정리하면 다음과 같은 세 가지를 들 수 있다.

가. 모두를 위한 수학

역사적으로 수학 교과는 학생들에게 불균등한 역할을 해 왔다. 예를 들어 학생의 수학 성적은 상급학교의 진학과 직업 선택에서 필터 역할을 하거나 능력별 학급 편성에서 주요 요인으로 작용해 왔다. 또한, 언어적 소양과 달리 수학적 소양은 개인의 타고난 능력에 많은 영향을 받는다는 신념으로 인하여 학교에서 수학 실패에 대해 비교적 관대한 입장을 취해 왔다.

'모두를 위한 수학(Mathematics for All)'은 이와 같은 입장에 도전하는 것으로서 이는 '특정 학생이 아니라 모든 학생들이 수학적으로 사고하는 것을 배울 수 있다.'라는 전제에서 시작한다. 수학적 소양을 기반으로 하는 정보화 사회에서는 모든 학생을 위한 우수한 수학 교육 프로그램이 필요하다. 이러한 프로그램은 수학에 특별히 재능이 있는 학생과 시민 사회에서 양적인 정보를 다룰 수 있는 학생 모두를 지원해야 한다. 이러한 목적이 달성된다면, 수학은 상급학교 진학과 직업 선택에서 불평등이 아닌 기회균등을 가능하게 해 주는 교과의 역할을 할 수 있을 것이다.

나. 구성주의

20세기 절반 이상을 득세한 행동주의는 수행을 위한 훈련과 이해를 목적으로 하는 교수와의 구분을 없애기 위하여 노력했으나, 현재 교수 · 학습에 대한 관점은 단순한 자극 · 반응 현상이 아니라 자기 조정과 반성적 사고, 추상화를 통한 개념적 구조의 수립이 필요한 과정으로 파악하고 있다. 이러한 관점은 구성주의(構成主義, constructivism) 입장에서 교수 · 학습 과정을 파악하는 것이다.

구성주의자들은 지식이 인식 주체에 의해 능동적으로 구성되는 것이지 환경으로부터 수동적으로 받아들여지는 것이 아니며, 앎의 과정 또한 인식 주체가 자신의 경험 세계를 스스로 조직하는 조절 과정으로 보고 있다.

현재 구성주의는 피아제(Piaget, J., 1896~1980)의 조작적 구성주의, 글라저스펠트(Glasersfeld, E. von, 1917~2010)의 급진적 구성주의, 다양한 사회 문화 이론과 비고츠키(Vygotsky, L., 1896~1934)의 이론을 수용한 사회적 구성주의 등으로 구분할 수 있다. 이 이론들은 지식의 구성에서 개인과 사회의 역할을 어떻게 보느냐에 따라 입장을 달리하고 있지만, 학교 수학에서는 실제적인 차원에서 다양한 구성주의들을 통합해 가는 태도를 보이고 있다.

다. 교수 · 학습 과정

학생들은 자신의 경험과 이전에 배운 지식을 바탕으로 새로운 지식을 능동적으로 구성한다는 전제에서, 교사는 학생들이 수학적 개념과 절차를 이해하고 이를 바탕으로 새로운 종류의 문제를 해결할 수 있도록 도와줘야 한다는 것이 교수 · 학습 과정에 대한 일반적 입장이다.

따라서 교사는 교과에 대한 깊은 이해를 토대로 중요한 수학 과제를 선택하고 학생들의 수학적 성향을 기를 수 있는 학습 환경을 조성하고 이를 지원할 수 있는 담론(談倫)을 형성할 수 있어야 한다. 또한, 담론 형성을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교구, 이야기, 은유 등을 적절히 사용할 수 있어야 하며, 교사는 자신의 교육 경험을 지속적으로 분석하고 반성하며 개선해 나가야 한다.

2 우리나라 수학 교육의 동향

우리나라 수학 교육의 동향을 알아보기 전에 우선 우리나라의 교육이 어떻게 변화해 왔는지를 알아보는 것이 필요할 것이다.

우리나라의 보편 교육이 서당의 한문 교육 위주에서 탈피하여 근대적 교육을 실시한 것은 갑오개혁의 하나로 1895년에 한성 사범학교가 발족하고 같은 해 소학교 설립이 공포된 이후라고 볼 수 있다. 따라서 그 후의 수학 교육의 동향에 대하여 살펴보기로 한다.

가. 광복 이전의 수학 교육

갑오경장 이후의 소학교와 사범학교에서 다룬 수학 교육의 내용은 산술과 대수 및 기하의 초보와 교수법이었다. 1906년에 소학교가 보통학교로 개편되고 고등학교와 고등여학교가 설립되었으며, 1908년에는 사범학교령이 공포되면서 교육 내용이 산술, 대수, 기하, 부기 등으로 개편되고 수학 교육의 목표도 단순 계산뿐만 아니라 수량과의 관계, 생활에 필요한 지식의 전달, 정확한 사고력을 기르는 것으로 정해졌다.

일제 강점기에는 비교적 자세한 교육과정이 만들어지고, 중학교에서는 수와 방정식, 문자와 식, 평면도형과 입체도형, 통계, 함수론, 지수와 로그 등 현대적 교육과정의 틀이 갖추어졌다.

나. 교수요목기(敎授要目期)

광복 이후 미군정 시기에 1946년 중등학교가 초급 중학교와 고급 중학교로 분리되면서 '교수요목'이 제정되었는데, 이때부터 제1차 교육과정이 제정된 1955년 이전까지의 시기를 교수요목기라고 한다. 이 시기에는 중학교에서 삼각함수, 지수와 대수를 다루고 고등학교에서 미분방정식과 테일러 급수를 학습하는 등 그 수준이 너무 높게 설정되었고, 결과적으로 학생들에게 과중한 수업 부담을 지우고 수학에 흥미도 잃게 만드는 결과를 가져왔다.

다. 정부 수립 이후

1948년 대한민국 정부가 수립되고 1949년 교육법이 제정 · 공포되면서 비로소 우리나라의 자주적인 교육 제도가 마련되었다. 1950년에는 6-3-3제의 신학제가 시작되었으나, 6·25 전쟁으로 인하여 1954년에야 비로소 교육과정의 기본이 될 '각급 학교 교육과정 시간 배당 기준령'이 문교부령 제35호로 공포되었다. 1955년에는 초 · 중 · 고등학교 교과과정이 제정 · 공포되었으며, 이후 지속적으로 개정을 하고 있다.

1) 제1차 교육과정(1954～1963)

교수요목기의 문제점이었던 과중한 수학 교육의 내용을 대폭 줄이고 세계적 흐름인 생활 중심주의 교육과정을 반영하여 생활 경험을 바탕으로 한 수학 교육을 실시하였다. 그러나 수학을 무리하게 생활과 연관시키려고 하다 수학의 본질에 소홀해져 학생들의 사고력과 계산력이 저하되었다.

2) 제2차 교육과정(1963～1973)

제1차 교육과정과 마찬가지로 생활 중심주의 교육과정을 근거로 하였지만, 교과 각각의 특성을 더 강조한 교육과정으로 수학의 계통성을 중시한 계통 중심 교육과정이라 말할 수 있다. 이 교육과정은 수학의 지식과 기능의 수준을 높여서 현대의 발달한 과학, 기술에 적용할 수 있게 하였다. 그러나 당시 수학 교육의 현대화라는 세계적 추세는 반영하지 못하였으며, 내용상의 과부족이 심한 불균형한 교육과정이라는 지적이 있었다.

3) 제3차 교육과정(1973～1981)

1960년대부터 일어나기 시작한 교육의 현대화 운동, 즉 학문 중심주의 교육과정에 기초한 교육과정이라 할 수 있다. 수학은 학문적 체계와 논리성을 중요시하였고, 중 · 고등학교 수학은 집합론의 토대 위에 세워졌다. 그러나 지나치게 엄밀성을 강조하여 학습 내용은 너무 과중하고 어려워졌을 뿐만 아니라, 엄밀하고 논리적인 수학 학습을 뒷받침할 만한 학습 자료의 빈곤 등으로 오히려 수학 교육의 본래 목표를 달성하는 데 어려움이 있었다.

4) 제4차 교육과정(1981～1987)

제3차 교육과정의 지나친 학문 중심주의 교육과정을 개선하기 위하여 1981년에 개정되었다. 수학적 엄밀성과 논리성을 지나치게 강조하여 형식적이고 추상적이었던 제3차 교육과정에서 우선 집합을 수와 연산의 영역에 국한하고, 기호를 단순화하였으며, 기초적인 지식과 기능에 충실하도록 만들었다.

5) 제5차 교육과정(1987～1992)

제4차 교육과정의 보완 수준에 머물렀다. 제3차 교육과정부터 남아 있던 무리한 교육과정을 삭제하고, 필수적인 기본 지식과 기능을 이용한 문제 해결력 강화에 중점을 두었다.

6) 제6차 교육과정(1992～1997)

수학의 기초 지식과 수학적 사고력을 강조하였으며, 수학적 지식을 활용하여 합리적으로 문제를 해결하게 하는 목표가 설정되었다.

또, 정보화 시대에 대비하여 컴퓨터를 활용한 수학이 도입되었다. 수학의 학습 내용은 제5차 교육과정과 큰 차이가 없었으나, 다소 과중한 교육 내용은 개선되었고 내용의 재배열을 통하여 학습자의 편의를 도모하였다.

7) 제7차 교육과정(1997～2007)

개정의 기본 방향을 '수학적 힘'의 신장으로 설정하였으며, 이를 구현하기 위한 실천적인 항목들로, 개인의 능력 수준과 진로의 고려, 수학적 기본 지식의 습득, 학습자의 활동 중시, 수학적 흥미와 자신감의 고양, 계산기, 컴퓨터 및 구체적 조작물의 적극적 활용, 다양한 교수 · 학습 방법과 평가의 활용을 제안하였다. 또, 이를 위하여 단계형 수준별 교육과정, 학습 내용의 적정화, 다양한 선택 과목의 개설 등 사실상 개혁 수준의 전면 개편을 이루었다.

우선 단계형 수준별 교육과정은 10년간의 기본 교육 기간을 10개의 단계로 나누고 각 단계에 2개의 하위 단계(1-가 단계, 1-나 단계, …, 10-가 단계, 10-나 단계)를 두어, 학교급 간의 내용 체계나 내용의 연결성 등에서 심한 중복이나 단절이 없게 하며, 나선형 조직을 피해서 연속적이고 전진적으로 조직하였다.

각 단계 내에서 발생하는 학생들의 수준 차이를 고려하여 보충 과정과 심화 과정을 설치하는데, 이에 대한 학습은 기본 과정 지도와 병행하거나 남은 기본 시간 또는 학교장이 허용하는 재량 활동 시간을 이용할 수 있게 하였다.

이 교육과정은 교육 내용을 엄선하여 학습 부담을 줄여줌으로써 학생들로 하여금 수학 학습에 흥미와 자신감을 가질 수 있도록 할 목적으로 학습 내용을 적정화하였다. 즉, 단계형 수준별 교육과정에서 기본 과정은 모든 학생이 학습하여야 할 핵심적인 내용으로 선정하였으며, 심화 과정은 기본 과정을 성공적으로 학습한 학생들이 발전적으로 학습할 수 있는 내용으로, 기본 과정에서 습득한 지식을 실생활에 활용하는 다양한 방법을 찾아보게 하고, 문제 해결력을 배양하는 데 필요한 학습 내용으로 구성하였다.

또, 이 교육과정에서는 고등학교 2, 3학년에서 일반 선택 1개 과목과 심화 선택 5개 과목 중에서 자기의 진로, 능력, 적성에 맞는 과목을 선택하여 학습할 수 있게 하였다.

8) 2007 개정 교육과정(2007～2012)

2007 개정 교육과정은 국가 수준에서 단계형, 심화 · 보충형으로 제시하였던 수준별 교육과정 관련 내용을 삭제하고, 단위 학교에 수준별 수업 운영(교과, 학년, 수업 방법 등)과 관련된 자율성을 부여하였다. 또, 수학과 교육과정의 개정은 현실 적합한 수준별 수업 방안 구축, 학습 내용의 적정화, 수학적 사고력 신장, 수학의 가치 제고와 정의적 측면의 강조에 중점을 두었으며, 수학적 의사소통 능력 신장과 수학의 가치 이해, 수학에 대한 긍정적 태도 신장 등의 정의적 목표가 추가되었다.

9) 2009 개정 교육과정(2013～2017)

교육과학기술부에서는 국가 경쟁력 강화를 위하여 창의적 인재를 육성하고자 2008년에 '수학 교육 내실화 방안'을 수립하였으며, 이를 학교 수학에 구현하기 위하여 '창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구'[15]와 이에 따른 '교과내용 개선 및 교육과정 개정 시안 연구'에 기초한 '수학과 교육과정 연구'[16]를 통하여 개정의 방향과 범위를 정해 고시하였다.

이 교육과정에서는 총론의 입장에서 학년군제를 도입하고 창의적 체험 활동을 위하여 학습량을 20 % 경감하도록 하였으며, 초등학교 1학년에서 중학교 3학년까지를 공통 교육과정으로 하고 고등학교 1학년에서 3학년까지를 선택 교육과정으로 편성하였다.

수학과 교육과정에서는 수학적 추론, 수학적 문제 해결, 수학적 의사소통을 기본 요소로 하는 수학적 과정을 신설하였다. 이로써 학생들의 수학적 창의성을 신장하고, 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학 학습에 대한 자신감과 긍정적인 태도 등의 정의적 영역의 개선과 더불어 상대방을 이해하고 배려하는 교육을 통하여 바람직한 인성을 기를 수 있게 하였다.

3 최근 외국의 수학과 교육과정의 개요

여기서는 미국을 비롯한 여러 나라의 최근 수학과 교육과정의 개요를 살펴보도록 한다.

가. 미국의 교육과정

미국에는 국가 수준의 교육과정은 없지만, 미국 수학 교사 협의회(NCTM)는 1989년부터 10년에 걸쳐 다음과 같은 책들을 발간하여 21세기 미국의 수학 교육이 나아가야 할 방향을 제시하였다.

- 1989년:「학교 수학의 교육과정과 평가 규준(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)」
- 1991년:「수학 수업의 전문적 규준(Professional Standards for Teaching Mathematics)」

[15] 한국과학창의재단,「창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구」, 2009

[16] 한국과학창의재단,「2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구」, 2011

• 1995년:「학교 수학의 평가 규준(Assessment Standards for School Mathematics)」
• 2000년:「학교 수학을 위한 원리와 규준(Principles and Standards for School Mathematics)」

특히, 2000년에 발간된「학교 수학을 위한 원리와 규준」은 K(유치원)부터 12학년까지를 K~2학년, 3학년~5학년, 6학년~8학년, 9학년~12학년의 4단계 학년군으로 구분하고, 교육과정의 내용 구성 체계를 다음과 같이 각각 5가지의 내용 기준과 과정 기준으로 조직하였다.

NCTM Standards의 내용 구성 체계

내용 기준	과정 기준
수와 연산	문제 해결
대수	추론과 증명
도형	의사소통
측정	연결성
자료 분석과 확률	표현

나. 영국의 교육과정

영국의 수학과 교육과정은 의무 교육 기간인 5세부터 16세까지의 과정을 몇 개 학년씩 묶어서 4단계(key stage) 학년군으로 구분하고 '학습 프로그램(Programmes of Study)'과 '성취 목표(Attainment Target)'로 나누었으며 각 단계는 다음과 같이 크게 세 영역으로 구성되어 있다.

영국 수학과 교육과정의 내용 구성 체계

key stage 1 1학년~2학년	key stage 2 3학년~6학년	key stage 3 7학년~9학년	key stage 4 10학년~11학년
수	수	수	수
모양, 공간, 측정	모양, 공간, 측정	모양, 공간, 측정	모양, 공간, 측정
	자료의 취급	자료의 취급	자료의 취급

여기서 key stage 3의 성취 수준에 따라 우리나라의 고등학교 과정인 key stage 4에서는 '기본 과정'과 '심화 과정' 중의 하나를 이수하도록 되어 있다. key stage 3의 성취 수준이 1~9단계 중에서 4단계 이하의 학생들은 기본 과정을 이수하게 되고, 5단계 이상인 학생들은 심화 과정을 이수하게 된다.

다. 중국의 교육과정

중국의 수학과 교육과정은 1학년에서 9학년까지를 미국과 영국의 경우처럼 3단계 학년군으로 구분하는데, 3개의 내용 영역은 모두 공통으로 구성되고 단계별로 한 영역만 따로 제시하고 있다.

중국 수학과 교육과정의 내용 구성 체계

<table>
<tr><th>제1단계 1학년~3학년</th><th>제2단계 4학년~6학년</th><th>제3단계 7학년~9학년</th></tr>
<tr><td colspan="3">수와 대수</td></tr>
<tr><td colspan="3">공간과 도형</td></tr>
<tr><td colspan="3">통계와 확률</td></tr>
<tr><td>실천 활동</td><td>종합 응용</td><td>과제 학습</td></tr>
</table>

라. 일본의 교육과정

일본의 수학과 교육과정은 모든 학년에 공통으로 다음과 같이 5개의 영역으로 구성되어 있다.

일본 수학과 교육과정의 내용 구성 체계

초등학교	수와 계산	양과 측정	도형	수량 관계	산수적 활동
중학교	수와 식	도형	함수	자료의 활동	수학적 활동

여기서 주목할 것은 이전 교육과정에서 다루어지던 '수학(산수)적 활동' 영역을 새 교육과정에서 강화하여 학년별로 성취 기준을 아주 구체적으로 제시하였다는 점이다. 이것은 교육과정의 나머지 네 영역의 학습에서 경험적인 수학적 활동을 더 많이 하는 기회를 제공하려는 의도이다.

마. 홍콩의 교육과정

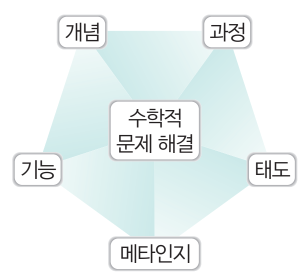
홍콩의 수학과 교육과정은 영국과 유사한데 key stage 1은 1학년~3학년, key stage 2는 4학년~6학년, key stage 3은 중등학교 1학년~3학년, key stage 4는 중등학교 4학년~6학년으로 구성되어 있으며, 2007년에 고시된 중등학교의 수학과 교육과정의 내용 영역은 다음과 같다.

홍콩 수학과 교육과정의 내용 구성 체계

<table>
<tr><th></th><th>초 1 ~ 6</th><th>중 1 ~ 3</th><th colspan="2">중 4 ~ 6</th></tr>
<tr><td>기능</td><td colspan="4">9가지</td></tr>
<tr><td rowspan="7">지식</td><td></td><td></td><td>모듈 1 (대수와 미적분)</td><td>선택</td></tr>
<tr><td>수</td><td rowspan="2">수와 대수</td><td rowspan="2">수와 대수</td><td rowspan="5">공통</td></tr>
<tr><td>대수</td></tr>
<tr><td>측정</td><td rowspan="2">측정, 모양, 공간</td><td rowspan="2">측정, 모양, 공간</td></tr>
<tr><td>모양, 공간</td></tr>
<tr><td>자료의 취급</td><td>자료의 취급</td><td>자료의 취급</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>모듈 2 (대수와 미적분)</td><td>선택</td></tr>
<tr><td>가치와 태도</td><td colspan="4">6가지</td></tr>
</table>

바. 싱가포르의 교육과정

싱가포르의 수학과 교육과정은 오른쪽 그림과 같이 수학적 문제 해결을 중심에 두고 기능, 개념, 과정, 태도, 메타인지의 다섯 가지 요소가 둘러싸고 있는 구조이다.



싱가포르의 학제는 초등학교 6년, 중학교 4년, 고등학교 2(3)년으로 이루어져 있다. 초등학교는 1학년~4학년의 기초 단계가 끝나면 학생들의 수준에 따라 EM1, EM2, EM3의 세 수준으로 구분하여 5학년~6학년의 탐색 단계를 이수하게 되어 있다.

초등학교 졸업 시험인 PSLE(Primary School Leaving Examination)에서 정해진 성취 수준에 도달하지 못한 학생은 유급이 되며, 나머지 학생들은 중학교 4년 동안 특별/고속 과정(special/express course), 보통 학습 과정(normal academic course), 보통 기술 과정(normal technical course) 중의 하나를 이수하게 된다. 특별/고속 과정을 이수한 학생들은 GCEO(General Certificate of Education Ordinary) 시험을 거쳐 고등학교에 진학하고, 보통 학습 과정과 보통 기술 과정을 이수한 학생들은 GCEN(General Certificate of Education Normal) 시험을 거쳐 고등학교나 기술전문학교(Polytechnics)에 진학하게 된다.

4 우리나라 수학 교육의 최근 연구 결과

2015 개정 교육과정과 관련하여 교육부, 한국과학창의재단(KOFAC) 및 한국교육과정평가원(KICE)을 통하여 이루어진 몇 가지 중요한 수학 교육 정책 연구 및 자료의 개요를 요약하여 소개한다.

가. 교육부

- **문 · 이과 통합형 수학과 교육과정 재구조화 연구**(2014. 9.)

  이 연구는 문 · 이과 통합형(또는 2015 개정) 수학과 교육과정을 개발의 기본 토대로 제공하는 기초 연구의 성격이다. 연구의 출발점으로 2009 개정 수학과 교육과정의 문제점을 진단하고, 2015 개정 교육과정에 대한 요구 사항을 파악하기 위해 전국적인 인터넷 설문 조사와 전문가 심층 면담을 실시하여 그 결과를 분석하였다. 또한, 국제적인 동향을 파악하기 위해 미국, 영국, 핀란드, 싱가포르, 일본, 중국, 홍콩, 대만, 북한 10개국의 최근 수학과 교육과정을 분석하고, 교육과정 개정에 대한 시사점을 도출하였다.

- **초 · 중등학교 교육과정 총론**(2015. 9.)

  초 · 중등교육법 제23조 제2항에 의거하여 초 · 중등학교의 교육 목적과 교육 목표를 달성하기 위한 국가 수준의 교육과정을 정하고, 초·중등학교에서 편성 · 운영해야 할 학교 교육과정의 공통적이고 일반적인 기준을 제시하였다.

나. 한국과학창의재단

- **수학 체험 거점 센터 구축 및 운영 방안 연구**(2013. 2.)

  이 연구는 '2012년 수학 교육 선진화 정책 연구 과제'의 하나로, 학생들과 교사들의 수학 체험 활동이 보다 원활하고 능률적으로 이루어질 수 있도록 지원하는 수학 체험 거점 센터를 구축하고 운영하는 데 필요한 제반 사항을 파악하기 위한 기초 연구이다.

- **중등학교 돌봄 교실 수학 프로그램 개발**(2014. 2.)

  이 연구에서는 중학교 및 고등학교의 방과후 돌봄 교실의 목적에 맞게 활용 가능한 수학 프로그램을, 정규 학교 수업과 연계되어 저소득층 및 맞벌이 가정의 사교육비 부담 완화에 기여할 수 있도록 중학교와 고등학교 각각 20차시의 분량으로 개발하였다.

- **초 · 중등 토요 방과후 수학 프로그램 개발**(2014. 2.)

  이 연구는 학생들의 수학에 대한 흥미를 높일 수 있는 체험과 탐구 활동에 기반을 둔 초 · 중등 대상 수학 콘텐츠를 개발하여, 이것을 토요 방과후 프로그램에 적용했을 때 참여 학생들의 수학 학습에 긍정적인 태도 변화가 일어나는지를 알아보는 것을 목적으로 한다.

- **고등학교 수학과 국어 통합 교수 · 학습자료 개발 연구**(2014. 2.)

  이 연구는 고등학교 수준의 수학과 국어 교과 간의 통합적 교수 · 학습 자료를 개발하는 것을 목적으로 한다. 2013학년도부터 시행되는 개정 교육과정에 따른 고등학교 1~3학년의 수학과 국어 교과 내용에서 공통적으로 연계할 수 있는 학습요소 중에서 10개의 통합 교수 · 학습 자료를 선정하여 학생용 활동 교재와 교사용 지도 자료 및 평가문항을 개발하였다.

- **고등학교 수학과 사회(역사 포함) 통합 교수 · 학습자료 개발 연구**(2014. 2.)

  이 연구에서는 '수학과 사회의 통합' 형태로서 블록타임제(blocking scheduling)를 적용하여 수학 교사와 사회 교사가 함께 수업을 진행함으로써 수학 학습과 사회 학습의 목표를 동시에 달성할 수 있도록 하는 모델과 '수학 중심의 통합' 형태로서 수학 교사가 진행을 하지만 도입에서 마무리까지 사회 교과

의 소재와 연계하여 진행함으로써 수학 학습에 도움이 되도록 하는 모델을 개발하였다. 그리고 이들 각 모델을 적용하기 위하여 10개 주제를 선정한 후, 이 주제를 활용하여 교수 · 학습자료 및 교사용 자료를 개발하였다.

- **고등학교 수학과 과학(기술 · 가정 포함) 통합 교수 · 학습자료 개발 연구**(2014. 2.)

이 연구에서는 고등학교 수학과 과학을 통합하여 교수 · 학습 자료를 개발하여 학생들의 수학 학습에 도움이 되고자 수학과 과학적 개념이 상호 연계되는 11개의 수학 및 과학 통합 교수 · 학습 자료를 개발하였다.

- **고등학교 수학과 예술 통합 교수 · 학습자료 개발 연구**(2014. 2.)

이 연구는 창의성 신장을 위한 고등학교 수학과 예술 통합 교수 · 학습 자료를 개발하고 이를 현장에 적용한 모델을 제시함으로써 창의적 문제 해결력 배양을 위한 교실 수업 개선 방안을 구체적으로 제안하는 것을 목적으로 한다.

- **고등학교 수학과 체육 통합 교수 · 학습자료 개발 연구**(2014. 2.)

이 연구는 수학과 체육 교과 간의 내용을 고등학교 수학의 내용으로 이해함으로써 융합교육의 방향을 설정하고, 수학과 체육 교과 간의 공통 연계학습 요소를 반영한 통합 교수 · 학습 자료 표준안을 개발하고 보급하는 것을 목적으로 한다.

- **고등학교 수학 교육과정 실태 분석 연구**(2014. 2.)

이 연구는 2009 개정 교육과정과 그에 따라 개발된 교과서 사이의 일치하지 않는 점은 없는가에 대하여 그리고 그에 따라 개발된 교과서 사이에는 어떤 차이가 있는가에 주목하여, 교육과정 적용 실태를 분석하고 교육과정 연구를 위한 논의 사항들을 제공하는 것을 목적으로 한다.

또한, 관련 문헌 분석, 교과용 도서 개발 실무자 설문조사, 전문가 자문 등을 통해 '교육과정 해석의 다양성으로 인한 교과서 간의 차이에 대한 논의'와 '〈용어와 기호〉에 대한 논의'를 중심으로 고등학교 교과용 도서(수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 확률과 통계, 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ) 개발 과정에서 나타난 교육과정 해석과 적용 실태를 분석하였다.

- **수학 교사 연수 프로그램 개발**(2014. 3.)

이 연구는 상황 학습 이론, 실천 공동체 그리고 성찰적 실천이라는 이론적 배경을 바탕으로 새로운 연수 프로그램을 개발하고, 그 모형을 제시하고 있다.

- **개화기와 일제 강점기 수학 교과서 분석 연구**(2014. 4.)

이 연구는 개화기와 일제 강점기 동안의 수학 교과서에 대한 자료 수집과 정리, 분석을 통하여 우리나라 수학 교육의 역사 정립과 함께 수학 교과서와 같은 객관적 사료에 의한 수학 교육 역사의 정립을 목적으로 한다.

- **수학 교육 선진화 방안 추진 현황 분석 연구**(2014. 4.)

이 연구는 수학 교육 선진화 방안의 과제별 추진 현황과 성과를 분석하여, 차기 수학 교육 선진화 방안을 위한 제언을 도출하는 것을 목적으로 한다.

- **수학의 어려움에 관한 기초 분석 연구**(2014. 4.)

이 연구는 수학의 어려움에 관한 원인을 문헌 연구를 통해 조사하고, 우리나라 고등학교 수학의 내용 영역을 기준으로 일본, 대만, 홍콩, 중국, 싱가포르, 미국, 영국, 핀란드의 8개국 고등학교 수학의 내용과 비교 분석하는 것을 목적으로 한다.

- 통계 교육 활성화를 위한 수학 교육과정 개선 방안 연구(2014. 12.)

  이 연구에서는 빅데이터 시대 및 융 · 복합 시대에 적합한 통계 교육 활성화를 위한 수학 교육과정 개선 방안을 연구하기 위하여 통계 교육의 목표로서 통계적 소양에 대해 의미를 재정립하였다. 내용적 측면에서는 Big Idea를 중심으로, 방법적 측면에서는 통계적 문제 해결 과정을 중심으로 통계 학습 내용 요소들을 산정하였다.

- 우리나라 수학과 교육과정 문서 체제 연구(2014. 12.)

  이 연구에서는 우리나라 수학과 교육과정 문서 체제의 변천 및 해외 주요 8개국과의 문서 체제 비교 · 분석을 통해 차기 수학과 교육과정 문서 체제의 시안이 될 수 있는 모델을 제시하였다.

- 우리나라 수학과 교육과정 내용 계통 연구(2014. 12.)

  이 연구에서는 우리나라 수학과 교육과정의 재구조화 필요에 부응하고 토론 · 탐구 · 체험 중심의 창의적 수학과 교육과정 연구 및 미래 사회 대비 국가 교육과정 방향 탐색의 기초 자료 제공을 위하여 우리나라 수학과 교육과정의 내용 계통을 연구하였다.

- 2014 수학교육 이슈 리포트(2015. 2.)

  이 연구는 수학교육 이슈를 발굴하고 이슈 리포트를 제작하여 우리나라 수학교육이 당면한 과제와 발전 방향을 제시함으로써 수학교육의 적극적이고 장기적인 발전을 위한 정책 수립에 기여함을 목적으로 한다.

- 주제 중심의 고등학교 수학 교과서 모형 개발 연구(2015. 2.)

  이 연구는 창조경제 시대에 걸맞은 창의인재 양성을 위한 미래형 교육을 추진함에 있어, 다양한 분야에 필요한 수학적 역량을 갖춘 융합형 인재양성 기반을 구축하는 데 필요한 주제 중심의 고등학교 수학 교과서의 방향 제시와 그에 따른 고등학교 모델 교과서를 집필 및 제작하는 것을 목적으로 한다.

- 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ(2015. 11.)

  이 연구는 2015 개정 교육과정 총론에서 추구하는 방향을 구현하기 위하여 교육과정 개정의 방향 설정 및 수학 교과 역량의 선정, 수학과 교육과정 국제 비교와 설문 조사, 수학과 교육과정 시안 개발, 교과서 개발 방향 제시와 예시 자료 개발을 목적으로 한다.

- 수학 학습 내용요소 추출 연구 (2015. 12.)

  이 연구는 지금까지 변화되어 온 수학 교육과정을 분석함으로써 공통의 수학 학습 내용요소를 추출하는 것이 가능한가를 탐색하고, 공통의 수학 학습 내용요소에 대한 잠정안을 도출하는 것을 목적으로 한다.

- 수학 학습 실태조사 및 개선 방안 연구 (2015. 12.)

  이 연구는 초 · 중 · 고 학생들의 수학 학습 전반에 대한 심리적 요인 및 학습 현황 등의 심층적, 체계적 분석을 통한 학생들의 수학 학습에 대한 포기 정도의 인식 조사 및 대안을 마련하고, 학생들의 수학 학습에 대한 인지적 · 정의적 특성을 파악하여 데이터에 근거한 맞춤형 수학 학습 개선 프로그램 제안을 통해 다각적이고 실제적인 수학 학습 대책을 마련하는 것을 목적으로 한다.

다. 한국교육과정평가원

- 교과별 수행 평가 방법 개선 방안에 따른 수행 평가 예시 문항 자료집 — 국어 · 수학 · 영어 — (2014. 2.)

  이 연구는 교과 교육의 내외적 요구를 반영한 국어, 수학, 영어 교과에서의 수행 평가 개선 방안을 탐구하여, 교과 평가의 내실을 기하면서 핵심 역량 교육과 행복 교육을 위한 평가 방안을 마련하는 데 도움을 주기 위한 자료집이다. 교과별로 평가 개선 방안을 제시하고, 이에 따른 예시 문항을 개발하였다.

• 수학 · 과학 정의적 특성 함양을 위한 수업 원리 및 전략(2014. 12.)

이 연구는 우리나라 학생들의 수학 · 과학에 대한 정의적 특성을 함양하기 위한 수업 원리 및 전략을 제안하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 정의적 특성의 개념과 특징, 수학 · 과학에 대한 정의적 성취가 낮은 원인과 개선 방안에 대한 고찰을 수행한 후, 흥미, 자기효능감, 가치 인식 등 정의적 특성 함양을 위한 수업 원리 및 수업 전략을 제안하였고, 교육과정, 교사 전문성 신장, 관련 기관 간 협력 체제 측면에서 정책 제언을 제시하였다.

• 수학 성취 및 정의적 특성에 미치는 교육 맥락 변인의 영향: 국가 수준 학업성취도 평가와 PISA 연계 데이터 분석(2015. 11.)

이 연구에서는 동일 학생들이 3년간 연속해서 국가 수준 학업성취도 평가와 PISA에 참여해 얻어진 데이터를 연계하고, 이 데이터를 활용해 학생의 학업성취 및 정의적 특성에 미치는 다양한 교육 맥락 변인들의 영향을 탐색하였다. 즉, 기존에 국가 수준 학업성취도 평가나 PISA 각각의 연구에서 파악할 수 없었던 시간에 따른 학생의 정의적 특성의 변화, 그리고 학생의 학업성취에 미치는 다양한 학생, 학교 수준 변인들의 영향을 분석하고 이를 통해 우리 교육의 질 제고 및 개선을 위한 시사점을 추출하였다.

• 과정 중심 수학 평가에서 계산기 활용 방안 연구(2015. 11.)

이 연구에서는 과정 중심 평가의 의미를 고찰하고, 초, 중, 고등학교 수학 평가에서 활용할 수 있는 과정 중심 평가 문항을 개발하여 제시하였다. 특히, 공학적 도구의 하나인 계산기를 수학 평가에 활용하는 방안도 더불어 제시하였다.

• 국가 수준 학업성취도 평가의 수학과 정의적 영역 설문 문항 개선 방안(2016. 5.)

이 연구는 학업성취도 평가에서 활용할 수학과 정의적 영역에 대한 설문 문항 개선을 통하여 학생들의 정의적 영역의 성취 현황 파악과 더불어, 그 결과를 누적 관리하고 추이 분석을 함으로써 수학 교육 정책 수립에 기여할 수 있는 토대를 구축하는 것을 목적으로 한다.

• 2015년 국가 수준 학업성취도 평가 결과 분석: 수학(2016. 6.)

이 자료집은 2015년에 실시된 국가 수준 학업성취도 평가의 결과를 바탕으로 각 교과의 평가 문항을 분석한 것이다. 교과별 성취도 점수와 성취 수준별 비율을 통해 우리나라 학생들의 학업성취 정도를 확인할 수 있으며, 문항의 분석 내용을 통해서는 학생들을 지도하는 데 도움이 되는 교수 · 학습 관련 정보를 얻을 수 있다.

• 2015년 고등학교 국가 수준 학업성취도 평가 결과(2016. 9.)

이 연구는 우리나라 학생들의 교과별 학업성취의 추이를 파악함으로써 교육과정의 교육목표 도달 정도와 함께 교육과정 개선을 위한 기초 자료를 제공하고, 학업성취도와 교육맥락변인의 관련성을 분석하여 학업성취에 영향을 주는 원인을 탐색하고 학생, 교사, 학교의 구성 요인 관계를 파악하는 것을 목적으로 한다.

• 수학 친숙도 분석 결과에 근거한 수학 학습 기회 형평성 제고 방안(2016. 10.)

이 연구는 OECD PISA 2012 결과 심층보고서 「방정식과 불평등」에서 논의된 학습 기회와 불평등에 대한 연구를 바탕으로 우리나라 학생들의 수학 친숙도 향상을 통한 학습 기회 형평성 제고 방안에 대해 탐색하였다.

또한, 우리나라 학생들의 수학 친숙도 향상을 위한 수학 학습 공동체 활동 지원, 학습 부진아 지도를 통한 기회 형평성 강화, 방과 후 수업활동을 활용한 수학친숙도 향상, 수학 교육과정 재구성 방향 탐색을 제안하였다.

• 2015 개정 교육과정에 따른 초 · 중등학교 교육과정 편성 · 운영 방안(2016. 12.)

이 연구는 2015년 9월에 고시된 2015 개정 교육과정이 초 · 중 · 고등학교에서 실효성있게 적용되기 위한 교육과정 편성 · 운영 방안을 마련하는 것을 목적으로 한다. 이에 이 연구에서는 2015 개정 교육과정에 대한 학교 현장 및 시 · 도 교육청의 인식 및 요구 사항을 파악하여 학교 급별 핵심 쟁점을 추출하고 그것에 대한 방안을 학교 급별로 제시하였다.

• 일반고 학습부진 학생 교수학습 지원 방안 Ⅰ: 수학, 영어 교과를 중심으로(2016. 12.)

이 연구는 일반고 학습부진학생의 부진의 원인을 탐색하고 교수학습 지원에 대한 요구를 분석함으로써 이들을 위한 교수학습 지원 방안을 제안하는 것을 목적으로 한다. 이 연구에서는 학습부진학생들이 어려움을 겪는 교과 중에서 수학, 영어 교과를 중심으로 학습부진의 실태, 원인 및 가능성 탐색, 지원에 대한 요구를 분석하였다.

• 2016년 국가 수준 학업성취도 평가 결과: 고등학교 학업성취도 변화 추이(2017. 7.)

이 연구는 2016년 학업성취도 평가 결과를 토대로 학업성취도와 이와 관련된 교육 맥락 변인들의 현황에 대해 다루고 있다. 특히 학생의 학교생활 및 학습과 관련된 정의적 특성들을 측정한 다양한 지표를 분석에 포함하고 있으며, 정의적 특성에 따른 성취수준 분포 현황을 제시하고 있다.

VI 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

여기서는 교육부에서 고시한 「수학과 교육과정(2015)」[17]과 한국과학창의재단의 「2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ」[18]에 제시된 내용을 참고하여 2015 개정 교육과정에 대해 자세히 살펴보기로 한다.

1 교육과정 개정의 필요성

교육과정은 학교 교육을 담아내는 그릇에 비유할 수 있다. 교육부는 인문학적 상상력과 과학 기술 창조력을 갖춘 창의 · 융합형 인재를 길러내기 위한 교육 개혁의 일환으로 교육과정 개정을 추진하였다. 2015 개정 교육과정은 미래 사회가 요구하는 핵심 역량(core competency)을 구현하고, 배움을 즐기는 행복 교육이 가능하도록 학습 내용을 적정화하며, 교수 · 학습 및 평가 방법을 개선하여 교실 수업을 혁신하고자 하였다. 수학과 교육과정은 학교 수학 교육의 전반을 결정하는 핵심적인 계획서로, 다음과 같은 다섯 가지 측면에서 개정 연구의 필요성을 정리할 수 있다.

가. 창의 · 융합형 인재의 양성

기존의 지식 암기식 수업과 정답 위주의 문제 풀이 학습으로는 추격형 모방 경제에 적합한 인간을 양산할 수밖에 없다는 지적이 제기되어 왔다. 이에 2015 개정 수학과 교육과정은 선도형 창조 경제를 이끌 수 있도록 창의 · 융합형 인재를 양성하는 것이 기본 방향이 되어야 한다.

나. 핵심 역량의 강조

2015 개정 교육과정은 총론 차원에서 여섯 가지 핵심 역량을 규정하였다.

첫째, '자기관리 역량'은 자아 정체성과 자신감을 가지고 자신의 삶과 진로에 필요한 기초적 능력과 자질을 갖추어 자기 주도적으로 살아갈 수 있는 능력을 말한다.

둘째, '지식정보 처리 역량'은 문제를 합리적으로 해결하기 위해 다양한 영역의 지식과 정보를 처리하고 활용할 수 있는 능력을 말한다.

셋째, '창의적 사고 역량'은 폭넓은 기초 지식을 바탕으로 다양한 전문 분야의 지식, 기술, 경험을 융합적으로 활용하여 새로운 것을 창출하는 능력을 말한다.

넷째, '심미적 감성 역량'은 인간에 대한 공감적 이해와 문화적 감수성을 바탕으로 삶의 의미와 가치를 발견하고 향유하는 능력을 말한다.

다섯째, '의사소통 역량'은 다양한 상황에서 자신의 생각과 감정을 효과적으로 표현하고 다른 사람의 의견을 경청하고 존중하는 능력을 말한다.

여섯째, '공동체 역량'은 지역 · 국가 · 세계 공동체의 구성원에게 요구되는 가치와 태도를 가지고 공동체 발전에 적극적으로 참여하는 능력을 말한다.

이러한 여섯 가지 핵심 역량에 기반하여 다음과 같이 수학과에 관련된 여섯 가지 교과 역량을 선정하였으며, 학생들에게 이러한 역량을 함양시킬 수 있는 방식으로 수학 교육과정을 개정할 필요가 있다.

문제 해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천

[17] 교육부, 「교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정」, 2015

[18] 한국과학창의재단, 「2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ」, 2015

다. 학습량의 적정화

2015 개정 교육과정은 기본적으로 많이 가르치는 교육에서 배움을 즐기는 교육으로 패러다임의 변화를 추구한다. 문제 풀이를 위주로 하는 경쟁적인 분위기의 수업에서 벗어나 학생들이 학습에 흥미를 갖고 꿈과 끼를 키우는 행복 교육으로 전환하기 위해서는 교육과정의 학습량을 적정화하는 것이 전제될 필요가 있다.

라. 문 · 이과 통합과 다양한 선택의 가능성 확보

제6차 고등학교 교육과정까지는 문과와 이과로 이원화하였으나 제7차 교육과정부터는 문 · 이과 구분이 철폐되었다. 그러나 교육과정 운영의 관습과 수능 등 대입 전형의 필요에 의하여 계열을 구분하여 운영해 왔다. 2015 개정 교육과정에서는 문 · 이과 칸막이를 철폐하고 모든 학생의 전인적 성장을 위해 인문 · 사회 · 과학 기술에 대한 소양을 균형 있게 함양할 수 있도록 하는 것을 목표로 한다. 이를 위해 공통 과목을 이수하고, 이를 바탕으로 학생의 희망과 적성을 고려해 진로에 따른 다양한 선택 과목을 이수하도록 하였다.

마. 수학 교육의 국제적인 동향 반영

수학 · 과학 성취도 변화 추이 국제 비교 연구 결과(TIMSS)에서 우리나라 학생들의 정의적 성취가 지극히 낮게 나타난 결과를 심각하게 반추할 필요가 있다. 정의적인 성취는 학습에 적극적으로 참여하고 학습을 지속, 유지하는 동력이 되기 때문에 매우 중요하며, 수학에 대한 적극적이고 긍정적인 태도는 수학이 필요한 상황에서 학생들이 축적하고 있는 인지적인 수학적 지식을 활용하기 위해 필수적인 요소이다. 이처럼 수학에 있어서의 인지적 영역과 정의적 영역은 상호 상승 효과를 발휘할 수 있기 때문에 정의적 성취를 높일 수 있는 방향으로 수학과 교육과정을 개정할 필요성이 강하게 대두된다.

2 교육과정 개정의 방향

2015 개정 교육과정 총론의 비전은 창의 · 융합형 인재를 양성하는 것으로, 대표적인 개정의 방향은 인문학적 상상력과 과학 기술 창조력을 갖춘 균형 잡힌 인재의 양성이다. 2015 개정 수학과 교육과정은 교육과정 총론이 추구하는 방향성을 반영하고, 수학과 교육과정의 국제적 동향을 반영하는 한편 2014년에 이루어진「문 · 이과 통합형 수학과 교육과정 재구조화 연구」[19]를 이어받아 개정의 방향을 '수학 교과 역량의 구현', '학습 부담 경감 추구', '학습자의 정의적 측면 강조', '실생활 중심의 통계 내용 재구성', '공학적 도구의 활용 강조'의 다섯 가지로 선정하였다.

가. 수학 교과 역량의 구현

2015 개정 교육과정의 가장 주목할 만한 특징은 핵심 역량의 강조이다. 교육과정 총론 차원의 핵심 역량으로 '자기관리 역량', '지식정보 처리 역량', '창의적 사고 역량', '심미적 감성 역량', '의사소통 역량', '공동체 역량'의 6가지를 도출하였고, 각 교과에서는 이를 교과의 관점에서 특화시킨 교과 역량을 도출하였다. 수학과의 경우 2009 개정 교육과정에 명시된 '문제 해결', '추론', '의사소통'의 세 가지 수학적 과정에 '창의 · 융합', '정보 처리 ', '태도 및 실천'의 세 가지를 추가하여 수학 교과 역량을 여섯 가지로 규정하였다.

나. 학습 부담 경감 추구

최근 수학포기자(수포자)가 전국적인 관심을 받는 사회 문제로 대두되고 수학을 포기하게 만드는 중요한 요인 중의 하나가 어려운 수학이라는 인식이 확산되었다. 난해한 수학이 사교육의 진원지라고 보는 일반 여론은 수학 내용 경감을 강하게 요구해 왔다. 한편, '제2차 수학 교육 종합계획'에서 배움을 즐기는 수

[19] 교육부,「문 · 이과 통합형 수학과 교육과정 재구조화 연구」, 2014

학 교육이 중요한 지향점으로 등장한 것도 수학 학습 부담을 줄이는 기제로 작용하고 있다. 이러한 연장선에서 'less is more', 즉 적은 내용을 충실히 배우는 것이 더 많이 배우는 것이라는 역설적인 구호가 수학 교육에서도 설득력을 얻고 있다. 실제 수학과 교육과정 변천사를 되돌아보면 수학 학습 부담 경감은 제4차 교육과정부터 최근 교육과정에 이르기까지 매번 개정의 방향으로 등장해 왔지만 2015 개정 교육과정에서는 더욱 부각되고 있다.

수학 교수 · 학습을 통해 교과 역량을 신장시키기 위해서는 탐구 활동을 강조하고 다양한 해결 방안을 모색하는 한편 실생활과 연계시키면서 수학의 유용성을 인식하는 것이 필수적이다. 이를 위해서는 여유 시간이 확보되어야 하기 때문에 기존의 내용에서 일부를 감축하여 양과 수준을 적정화를 할 필요가 있다는 점에 대해서 어느 정도 공감대가 형성되어 있다. 그렇지만 우리의 미래를 이끌어 나갈 인적 자원의 수학 능력 역시 매우 중요하므로, 학습 부담 경감을 내용 경감만으로 해석하기보다는 평가 문항의 난이도를 조정하는 장치를 두는 것과 같이 보다 실질적인 방안을 숙고할 필요가 있다.

다. 학습자의 정의적 측면 강조

PISA와 TIMSS와 같은 일련의 학업성취도 국제 비교 연구 결과 우리나라 학생들이 인지적 측면에서는 최상위권이지만 정의적 측면에서는 최하위권이라는 점에 대해서 지속적으로 문제가 제기되어 왔다.

이에 인지적 측면과 정의적 측면의 심각한 불균형을 해소하는 것이 수학 교육 최대의 과제 중의 하나로 인식되고 있다. 특히, 학생들의 꿈과 끼를 키워 주는 행복 교육의 실현을 위해서도 학교 수학 교육에서 인지적 측면뿐만 아니라 정의적 측면에 대한 관심과 배려가 강화될 필요가 있다. 수학에 대한 긍정적인 인식을 강화시키기 위해서는 수학 학습에서의 성공 경험이 중요한데, 성공 경험이란 반드시 높은 점수를 의미하는 것이 아니라, 수학 학습 과정에서 작은 성공을 경험함으로써 수학에 대한 열패감을 극복하고 자신감을 회복하는 것을 의미한다. 이와 더불어 수학과 교육과정은 학생들의 흥미, 가치, 인성, 의지, 즐거움, 성공 경험 등을 종합적으로 함양하는 것이 필요하다.

라. 실생활 중심의 통계 내용 재구성

학업성취도 국제 비교 연구 결과, 우리나라 학생들은 수학 내용 영역 중에서 확률과 통계에 대한 소양이 상대적으로 낮은 것으로 나타났는데, 이는 우리나라의 확률과 통계 교육과정을 점검하고 교수 · 학습 방법을 개선할 필요가 있음을 시사한다. 한편, 기존 교육과정의 통계 내용이 주어진 자료의 수동적인 처리에 머무는 경향이 있음에 대한 비판이 제기되어 왔음을 고려할 때 실생활 맥락의 통계 교육으로 패러다임을 전환할 필요가 있다. 실제 확률과 통계는 교과서에 갇힌 생명력을 잃은 지식이 아니라 교과서 밖으로 나와 일상과 유기적으로 연계되기에 가장 적합한 학교 수학의 주제이므로, 현실 세계의 자료를 대상으로 수집, 정리, 분석, 해석 등 일련의 과정이 다루어지도록 할 필요가 있다.

마. 공학적 도구의 활용 강조

우리나라 수학 수업의 고질적인 문제 중의 하나는 수학 내용을 성급하게 형식화, 기호화하는 것이다. 이를 보완하는 방안 중의 하나가 공학적 도구를 교수 · 학습에 적극적으로 활용하는 것이다. 공학적 도구의 이용은 여러 면에서 장점을 갖는다.

첫째, 공학적 도구를 이용하여 추상적인 수학 내용을 시각화하는 것은 학습자가 수학의 개념, 원리, 법칙을 구체화하여 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

둘째, 복잡한 계산이나 대수적인 문자식의 처리가 문제 해결의 본질적인 부분이 아닐 때, 계산기나 컴퓨터를 활용해 이를 신속하게 대행하게 함으로써 사고력 중심의 교수 · 학습 활동에 전념할 수 있다. 또한, 컴퓨터 프로그래밍 활동은 절차적 사고를 강조하고, 학생들의 수학적 사고를 신장시키는 데 활용될 수 있다.

셋째, 활동 중심의 수학 교육 이론들이 주장하는 수학 교육 학습 원리를 구현하는 데에 도움을 줄 수 있다. 예를 들어 딘즈(Dienes, Z. P., 1916~2014)의 '지각적 다양성의 원리'나 '역동성의 원리'의 구현에 공학적 도구가 활용될 수 있다. 또한, 가상현실을 이용한 현실적 문맥을 강조하는 '현실적 수학 교육(RME)' 이론과도 연결할 수 있다.

넷째, 공학적 도구는 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래프, 애니메이션, 동영상, 시뮬레이션 등을 통한 직관적인 탐구 활동을 제공해 줄 수 있다. 공학적 도구의 시각적인 기능을 활용하면 증명 이전에 연역해야 할 사실에 대한 직관적 이해 또는 관찰에 의한 발견의 과정을 제공할 수 있다.

3 〈수학〉의 내용 선정 방향과 내용 체계

가. 내용 선정 방향

〈수학〉은 고등학교에서 자신의 진로와 적성에 부합된 수학과목을 선택하기 이전에 학습하는 기초 교과목의 성격을 지니고 있다. 이에 따라 문 · 이과 통합의 정신에 부합하고, 기초 교과목으로서의 역할을 충실히 수행하기 위해 모든 학생들이 필수적으로 학습해야 하는 기본적인 소양을 중심으로 재구성하였다. 또, 중학교에서의 내용 영역이 '수와 연산', '문자와 식', '함수', '기하', '확률과 통계'임을 감안하여, 공통 과목 〈수학〉의 내용 영역도 이와 동일하게 설정하였다. 구체적으로 공통 과목 〈수학〉의 내용 구성을 보면, '문자와 식' 영역은 다항식, 방정식과 부등식, '기하' 영역은 도형의 방정식, '수와 연산' 영역은 집합, 명제, '함수' 영역은 함수, 유리함수와 무리함수, '확률과 통계' 영역은 경우의 수, 순열과 조합으로 구성하였다. 공통 과목 〈수학〉을 이수한 학생은 자신의 필요에 따라 일반 선택 과목이나 진로 선택 과목을 자유롭게 선택하여 이수할 수 있다.

또한, 〈수학〉의 학습내용의 단위수 조정에 따라 학습 내용도 재구조화 하였다. 2009 개정 수학과 교육과정의 〈수학 Ⅰ〉과 〈수학 Ⅱ〉를 통합하여 한 교과목으로 하였고, 학습내용에서도 수열, 지수와 로그를 〈수학〉을 이수한 이후에 학습할 수 있도록 다른 과목으로 이동하였다. 학생들의 학습 부담을 줄이기 위해 내용 요소를 일부 감축하였다. '나머지정리', '인수정리', '이차방정식'에서 근과 계수의 관계는 기본적인 개념만 다루도록 하였고, '연립이차부등식'은 부분적으로 삭제하였으며, '미지수가 3개인 연립일차방정식'과 '부등식의 영역'은 전체 학습내용을 삭제하였다.

나. 내용 체계

영역	핵심 개념	내용	내용 요소	기능
문자와 식	다항식	식에 대한 사칙연산과 인수분해는 복잡한 다항식에서도 확장하여 적용된다.	• 다항식의 연산 • 나머지정리 • 인수분해	계산하기 이해하기 문제 해결하기 설명하기
	방정식과 부등식	다항식의 연산 규칙을 적용시킬 수 있고, 방정식과 부등식이 참이 되게 하는 해가 존재한다.	• 복소수와 이차방정식 • 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식과 부등식	
기하	도형의 방정식	좌표평면에 나타낸 점, 직선, 원과 같은 도형은 대수적으로 표현된다.	• 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식 • 도형의 이동	계산하기 이해하기 설명하기 판별하기

수와 연산	집합과 명제	집합은 수학적 대상을 논리적으로 표현하고 이해하는 도구이며, 명제는 증명을 통해 그 타당성이 입증된다.	• 집합 • 명제	설명하기 표현하기 이해하기 증명하기 구별하기
함수	함수와 그래프	함수는 대수적 조작이 가능하며, 함수의 그래프를 통해 시각적으로 표현된다.	• 함수 • 유리함수와 무리함수	그래프 그리기 이해하기 함수 구하기 계산하기 표현하기
확률과 통계	경우의 수	다양한 상황과 맥락에서 경우의 수를 구하는 체계적인 방법이 있다.	• 경우의 수 • 순열과 조합	경우의 수 세기 계산하기 문제 해결하기

4 교육과정의 주요 내용

가. 수학과의 성격

수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다. 수학은 오랜 역사를 통해 인류 문명 발전의 원동력이 되어 왔으며, 세계화 · 정보화가 가속화되는 미래 사회의 구성원에게 필수적인 역량을 제공한다. 수학 학습을 통해 학생들은 수학의 규칙성과 구조의 아름다움을 음미할 수 있고, 수학의 지식과 기능을 활용하여 수학 문제뿐만 아니라 실생활과 다른 교과의 문제를 창의적으로 해결할 수 있으며, 나아가 세계 공동체의 시민으로서 갖추어야 할 합리적 의사 결정 능력과 민주적 소통 능력을 함양할 수 있다.

고등학교 공통 과목인 〈수학〉은 중학교 3학년까지의 수학을 학습한 후, 고등학교의 모든 학생들이 필수적으로 이수하는 과목이다. 〈수학〉의 내용은 초등학교 및 중학교 수학과 연계하여 '문자와 식', '기하', '수와 연산', '함수', '확률과 통계'의 5개 영역으로 구성된다. '문자와 식' 영역에서는 다항식의 사칙연산, 나머지정리, 인수분해, 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식과 부등식을, '기하' 영역에서는 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동을, '수와 연산' 영역에서는 집합, 명제를, '함수' 영역에서는 함수의 뜻과 유형, 유리함수와 무리함수를, '확률과 통계' 영역에서는 경우의 수, 순열과 조합을 다룬다.

〈수학〉에서 학습한 수학의 지식과 기능은 자신의 진로와 적성을 고려하여 선택할 수 있는 수학 일반 선택 과목과 진로 선택 과목, 수학 전문 교과 과목을 학습하기 위한 토대가 되고, 자연과학, 공학, 의학뿐만 아니라 경제 · 경영학을 포함한 사회과학, 인문학, 예술 및 체육 분야를 학습하는 데 기초가 되며, 나아가 창의적 역량을 갖춘 융합 인재로 성장할 수 있는 기반을 제공한다. 이를 위해 학생들은 〈수학〉의 지식을 이해하고 기능을 습득하는 것과 더불어 문제 해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다.

교과 역량으로서의 문제 해결은 해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력이고, 추론은 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력이다. 창의 · 융합은 수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학

적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결 · 융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력이다. 의사소통은 수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제 해결 과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력이고, 정보 처리는 다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력이다. 끝으로, 태도 및 실천은 수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력이다.

수학 교과 역량 함양을 통해 학생들은 복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고 개인의 잠재력과 재능을 발현할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 이해하고 수학 학습의 즐거움을 느끼며, 수학에 대한 흥미와 자신감을 기를 수 있다.

나. 수학과의 목표

수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하며 수학적으로 추론하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변과 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

1) 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다.
2) 수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결한다.
3) 수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 가치를 인식하며 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

다. 성취기준

학생들이 교과를 통해 배워야 할 내용과 이를 통해 수업 후, 할 수 있거나 할 수 있기를 기대하는 능력을 결합하여 나타낸 수업 활동의 기준이다.

1) 문자와 식

문자를 포함한 식의 사칙연산과 인수분해는 복잡한 다항식으로 확장되어 적용되고, 방정식과 부등식은 적절한 절차에 따라 이를 만족시키는 해를 구할 수 있다. 다항식의 연산 및 방정식과 부등식은 수학의 여러 분야 학습의 기초가 되고 문제를 해결하는 중요한 도구가 된다.

1 다항식의 연산

[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.

2 나머지정리

[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.

[10수학01-03] 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

3 인수분해

[10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.

4 복소수와 이차방정식

[10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙연산을 할 수 있다.

[10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.

[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

[10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.

5 이차방정식과 이차함수

[10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.

[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.

[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

6 여러 가지 방정식과 부등식

[10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

[10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

[10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다.

[10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

[10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.

(가) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

- 조립제법은 다항식을 단항식으로 나누는 연산과 연계하여 지도하고, 구체적인 예를 통하여 그 방법을 간단히 다룬다.
- 다항식의 인수분해는 다음의 경우를 다룬다.

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \qquad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

- 다항식의 곱셈과 인수분해는 중학교에서 학습한 내용을 토대로 고등학교에서 추가된 내용을 이해하게 한다.
- 방정식은 계수가 실수인 경우만 다룬다.
- 이차함수의 최댓값과 최솟값은 실수 전체의 범위뿐만 아니라, 제한된 범위($a\leq x\leq b$)에서도 구하게 한다.
- 미지수가 2개인 연립이차방정식은 일차식과 이차식이 각각 한 개씩 주어진 경우, 두 이차식 중 한 이차식이 간단히 인수분해 되는 경우만 다룬다.
- 방정식과 부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 경험을 통해 수학의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
- 연립부등식은 중학교에서 학습한 연립일차방정식 내용을 토대로 이해하게 하고, $A<B<C$와 같은 형태의 연립일차부등식도 다룰 수 있다.
- ‘삼차방정식’, ‘사차방정식’, ‘연립이차방정식’, ‘연립일차부등식’, ‘이차부등식’, ‘연립이차부등식’ 용어는 교수 · 학습 상황에서 사용할 수 있다.

(나) 평가 방법 및 유의 사항

- 복잡한 인수분해 문제는 다루지 않는다.
- 항등식의 성질, 나머지정리와 인수정리를 활용하는 복잡한 문제는 다루지 않는다.
- 판별식을 활용하는 복잡한 방정식과 부등식 문제는 다루지 않는다.
- 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하는 복잡한 문제는 다루지 않는다.

2) 기하

좌표평면에 나타낸 점, 직선, 원과 같은 도형은 대수적으로 표현된다. 도형의 방정식은 기하적 대상을 방정식으로 나타내어 기하와 대수의 연결성을 경험할 수 있게 하고, 도형을 새로운 관점에서 다루어 봄으로써 직관적인 사고에서 논리적이고 창의적인 사고로 발전시키는 데 도움이 된다.

1 평면좌표

[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

[10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

2 직선의 방정식

[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.

[10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.

[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

3 원의 방정식

[10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.

[10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

4 도형의 이동

[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.

[10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.

(가) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

- 직선의 방정식과 원의 방정식은 중학교에서 학습한 내용과 연계하여 다룬다.
- 도형의 방정식 학습을 통해 기하와 대수의 연결성을 이해할 수 있도록 다양한 교수 · 학습 경험을 제공한다.
- 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동을 다룰 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
- 도형의 이동을 다양한 상황에 적용해 보는 활동을 통해 그 유용성과 가치를 인식하게 할 수 있다.
- 좌표축의 평행이동은 다루지 않는다.
- '내분점', '외분점', '원의 방정식' 용어는 교수 · 학습 상황에서 사용할 수 있다.

(나) 평가 방법 및 유의 사항

- 도형의 방정식은 도형을 좌표평면에서 다룰 수 있음을 이해하는 수준에서 다루고, 계산이 복잡한 문제는 다루지 않는다.
- 기하 영역의 주요 개념에 대한 이해를 평가할 때에는 과정 중심 평가를 할 수 있다.

3) 수와 연산

집합은 수학적 대상을 논리적으로 표현하고 이해하는 도구이며, 명제는 증명을 통해 그 타당성이 입증된다. 집합과 명제의 학습을 통해 수학적인 식이나 문장을 이해하고 논리적으로 추론하는 능력을 기를 수 있다.

1 집합

[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

[10수학03-02] 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.

[10수학03-03] 집합의 연산을 할 수 있다.

2 명제

[10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다.

[10수학03-05] 명제의 역과 대우를 이해한다.

[10수학03-06] 충분조건과 필요조건을 이해하고 구별할 수 있다.

[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.

[10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

(가) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

- 집합의 연산법칙은 벤 다이어그램으로 확인하는 정도로 간단히 다룬다.
- '모든', '어떤'을 포함하고 있는 명제는 구체적인 상황을 이용하여 도입할 수 있다.
- 명제와 조건의 뜻은 수학적인 문장을 이해하는 수준에서 간단히 다룬다.
- 명제의 증명은 간단한 것만 다룬다.
- 충분조건, 필요조건, 필요충분조건은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
- 증명을 지도할 때는 직관적인 이해로부터 시작하여 점진적으로 형식화하게 한다.
- 대우를 이용한 증명법과 귀류법은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
- 수학의 여러 내용 영역과 연계하여 집합과 명제의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
- '원소나열법', '조건제시법', '유한집합', '무한집합', '서로 같다' 용어는 교수 · 학습 상황에서 사용할 수 있다.

(나) 평가 방법 및 유의 사항

- 집합의 개념이나 집합의 포함관계는 개념을 이해하는 수준에서 간단히 평가한다.
- 증명 능력을 평가할 때에는 과정 중심 평가를 할 수 있다.

4) 함수

여러 가지 변화 현상을 포함한 다양한 대응 관계를 표현하는 함수는 대수적 조작이 가능하며, 함수의 그래프를 통해 시각적으로 표현된다. 함수는 여러 가지 현상에서 대상 간의 연관성이나 종속성을 해석하고 예측하는 수단이 되고, 다양한 변화 현상에서의 수학적 관계를 이해하고 표현함으로써 여러 가지 문제를 해결하는 데 도움이 된다.

1 함수

[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.

[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.

[10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.

2 유리함수와 무리함수

[10수학04-04] 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

[10수학04-05] 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

(가) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

- 함수의 개념은 중학교에서 학습한 내용을 확장하여 주어진 두 집합 사이의 대응 관계를 통해 이해하게 한다.
- 함수의 그래프를 다룰 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
- 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 일대일함수, 합성함수, 역함수의 의미는 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
- 유리식, 무리식은 유리함수, 무리함수의 의미를 이해할 수 있을 정도로 간단히 다룬다.
- 대응으로 정의된 함수의 예를 찾아보는 활동을 통해 함수의 유용성을 인식하게 한다.

(나) 평가 방법 및 유의 사항

- 함수의 그래프와 그 성질에 대한 이해를 평가할 때 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

• 유리함수와 무리함수는 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 및 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 기본적인 형태를 중심으로 간단한 문제만 다룬다.

5) 확률과 통계

다양한 상황과 맥락에서 경우의 수를 구하는 체계적인 방법이 존재한다. 경우의 수를 세는 방법은 사건이 일어날 수 있는 모든 경우를 분류하고 체계화하는 수학적 사고를 경험하게 하고, 합리적인 의사 결정의 중요한 도구가 된다.

1 경우의 수

[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

2 순열과 조합

[10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다.

[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.

(가) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

• 합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 그 의미를 이해하고, 두 가지 법칙이 적용되는 상황의 차이점을 설명하게 할 수 있다.
• 순열의 수와 조합의 수는 간단한 경우를 예로 제시하여 직접 나열하거나 수형도를 이용하는 등 다양한 방법으로 구하게 하고, 이를 통해 일반적으로 구하는 방법을 이해하게 한다.
• 실생활 문제를 해결해 봄으로써 다양한 상황에서 순열과 조합의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

(나) 평가 방법 및 유의 사항

• 경우의 수, 순열과 조합과 관련하여 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

5 교수 · 학습 및 평가의 방향

가. 교수 · 학습 방향

1) 교수 · 학습 원칙

(가) 수학과의 교수 · 학습은 학생이 수학과 교육과정에 제시된 목표를 달성하고 전인적으로 성장하도록 돕는 것을 목적으로 한다.

(나) 수학과의 교수 · 학습은 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수하고, 교육과정에 제시된 목표, 내용, 평가와 일관성을 가져야 한다.

(다) 문제 해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천과 같은 수학 교과 역량을 함양하기 위한 교육 환경을 조성하고, 이에 적합한 교수 · 학습을 운영한다.

(라) 과목별 내용의 배열 순서가 반드시 교수 · 학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수 · 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건, 학생의 수준 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.

(마) 교육과정에 제시된 내용을 지도한 후, 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학습, 우수 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.

2) 교수 · 학습 방법

(가) 수학과의 수업은 학생의 능력과 수준 등을 고려하여 설명식 교수, 탐구 학습, 프로젝트 학습, 토의 · 토론 학습, 협력 학습, 매체 및 도구 활용 학습 등을 적절히 선택하여 적용한다.

① 설명식 교수는 교사가 설명과 시연을 통해 수업을 주도하는 교수 · 학습 방법으로, 수업 내용을 구조화하여 체계적으로 지도하는 데 효과적이다. 이때 교사는 학생의 적극적인 수업 참여를 유도하고, 사고를 촉진하는 발문을 적절히 활용한다.

② 탐구 학습은 학생이 중심이 되어 수학 개념, 원리, 법칙을 발견하고 구성하는 교수 · 학습 방법으로, 학생 스스로 자료와 정보로부터 지식을 도출하거나 지식의 타당성을 확인하는 능력을 기를 수 있게 한다.

③ 프로젝트 학습은 특정 주제나 과제를 탐구하기 위해 계획을 수립하고 수행하여 결과물을 산출하거나 발표하는 교수 · 학습 방법으로, 개인별 또는 집단별로 실시할 수 있다.

④ 토의 · 토론 학습은 특정 주제에 대해 협의하거나 논의하는 교수 · 학습 방법으로, 의사소통이 지니는 상호 협력적인 면을 강조한다. 이를 통해 학생들이 교과 내용을 폭넓게 이해하고 논리적이고 비판적으로 추론하며 다른 사람의 의견을 비판적으로 수용하고 자신의 주장을 효과적으로 표현하는 능력을 기를 수 있게 한다.

⑤ 협력 학습은 모둠 내의 상호 작용, 의사소통, 참여를 통해 공동의 학습 목표에 도달하도록 하는 교수 · 학습 방법으로, 다른 사람을 존중하고 배려하며 모둠 내의 역할을 이해하고 책임감을 기를 수 있게 한다.

⑥ 매체 및 도구 활용 학습은 학생의 수준과 학습 내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고 학습의 효율성과 다양성을 도모하는 교수 · 학습 방법으로, 시청각 자료, 멀티미디어나 인터넷 등의 컴퓨터 활용 매체와 교구, 계산기, 교육용 소프트웨어 등의 도구를 이용한다.

(나) 문제 해결 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 문제를 해결할 때에는 문제를 이해하고 해결 전략을 탐색하며 해결 과정을 실행하고 검증 및 반성하는 단계를 거치도록 한다.

② 협력적 문제 해결 과제에서는 균형 있는 책임 분담과 상호 작용을 통해 동료들과 협력하여 문제를 해결하게 한다.

③ 수학적 모델링 능력을 신장하기 위해 생활 주변이나 사회 및 자연 현상 등 다양한 맥락에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 이를 일반화하게 한다.

④ 문제 해결력을 높이기 위해 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하고 그 과정을 검증하는 문제 만들기 활동을 장려한다.

(다) 추론 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 사용하여 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 이를 정당화할 수 있게 한다.

② 수학의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 과정과 수학적 절차를 논리적으로 수행하게 한다.

③ 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 반성하도록 한다.

(라) 창의 · 융합 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출할 수 있는 수학적 과제를 제공하여 학생의 창의적 사고를 촉진시킨다.

② 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결하게 하고, 해결 방법을 비교하여 더 효율적인 방법을 찾거나 정교화하게 한다.

③ 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 수학과 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 연결 · 융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하게 한다.

(마) 의사소통 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확하게 사용하며, 수학적 표현을 만들거나 변환하는 활동을 하게 한다.

② 수학적 아이디어 또는 수학 학습 과정과 결과를 말, 글, 그림, 기호, 표, 그래프 등을 사용하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있게 한다.

③ 다양한 관점을 존중하면서 다른 사람의 생각을 이해하고 수학적 아이디어를 표현하며 토론하게 한다.

(바) 정보 처리 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 실생활 및 수학적 문제 상황에서 적절한 자료를 탐색하여 수집하고, 목적에 맞게 정리, 분석, 평가하며, 분석한 정보를 문제 상황에 적합하게 활용할 수 있게 한다.

② 교수 · 학습 과정에서 적절한 교구를 활용한 조작 및 탐구 활동을 통해 수학의 개념과 원리를 이해하도록 한다.

③ 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수 · 학습 상황에서의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용할 수 있게 한다.

(사) 태도 및 실천 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 수학을 생활 주변과 사회 및 자연 현상과 관련지어 지도하여 수학의 필요성과 유용성을 알게 하고, 수학의 역할과 가치를 인식할 수 있게 한다.

② 수학에 대한 관심과 흥미, 호기심과 자신감을 갖고 수학 학습에 적극적으로 참여하게 하며, 끈기 있게 도전하도록 격려하고 학습 동기와 의욕을 유발한다.

③ 학생 스스로 목표를 설정하고 학습을 수행하며 학습 결과를 평가하는 자주적 학습 습관과 태도를 갖게 한다.

④ 수학적 활동을 통하여 정직하고 공정하며 책임감 있게 행동하고 어려움을 극복하기 위해 도전하는 용기 있는 태도, 타인을 배려하고 존중하며 협력하는 태도, 논리적 근거를 토대로 의견을 제시하고 합리적으로 의사 결정하는 태도를 갖고 이를 실천하게 한다.

(아) 의미 있는 발문을 하기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

① 학생의 사고를 촉진하는 다양한 발문을 통해 상호 작용이 활발한 교실 환경을 구축하고 학생의 능동적 수업 참여를 독려한다.

② 학생의 인지 발달과 경험을 고려하여 발문을 하고, 발문에 대한 학생의 반응을 의미 있게 처리한다.

(자) 개인차를 고려하여 수준별 수업을 운영할 때에는 다음 사항에 유의한다.

① 학습 목표를 효과적으로 달성하기 위해 교실 내에서 개인차를 고려한 소집단을 구성하거나 수준별 학급을 구성하여 교수 · 학습을 전개한다.

② 수준별 수업을 위해 집단을 편성할 때에는 학생 개인의 능력과 수준, 적성과 희망, 교사 수급과 유휴 교실 등의 학교 상황을 고려한다.

③ 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 진행한다.

나. 평가 방향

1) 평가 원칙

(가) 수학과의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 수집 · 활용하여 학생의 수학 학습과 전인적 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 것을 목적으로 한다.

(나) 수학과의 평가는 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수하고, 교육과정에 제시된 목표, 내용, 교수 · 학습과 일관성을 가져야 한다.

(다) 수학과의 평가에서는 수학의 개념, 원리, 법칙, 기능뿐만 아니라 문제 해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천과 같은 수학 교과 역량을 균형 있게 평가한다.

(라) 수학과의 평가는 학습자의 수준을 고려하고 평가 목적과 내용에 따라 다양한 평가 방법을 활용한다.

(마) 평가 결과는 학생, 학부모, 교사 등에게 환류하여 학생의 수학 학습 개선을 도울 수 있게 한다.

2) 평가 방법

(가) 수학과의 평가는 학습 결과 평가뿐만 아니라 과정 중심 평가도 실시하여 종합적인 수학 학습 평가가 될 수 있게 한다.

(나) 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가를 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통해 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

(다) 학생의 수학 학습 과정과 결과는 지필 평가, 프로젝트 평가, 포트폴리오 평가, 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가, 동료 평가 등의 다양한 평가 방법을 사용하여 양적 또는 질적으로 평가한다.

① 지필 평가는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력과 문제 해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통 능력 등을 평가하는 데 활용할 수 있고, 선택형, 단답형, 서 · 논술형 등의 다양한 문항 형태를 활용한다.

② 프로젝트 평가는 수학 학습을 토대로 특정한 주제나 과제에 대해서 자료를 수집하고 분석, 종합, 해결하는 과정과 결과를 평가하는 방법으로, 문제 해결, 창의 · 융합, 정보 처리 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

③ 포트폴리오 평가는 일정 기간 동안 수학 학습 수행과 그 결과물을 평가하는 방법으로, 학생의 학습 내용 이해와 수학 교과 역량을 종합적으로 판단하고 학생의 성장에 대한 정보를 얻는 데 활용할 수 있다.

④ 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가는 학생 개인 및 소집단을 관찰, 학생과의 대화, 학생의 발표를 통해 학생의 이해 정도와 사고 방법, 수행 과정 등을 평가하는 방법으로, 의사소통, 태도 및 실천 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

⑤ 자기 평가는 학생 스스로 자신의 이해와 수행을 평가하는 방법으로, 문제 해결과 추론 과정의 반성, 자신의 생각 표현, 태도 및 실천 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

⑥ 동료 평가는 동료 학생들이 상대방을 서로 평가하는 방법으로, 협력 학습 상황에서 학생 개개인의 역할 수행 정도나 집단 활동에 기여한 정도를 평가할 때 활용할 수 있다.

(라) 평가 내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다.

Ⅶ 교과서와 지도서의 개발 방향과 활용법

1 교과서의 편찬 방향과 구성 체계

2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 근거한 이 교과서의 개발 방향과 구성 체계는 다음과 같다.

가. 교과서의 개발 방향

2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서를 개발함에 있어서, 수학과 교육과정, 편찬상의 유의점 및 검정 기준(한국과학창의재단, 2015)에서 제시하는 여러 가지 관점과 지침을 준수하여, 학생들에게는 재미있고 흥미롭게 학습하여 창의성을 키울 수 있는 교과서, 교사들에게는 수업에 지침이 되며 손쉽게 활용할 수 있는 교과서를 개발하는 데 역점을 두었다.

고등학교 교육과정의 수학은, 초등학교와 중학교 교육과정에서 경험적 탐구와 직관적 사고를 통하여 습득한 수학적 지식과 이것을 토대로 형성된 수학적 사고 구조를 기반으로 하여 논리적 추론과 분석적 사고를 통한 학습이 이루어지는 과정이라고 할 수 있다.

따라서 이 교과서는 창의 · 융합형 인재 양성을 위한 수학과 교육과정에서 추구하는 학생들의 자기 주도적 학습이 가능하도록 하며, 경험적, 직관적 활동을 통하여 논리적, 분석적 사고 능력을 키우고 수학 교과 역량의 6가지 요소인 논리적 추론 능력, 창의적 문제 해결 능력과 의사소통 능력 및 창의 · 융합, 정보 처리, 태도 및 실천의 자질을 키울 수 있도록 하기 위하여 여러 가지 탐구 활동 및 활동 학습 소재와 다양한 학습 내용을 선정하여 단원의 성격과 학습 내용에 맞게 체계적으로 다루었다.

이와 같은 취지를 반영하여 개발한 이 교과서의 특징은 다음과 같다.

나. 교과서의 특징

1) 수학과 교육과정의 정신을 충실히 구현하였다.

- 수학과의 교과 목표, 내용의 영역과 성취 기준을 충실히 구현할 수 있도록 체제를 설계하고 내용을 선정하였다.
- 수학과 교과의 특성을 반영하여 다양한 교수 · 학습 방법과 평가 방법을 적용할 수 있도록 구성하였다.
- 학생의 발달 단계를 고려하여 내용의 수준과 그에 따른 학습량을 적정화하여 구성하였다.
- 수학과 교과 교육과정에서 제시하는 내용을 바탕으로 학습의 개별화가 가능한 학습 자료를 다양한 형식으로 제시하였다.
- 학생의 개별적 능력과 적성 및 희망하는 진로 선택에 긍정적 영향을 끼칠 수 있는 내용과 교수 · 학습 방법을 적용할 수 있도록 체제를 다양하게 구성하였다.

2) 바른 인성과 창의 · 융합적 사고력을 갖춘 인재 양성에 적합한 교과서가 되도록 구성하였다.

(가) 바른 인성 함양을 도모할 수 있는 교과서를 구성하였다.

- 존중, 공감, 소통, 협력, 참여, 정의, 배려 등의 인성 요소를 중심으로 인성 교육이 구현될 수 있도록 교과서 체제를 개발하였다.
- 수학과의 교과 특성에 따라 교실 수업 단위에서 인성 교육을 구현할 수 있는 교육 내용을 다양하게 제시하였다.

• 학생 참여와 협력 및 체험 학습이 강화된 다양한 교수 · 학습 방법과 평가 방법을 적용할 수 있는 교과서 체제를 제시하였다.

(나) 지식의 창조 및 융합 능력을 신장할 수 있는 교과서를 구성하였다.

• 인문 · 사회 · 과학 기술에 대한 기초 소양을 함양할 수 있는 내용을 선정하였다.

• 수학과의 교과 역량을 함양할 수 있는 교육 내용을 능률적으로 적용할 수 있는 교수 · 학습 방법과 평가 방법을 제시하였다.

• 융 · 복합적 사고력과 통찰력을 발현할 수 있도록 다양한 교수 · 학습 방법 및 평가 문항을 개발하여 제시하였다.

3) 일상생활과 연계되어 이해하기 쉽고 흥미를 유발하는 학습자 중심의 교과서가 되도록 구성하였다.

(가) 학생의 자기 주도적 학습을 효과적으로 지원할 수 있도록 내용과 체제를 구성하였다.

• 수학과 교과의 핵심적이며 필수적인 교육 내용을 중심으로 자기 주도적 학습이 가능하도록 내용과 체제를 개발하였다.

• 학생들이 스스로 학습하고 과제를 해결할 수 있는 다양한 교수 · 학습 방법과 평가 방법을 적용할 수 있는 내용을 선정하여 제시하였다.

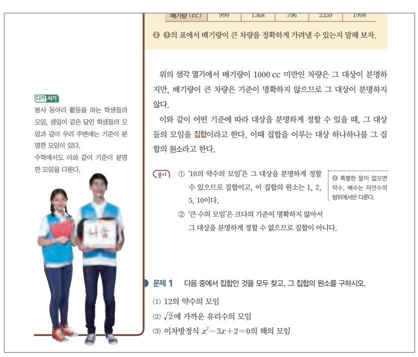
• 교사와 학생, 학생과 학생 간의 상호 작용이 가능한 교수 · 학습 활동 방법을 다양하게 제시하였다.

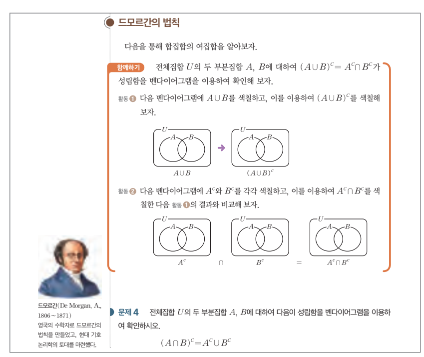
(나) 이해하기 쉽고 재미있으며 실생활과 연계되는 내용을 다양하게 선정하여 구성하였다.

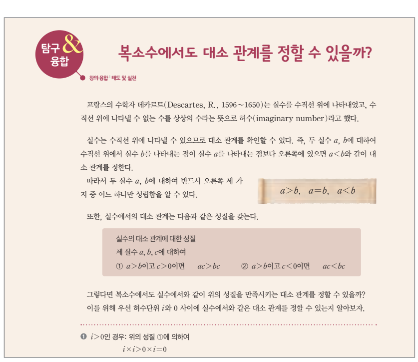
• 학생의 생활 경험을 반영한 내용으로 흥미와 동기를 유발하여 긍정적 학습 태도를 키울 수 있는 내용을 개발하였다.

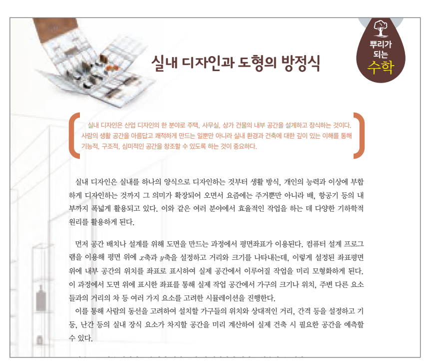
• 실생활에 응용 가능하도록 실용성 및 유용성을 고려하여 학생들의 수학적 호기심을 자극할 수 있는 신선한 소재를 개발하여 제시하였다.

• 다양한 현상과 사례 및 직 · 간접적 체험 중심의 교육 내용을 선정하여 교수 · 학습 활동과 평가 방법을 효율적으로 적용할 수 있는 체제를 제시하였다.









다. 교과서의 구성 체계

대단원

- **대단원 도입:** 대단원과 관련된 수학사와 실생활 관련 사진을 통해 단원에 대한 흥미를 유발하도록 하였다.

중단원

- **중단원 도입:** 중단원에서 배우게 될 내용과 관련된 명언과 그 배경의 소개를 통해 흥미와 호기심을 유발하도록 하였다.

소단원

- **준비하기:** 소단원 학습에 필요한 기초적인 내용을 점검하도록 하였다.
- **다가서기:** 소단원에서 학습할 내용과 관련된 실생활 소재를 통해 흥미와 호기심을 유발하도록 하였다.
- **생각 열기:** 학습을 시작하기 전에 실마리가 되는 내용을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.
- **예제, 문제:** 학습 내용의 대표적인 문제와 모범적인 풀이를 통해 문제 해결 과정을 이해하고, 유사한 문제를 통해 다시 한번 확인할 수 있도록 하였다.
- **보기:** 학습 내용이 적용된 구체적인 예를 제시하였다.
- **참고, 주의:** 학습 내용에 대한 보충 설명이나 주의해야 할 내용을 제시하였다.
- **함께하기:** 제시된 과정을 교사와 함께 단계를 따라 활동하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 발견하고 이해할 수 있도록 하였다.
- **생각 톡톡:** 사고의 폭을 넓힐 수 있는 간단한 질문을 제시하였다.
- **생각 넓히기:** 배운 내용의 다양한 상황으로의 확장을 통해 교과 역량을 키울 수 있도록 하였다.
- **탐구 & 융합:** 수학적 개념을 타 교과나 실생활에 접목하여 다양한 아이디어를 만들어 낼 수 있도록 하였다.
- **공학적 도구:** 배운 내용을 공학적 도구를 활용하여 확인하고 탐구할 수 있도록 하였다.

- **중단원 마무리하기:** 중단원에서 배운 핵심 개념을 한눈에 정리하고, 수준별 문제를 통해 배운 내용을 적용 및 응용하는 연습을 할 수 있도록 하였다.

- **대단원 평가하기:** 대단원을 마무리하면서 다양한 문제를 통해 학습 성취도를 스스로 확인할 수 있도록 하였다.
- **수학 이야기:** 수학 개념을 알 수 있는 다양한 이야기를 제시하여 수학의 가치와 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.
- **뿌리가 되는 수학:** 각 분야 전문가의 경험을 토대로 작성한 글을 통해 이 단원의 핵심 내용이 어떤 분야에서 어떻게 활용되는지 알 수 있도록 하였다.

2 지도서의 개발 방향과 구성 체계

2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 근거한 이 교사용 지도서의 개발 방향과 구성 체계는 다음과 같다.

가. 지도서의 개발 방향

2015 개정 교육과정에 따른 교사용 지도서를 개발함에 있어서, 수학과 교육과정, 편찬상의 유의점 및 검정 기준(한국과학창의재단, 2015)에서 제시한 여러 가지 관점과 지침을 준수하였다.

지도서는 교과서 연구 및 효과적인 수업 진행을 할 수 있도록 안내하는 교사를 위한 지침서이다. 따라서 이 지도서를 통하여 수학 및 수학 교육 전반에 대한 지식뿐만 아니라 단원의 이론적 배경을 비롯하여 교과서 구성 요소에 대한 상세한 해설을 명확하게 제시하고자 하였다.

나. 지도서의 특징

1) 수학과 교육과정의 정신을 충실히 구현하였다.

- 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정을 충실히 반영하여 교과서의 기술 방향 및 체제와 밀접하게 연계되도록 지도서의 내용을 선정하였다.

2) 지도서는 총론과 각론으로 나누어 구성하였다.

- 수학과 교수 · 학습에 필요한 총괄적인 것을 다룬 총론과 교과서 연구에 필요한 단원별 각론으로 구성하였다.

3) 총론에는 수학과 교수 · 학습에 필요한 총괄적인 것을 제시하였다.

- 수학과의 특성과 본질, 수학 교육 이론, 평가, 최근 수학 교육의 동향 등을 제시하였다.
- 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정을 해설하고, 교과서와 지도서의 개발 방향과 활용법 및 지도 계획에 대해 안내하였다.

4) 각론은 단원별로 구성하여, 교과서 연구 및 수업 활동에 필요한 자료로 구성하였다.

- 단원별 개관, 이론적 배경, 교수 · 학습의 계열, 단원 목표, 단원 지도 계획 등을 제시하였다.
- 교과서의 효과적인 연구를 위하여 단원 도입과 관련된 내용에 대한 해설과 보충 자료를 제시하여 수업의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.
- 수학 교과 역량과 수학적 가치를 인식할 수 있는 읽기 자료와 자세한 해설을 제시하여 수업에서 수학의 유용성과 가치를 인식하도록 하는 데 도움이 될 수 있도록 하였다.

5) 평가 문항에 대한 지도상의 강조점과 유의점을 제시하였다.

- 교과서에 제시된 문제에 대한 지도 방향이나 주안점, 평가 목표를 제시하고 풀이 과정과 정답을 상세히 제시하여, 교사가 수업에 효율적으로 활용할 수 있도록 하였다.

6) 학생들의 흥미와 수준을 고려하여 다양한 자료를 제시하였다.

- 본문의 내용과 관련된 도입 자료, 지도 자료, 읽기 자료를 제시하여 학생들의 개인차와 눈높이에 맞춰 교사가 수업에서 적절히 활용할 수 있도록 하였다.

다. 지도서의 구성 체계

총론

- **수학의 특성과 본질**: 수학의 특성과 본질을 자세히 소개하였다.
- **수학 교육의 목적과 목표**: 수학의 가치와 수학 교육의 목적과 목표를 소개하였다.
- **수학 교육 이론**: 수학적 창의성, 수학적 사고 구조에 대한 해설을 포함한 수학 교육 이론을 소개하였다.
- **수학과 학습 평가**: 수학과 학습 평가의 특징과 실제를 소개하였다.
- **수학 교육의 동향**: 최근 국내외 수학 교육의 동향과 연구 결과를 소개하였다.
- **2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해**: 2015 개정 교육과정의 총론 및 각론을 자세히 해설하여 내용을 쉽게 파악할 수 있도록 하였다.
- **교과서와 지도서의 개발 방향과 활용법**: 교과서와 지도서의 편찬 방향에 대한 자세한 해설과 수업에서의 활용법을 소개하였다.
- **연간 지도 계획**: 1년 동안 교과서의 지도 계획을 수립하고, 이를 준수할 수 있도록 구체적으로 계획하였다.

각론

- **단원의 개관**: 교육과정의 성취 기준과 교수 · 학습상의 유의점을 바탕으로 대단원의 지도 목표와 지도상의 유의점을 제시하였다.
- **단원의 이론적 배경**: 단원의 수학적 이론을 이해하는 데 도움이 되는 수학사와 이론을 구성하였다.
- **단원의 지도 계획**: 단원의 구성 내용의 학습 지도에 대한 적정 차시를 제시하였다.

중단원

- **중단원 도입**: 중단원 내용에 대한 자세한 해설을 제시하였다.
- **중단원 인물 소개**: 중단원 명언과 관련된 인물에 대하여 보다 구체적인 설명을 제시하였다.

소단원

- **소단원 지도 개관**: 교육과정의 성취 기준과 교수 · 학습상의 유의점을 바탕으로 소단원의 지도 목표, 지도상의 유의점, 용어와 기호에 대한 설명을 자세하게 제시하였다.
- **준비하기**: 준비하기 문제에 대한 주안점과 풀이를 제시하였다.
- **생각 열기**: 생각 열기와 관련된 지도 방향과 문제에 대한 풀이를 제시하였다.
- **함께하기**: 함께하기와 관련된 지도 방향과 문제에 대한 풀이를 제시하였다.
- **본문 설명**: 교과서 내용에 대한 이론적 설명, 보충, 유의점 등을 제시하고, 학생들이 잘못 이해하기 쉬운 개념을 올바르게 이해하도록 지도할 수 있는 자료를 제시하였다.
- **소단원 문제**: 소단원 문제에 대한 주안점과 풀이를 제시하였다.
- **탐구 & 융합, 공학적 도구**: 탐구 & 융합과 공학적 도구와 관련된 지도 방향과 문제에 대한 풀이를 제시하였다.
- **지도 자료, 읽기 자료**: 수업 연구에 도움이 되는 지도 자료와 읽기 자료를 제시하였다.

- **중단원 마무리하기**: 중단원 마무리 문제에 대한 주안점과 풀이를 제시하였다.

- **대단원 평가하기**: 대단원 평가 문제에 대한 평가 목표와 풀이를 제시하였다.
- **수학 이야기, 뿌리가 되는 수학**: 수학 이야기와 뿌리가 되는 수학과 관련된 수학 개념과 활용 소재에 대하여 수업 연구에 도움이 되는 추가 자료를 제시하였다.

VIII 연간 지도 계획

〈수학〉의 연간 지도 계획은 1단위당 34주를 기준으로 하여 총 136차시(34주×4차시)로 구성되었다. 실제 지도는 학교의 실정에 따라 알맞게 계획하고 재구성할 수 있으며, 단원별 상세 차시 분류는 각론에 제시하였다.

대단원	중단원	소단원	단원 계획	
			차시	쪽 수
Ⅰ. 다항식	1. 다항식의 연산	01 다항식의 덧셈과 뺄셈 02 다항식의 곱셈과 나눗셈	17	38
	2. 나머지정리와 인수분해	01 항등식 02 나머지정리 03 인수분해		
Ⅱ. 방정식과 부등식	1. 복소수와 이차방정식	01 복소수와 그 연산 02 이차방정식의 판별식 03 이차방정식의 근과 계수의 관계	33	60
	2. 이차방정식과 이차함수	01 이차방정식과 이차함수 02 이차함수의 최대, 최소		
	3. 여러 가지 방정식과 부등식	01 삼차방정식과 사차방정식 02 연립이차방정식 03 연립일차부등식 04 이차부등식과 연립이차부등식		
Ⅲ. 도형의 방정식	1. 평면좌표	01 두 점 사이의 거리 02 선분의 내분점과 외분점	32	64
	2. 직선의 방정식	01 직선의 방정식 02 두 직선의 위치 관계 03 점과 직선 사이의 거리		
	3. 원의 방정식	01 원의 방정식 02 원과 직선의 위치 관계		
	4. 도형의 이동	01 평행이동 02 대칭이동		
Ⅳ. 집합과 명제	1. 집합	01 집합 02 집합 사이의 포함 관계 03 합집합과 교집합 04 여집합과 차집합	25	44
	2. 명제	01 명제와 조건 02 명제의 역과 대우 03 충분조건과 필요조건 04 절대부등식		
Ⅴ. 함수	1. 함수	01 함수 02 합성함수 03 역함수	19	42
	2. 유리함수와 무리함수	01 유리함수 02 무리함수		
Ⅵ. 경우의 수	1. 경우의 수	01 경우의 수 02 순열 03 조합	10	22
합계			136	270

IX 참고 문헌

가. 국내 도서

11~15쪽	교육부, 「교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정」, 2015(3~4쪽)
24쪽	Jensen, E., 『뇌기반 교육의 원리』, 정종진 역, 학지사, 2010(36~37쪽)
28쪽	이경화, 『수학적 창의성』, 경문사, 2015(3~5쪽)
29~30쪽	교육부, 「교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정」, 2015(57~58쪽)
30~32쪽	황정규, 『학교 학습과 교육 평가』, 교육과학사, 1998(235~321쪽, 342쪽)
40쪽	한국과학창의재단, 「창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구」, 2009(1~2쪽)
	한국과학창의재단, 「2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구」, 2011(1~2쪽)
43쪽	교육부, 「문 · 이과 통합형 수학과 교육과정 재구조화 연구」, 2015(6쪽)
	교육부, 「교육부 고시 제2015-74호 [별책 1] 초 · 중등학교 교육과정 총론」, 2015(5쪽)
	한국과학창의재단, 「수학 체험 거점 센터 구축 및 운영 방안 연구」, 2013(7~8쪽)
	한국과학창의재단, 「중등학교 돌봄 교실 수학 프로그램 개발」, 2014(7쪽)
	한국과학창의재단, 「초 · 중등 토요 방과후 수학 프로그램 개발」, 2014(4~5쪽)
	한국과학창의재단, 「고등학교 수학과 국어 통합 교수 · 학습자료 개발 연구」, 2014(5~6쪽)
	한국과학창의재단, 「고등학교 수학과 사회(역사 포함) 통합 교수 · 학습자료 개발 연구」, 2014
44쪽	한국과학창의재단, 「고등학교 수학과 과학(기술 · 가정 포함) 통합 교수 · 학습자료 개발 연구」, 2014(2쪽)
	한국과학창의재단, 「고등학교 수학과 예술 통합 교수 · 학습자료 개발 연구」, 2014(5쪽)
	한국과학창의재단, 「고등학교 수학과 체육 통합 교수 · 학습자료 개발 연구」, 2014
	한국과학창의재단, 「고등학교 수학 교육과정 실태 분석 연구」, 2014(1~2쪽)
	한국과학창의재단, 「수학 교사 연수 프로그램 개발」, 2014(5쪽)
	한국과학창의재단, 「개화기와 일제 강점기 수학 교과서 분석 연구」, 2014(7~11쪽)
	한국과학창의재단, 「수학 교육 선진화 방안 추진 현황 분석 연구」, 2014(4~6쪽)
	한국과학창의재단, 「수학의 어려움에 관한 기초 분석 연구」, 2014(i쪽)
45쪽	한국과학창의재단, 「통계 교육 활성화를 위한 수학 교육과정 개선 방안 연구」, 2014(5~7쪽)
	한국과학창의재단, 「우리나라 수학과 교육과정 문서 체제 연구」, 2014(5~9쪽)
	한국과학창의재단, 「우리나라 수학과 교육과정 내용 계통 연구」, 2014(7쪽)
	한국과학창의재단, 「2014 수학교육 이슈 리포트」, 2015(5쪽)
	한국과학창의재단, 「주제 중심의 고등학교 수학 교과서 모형 개발 연구」, 2015(4쪽)
	한국과학창의재단, 「수학 학습 내용요소 추출 연구」, 2015(12쪽)
	한국과학창의재단, 「수학 학습 실태조사 및 개선 방안 연구」, 2015(5쪽)
	한국교육과정평가원, 「교과별 수행 평가 방법 개선 방안에 따른 수행 평가 예시 문항 자료집 — 국어 · 수학 · 영어 —」, 2014(5쪽)
45쪽, 48~51쪽	한국과학창의재단, 「2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ」, 2015(1쪽, 3쪽~23쪽)
46쪽	한국교육과정평가원, 「수학 · 과학 정의적 특성 함양을 위한 수업 원리 및 전략」, 2014(5쪽)
	한국교육과정평가원, 「수학 성취 및 정의적 특성에 미치는 교육 맥락 변인의 영향: 국가 수준 학업성취도 평가와 PISA 연계 데이터 분석」, 2015(5~6쪽)
	한국교육과정평가원, 「과정 중심 수학 평가에서 계산기 활용 방안 연구」, 2015(5~8쪽)
	한국교육과정평가원, 「국가 수준 학업성취도 평가의 수학과 정의적 영역 설문 문항 개선 방안」, 2016(1쪽)
	한국교육과정평가원, 「2015년 국가 수준 학업성취도 평가 결과 분석: 수학」, 2016(iii쪽)
	한국교육과정평가원, 「2015년 고등학교 국가 수준 학업성취도 평가 결과」, 2016(3쪽)
	한국교육과정평가원, 「수학 친숙도 분석 결과에 근거한 수학 학습 기회 형평성 제고 방안」, 2016(1쪽)
47쪽	한국교육과정평가원, 「2015 개정 교육과정에 따른 초 · 중등학교 교육과정 편성 · 운영 방안」, 2016(vii쪽)
	한국교육과정평가원, 「일반고 학습부진 학생 교수학습 지원 방안 Ⅰ: 수학, 영어 교과를 중심으로」, 2016(5쪽)
	한국교육과정평가원, 「2016년 국가 수준 학업성취도 평가 결과: 고등학교 학업성취도 변화 추이」, 2017(iii쪽)

51~60쪽	교육부, 「교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정」, 2015(45~58쪽)
61쪽, 64쪽	한국과학창의재단, 「2015 개정 교육과정에 따른 교과용 도서 개발을 위한 편찬상의 유의점 및 검정기준」, 2015(1~15쪽)

나. 국외 도서

7~8쪽	Bassler, O. & Kolb, J., 『Learning to Teach Secondary School Mathematics』, International Textbook Company, 1971(4쪽)
9쪽	Merriam-Webster, “Induction”, 『Webster's Seventh New Collegiate Dictionary』, G.&C. Merriam Co., 1981(583쪽)
12쪽	UNESCO, 「Mathematics for All」, UNESCO, 1984(1쪽)
13쪽	OECD, 『The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary』, OECD Press, 2003(10~15쪽)
15쪽	NCTM, 『Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All』, 2014(7~8쪽)
21쪽	Pólya, G., 『Mathematical Discovery』, John Wiley & Sons, Inc., 1962(9쪽)
	Brown, S. & Walter, M., 『The art of Problem Posing』, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1990(5쪽)
22쪽	Lenchner, G., 『Creative Problem Solving in School Mathematics』, Glenwood Publications, Inc., 1983(10쪽)
	Charles, R. & Lester, F., 『Teaching problem solving: What, why and how』, Dale Seymour, 1982(5쪽)
	Pólya, G., 『How to Solve It』, Princeton University Press, 1945(xvi~xvii쪽)
25쪽	Bruner, J., 『The conditions of creativity: In H. Gruber, G. Terrell & M. Wertheimer(Eds.)』, Contemporary approaches to creative thinking, Atherton, 1962(3쪽)
	Gardner, H., 『To open minds』, Basic, 1989(14쪽)
	Mumford, M. D., Reiter-Palmon, R. & Redmond, M. R., 「Problem construction and cognition: Applying problem representations in ill-defined domains」, M. A. Runco, 『Problem finding, problem solving, and creativity』, Ablex Publishing, 1994(3쪽)
	Amabile, T. M., 『Creativity in Context』, Westview Press, 1996(35쪽)
	Nickerson, R., 『Enhancing Creativity: In Handbook of Creativity(ed. by R. Sternberg)』, Cambridge University Press, 1999(394쪽)
26쪽	Wallas, G., 『The Art of Thought』, Harcourt, Brace and Company, 1926(37~42쪽)
27쪽	Poincaré, H., 『The Foundations of Science』, Science Press, 1908(386쪽)
	Ervynck, G., 『Mathematical Creativity: In Advanced Mathematical Thinking.(ed. by D. Tall)』, Kluwer Academic Publishers, 1991(42~53쪽)
	Nickerson, R., 『Enhancing Creativity: In Handbook of Creativity(ed. by R. Sternberg)』, Cambridge University Press, 1999(398쪽)
33~35쪽	Bloom, B. S. et al., 『Taxonomy of educational objectives: the classification of eduactional goals, Handbook Ⅰ: Cognitive Domain』, Longmans, 1956(18쪽)
34~35쪽	Krathwohl, D. R., Bloom, B. S. & Masia, B. B., 『Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals, Handbook Ⅱ: Affective Domain』, Longmans, 1964(45~47쪽)
36쪽, 40~41쪽	NCTM, 「Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics」, NCTM, 1989
	NCTM, 「Professional Standards for Teaching Mathematics」, NCTM, 1991
	NCTM, 「Assessment Standards for School Mathematics」, NCTM, 1995
	NCTM, 「Principles and Standards for School Mathematics」, NCTM, 2000

각론

I 다항식

1. 다항식의 연산
2. 나머지정리와 인수분해

이 단원에서는

다항식의 사칙연산을 하는 방법을 이해하고,
항등식, 나머지정리와 인수정리의 뜻을 이해하며,
다항식의 인수분해를 알아본다.

1 단원의 개관

지도 목표

1. 다항식의 연산
- 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.
- 다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

2. 나머지정리와 인수분해
- 항등식의 성질을 이해하게 한다.
- 나머지정리의 뜻을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.
- 다항식의 인수분해를 할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 다항식의 연산
- 다항식은 정수와 같은 대수적 구조를 이룬다는 점을 이해하게 한다.

2. 나머지정리와 인수분해
- 조립제법은 다항식을 단항식으로 나누는 연산과 연계하여 지도하고, 구체적인 예를 통하여 그 방법을 간단히 다룬다.
- 다항식의 인수분해는 다음의 경우를 다룬다.

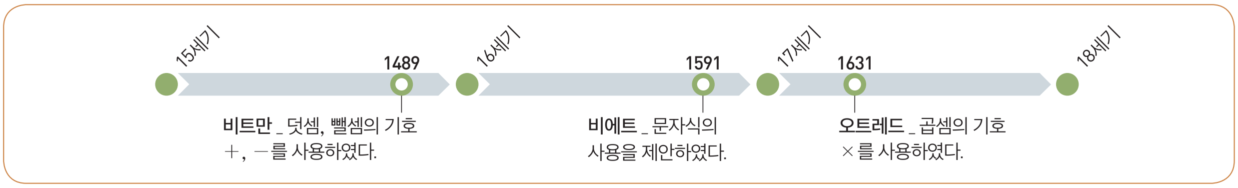
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

- 다항식의 곱셈과 인수분해는 중학교에서 학습한 내용을 토대로 고등학교에서 추가된 내용을 이해하게 한다.

학습 계통도

배운 내용	이 단원의 내용	배울 내용
[중학교 수학 1] • 문자의 사용과 식의 계산 [중학교 수학 2] • 단항식의 계산 • 다항식의 계산 [중학교 수학 3] • 다항식의 곱셈과 인수분해	**1. 다항식의 연산** 01 다항식의 덧셈과 뺄셈 02 다항식의 곱셈과 나눗셈 **2. 나머지정리와 인수분해** 01 항등식 02 나머지정리 03 인수분해	[수학] • 복소수와 이차방정식 • 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식과 부등식 • 유리함수와 무리함수

2 단원의 이론적 배경



1 문자식의 등장

기호의 사용은 15세기부터 수식의 간소화를 위하여 시작되었는데, 처음에는 기호가 아닌 문자의 축약을 이용하였다. 예를 들어 plus와 minus를 각각 p, m으로, root는 R로, cube는 cu로 나타내고, 미지수는 그 계수의 앞뒤에 점을 찍어 나타내었다.

프랑스의 슈케(Chuquet, N., 1445～1488)가 1484년에 쓴 책 『3부작 수의 과학』에서 근호 $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ⋯ 를 $R^2.$, $R^3.$, $R^4.$, ⋯ 등으로 표시했다. 예를 들어

$\sqrt{16}=4$, $\sqrt[4]{16}=2$를 각각 $R^2.16.$ equal $.4.$, $R^4.16.$ equal $.2.$으로,

$\sqrt{14+\sqrt{180}}$을 $R^2.14.\ \bar{p}.\ R^2.180.$

과 같이 나타내었다.

이러한 식은 점차 기호를 사용하여 간소화되었는데, 그 내용은 다음과 같다.

(1) $+$, $-$: 비트만(Widmann, J., 1462～1498)이 1489년에 라이프치히에서 발간한 산술책에서 사용하였다.

(2) $=$: 레코드(Recorde, R., 1510～1558)가 1557년에 그의 저서 『제예(諸藝)의 기초』에서 사용하였다.

(3) $\sqrt{\ }$: 루돌프(Rudolff, C., 1499～1545)가 1525년에 그의 저서 『미지수』에서 근호로 사용하였다.

(4) $\times$: 오트레드(Oughtred, W., 1574～1660)가 1631년에 발간한 『수학의 열쇠』에서 처음 사용하였다. 곱의 기호로 $\cdot$을 도입한 사람은 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646～1716)이다.

(5) $>$, $<$: 해리엇(Harriot, T., 1560～1621)의 유작 『대수방정식에 응용되는 해석적 기술』(1631)에서 처음 사용되었다.

(6) ∞: 월리스(Wallis, J., 1616～1703)가 1655년에 무한대를 뜻하는 기호로 만들었다.


해리엇


월리스

‘대수학의 아버지’라 불리우는 비에트(Viéte, F., 1540～1603)는 수학의 기호화에 획기적인 기여를 하였는데, 1591년에 출간된 그의 저서 『해석학 입문』에서 미지(未知)의 양은 A, I, U, ⋯ 등의 모음 대문자로, 기지(旣知)의 양은 B, Z, ⋯ 등의 자음 대문자로 나타내었다. 현재와 같이 미지의 양은 z, y, x, ⋯ 와 같은 알파벳 뒤 글자로, 기지의 양은 a, b, c, ⋯ 와 같이 알파벳 앞 글자로 나타낸 사람은 데카르트(Descartes, R., 1596～1650)이다.

2 다항식의 이론적 배경

정수 전체의 집합, 유리수 전체의 집합, 실수 전체의 집합, 복소수 전체의 집합 중 어느 하나를 D라 할 때, 계수가 D의 원소인 다항식 전체의 집합을 $D[x]$로 나타낸다. 특히, D가 복소수 전체의 집합 C일 때 $D[x]$를 $C[x]$로 나타낸다.

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in D[x]$에 대하여 $a_n \neq 0$일 때, n을 $f(x)$의 차수(次數, degree)라 하며

$$\deg f(x)=n$$

으로 나타낸다.

(1) 나눗셈정리(division algorithm)

두 다항식 $f(x)$, $g(x) \in D[x]$ $(g(x) \neq 0)$에 대하여

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \text{ (단, } r(x)=0 \text{ 또는 } \deg r(x)<\deg g(x))$$

를 만족시키는 다항식 $q(x)$, $r(x) \in D[x]$가 유일하게 존재한다.

이 정리에서 $q(x)$, $r(x)$를 각각 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫과 나머지라고 한다.

(2) 나머지정리(remainder theorem)

$f(x) \in D[x]$, $\alpha \in C$일 때 $C[x]$에서 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

$f(x)$, $g(x) \in D[x]$에 대하여 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지가 0일 때, 즉 $f(x)=g(x)q(x)$인 $q(x) \in D[x]$가 존재할 때 $f(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어진다고 한다. 이때 $f(x)$를 $g(x)$의 배수(倍數, multiple), $g(x)$를 $f(x)$의 약수(約數, divisor) 또는 인수(因數, factor)라 하며,

$$g(x) \mid f(x)$$

로 나타낸다.

(3) 인수정리(factor theorem)

$f(x) \in D[x]$, $\alpha \in C$일 때 $C[x]$에서 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)=0$이다.

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in D[x]$일 때, $\alpha \in C$에 대하여

$$f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n \in C$$

이다.

특히, $f(\alpha)=0$일 때 α를 $f(x)$의 근(根, root)이라고 한다.

(4) 다항식의 인수분해(factorization of polynomials)

F가 체이면 일차 이상의 다항식 $f(x) \in F[x]$에 대하여

$$f(x)=g(x)h(x)$$

를 만족시키는 일차 이상의 다항식 $g(x)$, $h(x) \in F[x]$가 존재할 때 $f(x)$를 F 위에서의 가약다항식(可約多項式, reducible polynomial)이라 하며, 이와 같은 다항식 $g(x)$, $h(x) \in F[x]$가 존재하지 않을 때 다항식 $f(x)$를 F 위에서의 기약다항식(旣約多項式, irreducible polynomial)이라고 한다.

가약다항식과 기약다항식은 각각 정수 전체의 집합에서 합성수와 소수에 대응하는 개념이다. 자연수를 소인수분해할 수 있듯이 다항식도 기약다항식의 곱으로 나타낼 수 있는데, 이를 다항식의 인수분해(因數分解, factorization)라고 한다.

(5) 유일 인수분해정리

임의의 일차 이상의 다항식 $f(x)\in F[x]$는

$$f(x)=ap_1(x)p_2(x)\times\cdots\times p_k(x)$$

(단, $a\in F$, $a\neq 0$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_k(x)$는 최고차항의 계수가 1인 기약다항식)

와 같이 인수분해된다.

이때 기약다항식인 인수 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_k(x)$의 순서를 생각하지 않으면 이 인수분해는 유일하고, 기약인 인수 중에 같은 것이 있으면 이를

$$f(x)=a\{p_1(x)\}^{n_1}\{p_2(x)\}^{n_2}\times\cdots\times\{p_r(x)\}^{n_r}$$

(단, $n_1\geq 1$, $n_2\geq 1$, $\cdots$, $n_r\geq 1$)

과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

참고 문헌

- 김응태, 박승안, 『현대대수학』, 경문사, 2007
- Eves, H., 『수학사』, 이우영, 신하균 역, 경문사, 1999
- Cajori, F., 『A History of Mathematical Notations』, Dover, 1993

3 단원의 지도 계획

중단원	소단원	차시 (총 17차시)	교과서 쪽 수	지도 내용	용어와 기호
1. 다항식의 연산	01 다항식의 덧셈과 뺄셈	2	13~15	• 다항식의 정리 • 다항식의 덧셈과 뺄셈	
	02 다항식의 곱셈과 나눗셈	3	16~20	• 다항식의 곱셈 • 다항식의 나눗셈	
			21	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	1	22~24	• 중단원 마무리하기	
2. 나머지 정리와 인수분해	01 항등식	1	26~27	• 항등식의 성질	미정계수법
	02 나머지 정리	3	28~32	• 나머지정리 • 인수정리 • 조립제법	나머지정리, 인수정리, 조립제법
			33	• 공학적 도구	
	03 인수분해	4	34~37	• 인수분해 공식 • 인수정리를 이용한 인수분해	
			38	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	1	39~41	• 중단원 마무리하기	
대단원 마무리		2	42~45	• 대단원 평가하기	
			46	• 수학 이야기	
			47	• 뿌리가 되는 수학	

※ 실제 지도는 학교의 실정에 따라 알맞게 계획하고 재수정할 수 있다.

1 다항식의 연산

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

02 다항식의 곱셈과 나눗셈

“ 나는 x^2년에 x살이었다. ”

(출처: 허민, 『수학자의 뒷모습 Ⅲ: 새로운 세계를 창조하다』)

드모르간(De Morgan, A., 1806~1871)
영국의 수학자

이 글은 퀴즈와 수수께끼를 매우 좋아했던 드모르간에게 누군가가 나이를 물었을 때 그가 대답한 말이다. $43^2=1849$이고 드모르간이 1806년 생이므로 1849년에 그의 나이가 43세였음을 알 수 있다.

12

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

학습 목표
다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

준비하기
다음을 계산하시오.
(1) $(5a+3b)+(2a-2b)$
(2) $(-x+y+5)-(3x-y-2)$

다가서기
공기 중에서 소리가 퍼져 나가는 속도는 온도에 대한 다항식으로 나타낼 수 있고, 기업이 제품을 생산 및 판매하여 얻는 이익은 수입과 비용을 다항식으로 나타내어 계산할 수 있다.
이와 같이 다양한 요인이 작용하는 생활 주변의 현상을 다항식을 이용하여 간결하게 나타낼 수 있다.

다항식의 정리

생각 열기 칠판에 다음과 같은 두 다항식이 적혀 있다.

ㄱ. $3x^2-5x-4x^3+2x^4+1$
ㄴ. $2x^4-4x^3+3x^2-5x+1$

❶ 두 다항식의 차수를 각각 말해 보자.
❷ 두 다항식 중에서 차수를 더 쉽게 알아볼 수 있는 것을 말해 보자.

1 다항식의 항을 차수의 크기순으로 정리하면 계산할 때 편리하다.
다항식을 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 차례대로 나타내는 것을 그 문자에 대하여 ‘내림차순으로 정리한다’고 하고, 차수가 낮은 항부터 차례대로 나타내는 것을 그 문자에 대하여 ‘오름차순으로 정리한다’고 한다.

보기 ① 다항식 $-5x+3x^2-2$를 x에 대하여
내림차순으로 정리하면 $3x^2-5x-2$
오름차순으로 정리하면 $-2-5x+3x^2$
② 다항식 $2xy^2+3x^4+4-x^2y+y^3$을
x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$3x^4-x^2y+2xy^2+y^3+4$
y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$y^3+2xy^2-x^2y+3x^4+4$

문제 1 다항식 $2x^3+xy^3-3x^2y^2-6y+1$에 대하여 다음에 답하시오.
(1) x에 대하여 내림차순으로 정리하시오.
(2) y에 대하여 내림차순으로 정리하시오.

13

중단원 도입

수학에서 문자와 식을 사용하면 자연의 법칙을 수식으로 간단하게 정리하여 표현할 수 있다. 또, 수학적 사실을 간결하게 나타냄으로써 일반적인 경우로 추상화할 수 있다. 이 단원에서는 수학의 한 분야인 대수학(代數學, algebra)에서 연구되는 다항식의 덧셈, 뺄셈과 그 성질, 곱셈과 그 성질 및 곱셈 공식, 그리고 나눗셈을 알아본다.

드모르간

드모르간(De Morgan, A., 1806~1871)은 대학에 들어가기 전까지 수학적 재능은 발견되지 않았으나, 특이한 숫자 놀이 등에 관심이 있었다. 1823년 케임브리지 대학교 트리니티 칼리지 수학과에 입학했으며 1828년에 유니버시티 칼리지 런던에서 교수직을 얻는다. 그는 많은 논문을 남겼는데, 그중에는 「산술 개론(Elements of Arithmetic, 1830)」, 「삼각함수론과 쌍대수(Trigonometry and Double Algebra, 1849)」, 「형식적 논리학(Formal Logic, 1847)」이 있고, 1838년에 『페니 사이클로피디아』에서 최초로 수학적 귀납법이라는 개념을 사용하기도 했다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순 또는 오름차순으로 정리할 수 있게 한다.
② 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.
③ 다항식의 덧셈에 대한 교환법칙, 결합법칙이 성립함을 이해하고 활용할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 다항식을 한 문자에 대한 차수의 크기순으로 정리하여 내림차순이나 오름차순으로 나타내면 계산이 편리함을 알게 하되, 지나치게 강조하지는 않는다.
② 다항식의 덧셈, 뺄셈은 동류항끼리 모아서 정리함을 알게 하고, 수의 덧셈에서와 같이 다항식의 덧셈에서도 교환법칙, 결합법칙이 성립함을 구체적인 예를 통해 확인하게 한다.

준비하기

| 주안점 | 일차식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | (1) $(5a+3b)+(2a-2b)=(5+2)a+(3-2)b$
$=7a+b$

다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식에서 문자와 차수가 각각 같은 항을 동류항이라고 한다.

다항식의 덧셈은 동류항끼리 모아서 정리하면 된다. 한편, 다항식의 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어서 더하면 된다.

예제 1 다음 두 다항식 A, B에 대하여 $A+B$와 $A-B$를 계산하시오.

$$A=2x^2+3xy-y^2,\quad B=x^2-xy+2y^2$$

풀이 $A+B=(2x^2+3xy-y^2)+(x^2-xy+2y^2)$
$=(2+1)x^2+(3-1)xy+(-1+2)y^2$
$=3x^2+2xy+y^2$

$$\begin{array}{rr} & 2x^2+3xy-y^2 \\ +) & x^2-xy+2y^2 \\ \hline & 3x^2+2xy+y^2 \end{array}$$

$A-B=A+(-B)$

$A-B=(2x^2+3xy-y^2)-(x^2-xy+2y^2)$
$=(2x^2+3xy-y^2)+(-x^2+xy-2y^2)$
$=(2-1)x^2+(3+1)xy+(-1-2)y^2$
$=x^2+4xy-3y^2$

$$\begin{array}{rr} & 2x^2+3xy-y^2 \\ -) & x^2-xy+2y^2 \\ \hline & x^2+4xy-3y^2 \end{array}$$

답 $A+B=3x^2+2xy+y^2$, $A-B=x^2+4xy-3y^2$

문제 2 다음 두 다항식 A, B에 대하여 $A+B$와 $A-B$를 계산하시오.

(1) $A=x^3-2x^2+3$, $B=3x^3-4x^2-5x-6$

(2) $A=x^2-4xy+2y^2$, $B=2x^2+xy-3y^2$

다음을 통해 다항식의 덧셈에 대한 성질을 알아보자.

함께하기 세 다항식 A, B, C가 다음과 같다.

$$A=x^2+5x+2,\quad B=2x^2-x+6,\quad C=3x^2-4x-2$$

활동 ❶ $A+B$와 $B+A$를 계산하고, 그 결과를 비교해 보자.

$A+B=\boxed{}$, $B+A=\boxed{}$

활동 ❷ $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$를 계산하고, 그 결과를 비교해 보자.

$(A+B)+C=\boxed{}$, $A+(B+C)=\boxed{}$

14

(2) $(-x+y+5)-(3x-y-2)$
$=(-x+y+5)+(-3x+y+2)$
$=(-1-3)x+(1+1)y+(5+2)$
$=-4x+2y+7$

답 (1) $7a+b$ (2) $-4x+2y+7$

다항식의 정리

생각 열기

|지도 방향| 다항식을 한 문자에 대한 차수의 크기순으로 정리하면 차수를 쉽게 알아볼 수 있음을 이해하게 한다.

❶ 두 다항식에서 $2x^4$의 차수가 4로 가장 크므로 두 다항식의 차수는 모두 4이다.

❷ 차수를 더 쉽게 알아볼 수 있는 다항식은 ㄴ이다.

내용 연구

❶ 다항식, 항, 차수와 같은 용어의 뜻을 다시 한 번 확인하고, 다항식을 특정한 문자에 대하여 정리할 수 있게 한다. 이때 다항식은 내림차순으로 정리하는 것이 일반적임을 알게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있게 한다.

답 (1) $2x^3-3x^2y^2+xy^3-6y+1$
(2) $xy^3-3x^2y^2-6y+2x^3+1$

다항식의 덧셈과 뺄셈

평가기준
상 다항식의 덧셈과 뺄셈을 하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
하 간단한 두 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

문제 풀이

문제 2

|주안점| 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $A+B$
$=(x^3-2x^2+3)+(3x^3-4x^2-5x-6)$
$=(1+3)x^3+(-2-4)x^2-5x+(3-6)$
$=4x^3-6x^2-5x-3$

$A-B=(x^3-2x^2+3)-(3x^3-4x^2-5x-6)$
$=(x^3-2x^2+3)+(-3x^3+4x^2+5x+6)$
$=(1-3)x^3+(-2+4)x^2+5x+(3+6)$
$=-2x^3+2x^2+5x+9$

(2) $A+B=(x^2-4xy+2y^2)+(2x^2+xy-3y^2)$
$=(1+2)x^2+(-4+1)xy+(2-3)y^2$
$=3x^2-3xy-y^2$

$A-B=(x^2-4xy+2y^2)-(2x^2+xy-3y^2)$
$=(x^2-4xy+2y^2)+(-2x^2-xy+3y^2)$
$=(1-2)x^2+(-4-1)xy+(2+3)y^2$
$=-x^2-5xy+5y^2$

답 풀이 참조

함께하기

|지도 방향| 수의 덧셈에서와 같이 다항식의 덧셈에서도 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 예를 통해 이해하게 한다.

|풀이| ❶ $A+B=(x^2+5x+2)+(2x^2-x+6)$
$=3x^2+4x+8$

$B+A=(2x^2-x+6)+(x^2+5x+2)$
$=3x^2+4x+8$

② $A+B=3x^2+4x+8$이므로

$$(A+B)+C=(3x^2+4x+8)+(3x^2-4x-2)$$
$$=6x^2+6$$

$B+C=5x^2-5x+4$이므로

$$A+(B+C)=(x^2+5x+2)+(5x^2-5x+4)$$
$$=6x^2+6$$

답 ① $3x^2+4x+8$, $3x^2+4x+8$, $A+B=B+A$

② $6x^2+6$, $6x^2+6$, $(A+B)+C=A+(B+C)$

내용 연구

① 다항식의 덧셈에서 더하는 순서나 괄호를 푸는 방법 등이 수의 덧셈에서와 같음을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 3

|주안점| 다항식의 덧셈에 대한 성질을 이용하여 주어진 다항식의 연산을 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $A-(B+2C)$

$$=A-B-2C$$
$$=(x^3-x^2+2x+4)-(-2x^2-3x+5)-2(x^2-5x+6)$$
$$=x^3-x^2+2x+4+2x^2+3x-5-2x^2+10x-12$$
$$=x^3-x^2+15x-13$$

(2) $(A-2B)-(C+2A)$

$$=-A-2B-C$$
$$=-(x^3-x^2+2x+4)-2(-2x^2-3x+5)-(x^2-5x+6)$$
$$=-x^3+x^2-2x-4+4x^2+6x-10-x^2+5x-6$$
$$=-x^3+4x^2+9x-20$$

답 (1) $x^3-x^2+15x-13$

(2) $-x^3+4x^2+9x-20$

문제 4

|주안점| 다항식의 덧셈과 뺄셈을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| $(\text{이익})=(2x^2+5x)-(x^2+3x+1200)$

$$=2x^2+5x-x^2-3x-1200$$
$$=x^2+2x-1200(\text{원})$$

답 $x^2+2x-1200$

---

① 일반적으로 다항식의 덧셈에서도 수의 덧셈에서와 같이 다음 성질이 성립한다.

다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙 $A+B=B+A$

② 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

참고 세 다항식의 덧셈에서 $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$의 결과가 같으므로 이를 보통 괄호 없이 $A+B+C$로 나타낸다.

문제 3 세 다항식

$$A=x^3-x^2+2x+4,\quad B=-2x^2-3x+5,\quad C=x^2-5x+6$$

에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A-(B+2C)$ (2) $(A-2B)-(C+2A)$

문제 4 어떤 공장에서 새로 개발한 상품 x개를 생산하는 데 드는 비용이 A원이고, x개를 판매할 때 생기는 수입이 B원일 때, A와 B는 다음과 같다고 한다.

$$A=x^2+3x+1200,\quad B=2x^2+5x$$

이 상품 x개를 판매할 때 생기는 이익을 x에 대한 식으로 나타내시오.

(이익)=(수입)−(비용)

생각 넓히기 문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

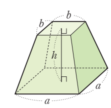
고대 바빌로니아 사람들은 오른쪽 그림과 같은 정사각뿔대의 부피를

$$V_1=\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)h$$

와 같이 대략적으로 계산했으나, 같은 시기에 이집트 사람들은

$$V_2=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h$$

와 같이 정확히 계산했다고 한다. 이때 V_2-V_1을 계산한 결과를 식으로 나타내어 보자.



(출처: 윤대원 외, 「사각뿔대 부피를 구하는 다양한 방법에 대한 탐구」)

15

생각 넓히기

|지도 방향| 단항식과 다항식의 곱셈, 다항식의 뺄셈을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| V_2-V_1

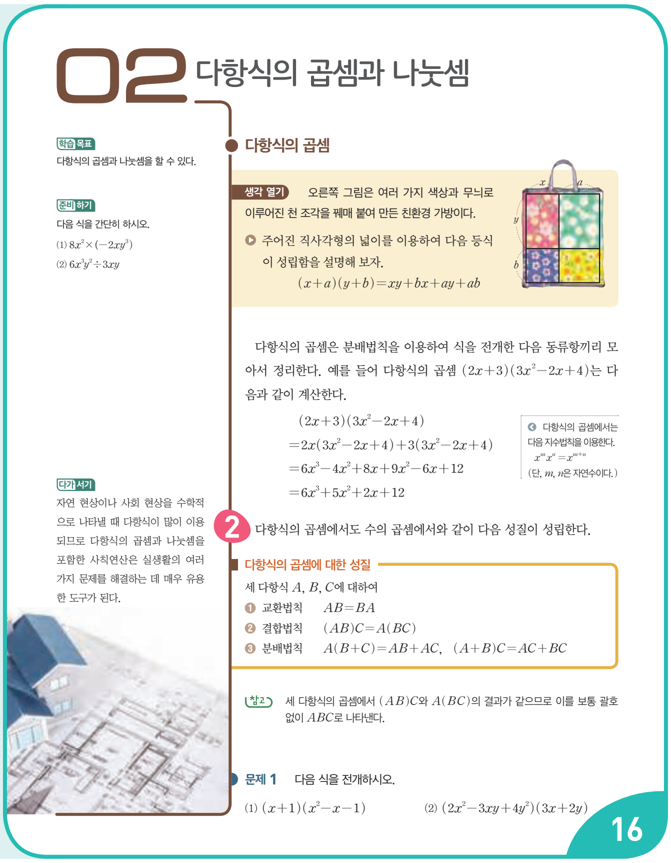
$$=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h-\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)h$$
$$=\frac{1}{3}(a^2h+abh+b^2h)-\frac{1}{4}(a^2h+2abh+b^2h)$$
$$=\frac{1}{12}a^2h-\frac{1}{6}abh+\frac{1}{12}b^2h$$
$$=\frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2)h$$

답 $\frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2)h$

지도 자료

정사각뿔대의 부피

정사각뿔대의 부피를 구할 때, 바빌로니아 사람들은 두 밑면의 한 변의 길이의 평균 $\frac{1}{2}(a+b)$를 한 변으로 하는 단면의 넓이 $\frac{1}{4}(a+b)^2$에 높이 h를 곱했던 것으로 추정된다.



02 다항식의 곱셈과 나눗셈

학습 목표
다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.

준비하기
다음 식을 간단히 하시오.
(1) $8x^2\times(-2xy^3)$
(2) $6x^3y^2\div 3xy$

다가서기
자연 현상이나 사회 현상을 수학적으로 나타낼 때 다항식이 많이 이용되므로 다항식의 곱셈과 나눗셈을 포함한 사칙연산은 실생활의 여러 가지 문제를 해결하는 데 매우 유용한 도구가 된다.

다항식의 곱셈

생각 열기 오른쪽 그림은 여러 가지 색상과 무늬로 이루어진 천 조각을 꿰매 붙여 만든 친환경 가방이다.

▶ 주어진 직사각형의 넓이를 이용하여 다음 등식이 성립함을 설명해 보자.

$$(x+a)(y+b)=xy+bx+ay+ab$$

다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다. 예를 들어 다항식의 곱셈 $(2x+3)(3x^2-2x+4)$는 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}&(2x+3)(3x^2-2x+4)\\&=2x(3x^2-2x+4)+3(3x^2-2x+4)\\&=6x^3-4x^2+8x+9x^2-6x+12\\&=6x^3+5x^2+2x+12\end{aligned}$$

다항식의 곱셈에서는 다음 지수법칙을 이용한다.
$x^mx^n=x^{m+n}$
(단, m, n은 자연수이다.)

2 다항식의 곱셈에서도 수의 곱셈에서와 같이 다음 성질이 성립한다.

다항식의 곱셈에 대한 성질
세 다항식 A, B, C에 대하여
❶ 교환법칙 $AB=BA$
❷ 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$
❸ 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

참고 세 다항식의 곱셈에서 $(AB)C$와 $A(BC)$의 결과가 같으므로 이를 보통 괄호 없이 ABC로 나타낸다.

문제 1 다음 식을 전개하시오.
(1) $(x+1)(x^2-x-1)$ (2) $(2x^2-3xy+4y^2)(3x+2y)$

16

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 다항식의 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립함을 이해할 수 있게 한다.
② 다항식의 곱셈 공식을 이해하고, 이를 활용하여 여러 가지 다항식을 전개하며 문제를 해결할 수 있게 한다.
③ 다항식의 나눗셈에서 (다항식)÷(다항식)을 계산하여 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

▌지도상의 유의점

① 다항식의 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙은 구체적인 예를 통해 직관적으로 이해하게 한다.
② 다항식의 곱셈은 그 결과가 다항식이지만 다항식의 나눗셈은 그 결과가 일반적으로 다항식이 아니며 몫과 나머지가 있음을 이해하게 한다.
③ 다항식의 나눗셈은 정수의 나눗셈과 유사함을 이해하게 하고, 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 낮음을 알게 한다.

▌준비하기

|주안점| 단항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $8x^2\times(-2xy^3)=8\times(-2)\times x^2\times xy^3$
$=-16x^3y^3$

(2) $6x^3y^2\div 3xy=\dfrac{6x^3y^2}{3xy}=2x^2y$

답 (1) $-16x^3y^3$ (2) $2x^2y$

● 다항식의 곱셈

평가 기준

상	다항식의 곱셈에 대한 성질과 곱셈 공식을 이용하여 다항식의 곱셈을 하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	다항식의 곱셈에 대한 성질과 곱셈 공식을 이용하여 다항식의 곱셈을 할 수 있다.
하	분배법칙을 이용하여 단항식과 다항식의 곱셈을 할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 큰 직사각형의 넓이와 4개의 작은 직사각형의 넓이의 합이 같음을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 확인하게 한다.

▶ 큰 직사각형의 넓이는 $(x+a)(y+b)$
4개의 작은 직사각형의 넓이의 합은
$xy+bx+ay+ab$
이때 큰 직사각형의 넓이는 4개의 작은 직사각형의 넓이의 합과 같으므로
$(x+a)(y+b)=xy+bx+ay+ab$

내용 연구

2 다항식의 곱셈에서 곱하는 순서나 괄호를 푸는 방법 등이 수의 곱셈에서와 같음을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 다항식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(x+1)(x^2-x-1)$
$=x(x^2-x-1)+(x^2-x-1)$
$=x^3-x^2-x+x^2-x-1$
$=x^3-2x-1$

(2) $(2x^2-3xy+4y^2)(3x+2y)$
$=3x(2x^2-3xy+4y^2)+2y(2x^2-3xy+4y^2)$
$=6x^3-9x^2y+12xy^2+4x^2y-6xy^2+8y^3$
$=6x^3-5x^2y+6xy^2+8y^3$

답 (1) x^3-2x-1 (2) $6x^3-5x^2y+6xy^2+8y^3$

내용 연구

❶ 중학교에서 학습한 곱셈 공식 (1)을 다시 확인하고, 이를 토대로 항이 여러 개인 완전제곱식, 3차 이상의 다항식의 전개를 이해할 수 있게 한다.

❷ $(a+b)^3$, $(a-b)^3$을 전개할 때는 $(a+b)^2$, $(a-b)^2$의 곱셈 공식과 분배법칙을 활용할 수 있도록 한다. 이때 각 항의 부호에 유의한다.

❸ 완전제곱, 세제곱과 관련된 곱셈 공식을 이해하고 익숙해지게 한다. 또한, 곱셈 공식을 차례대로 전개하면서 스스로 공식을 찾을 수 있게 한다.

❹ 곱셈 공식을 이용하여 삼차 이상의 여러 가지 다항식의 전개를 능숙하게 할 수 있게 한다.

❺ 다음과 같이 곱셈 공식을 변형하면 거듭제곱과 관련된 식의 값을 구하는 데 도움이 됨을 알게 한다.

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

④ $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

⑤ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

⑥ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

함께하기

| 지도 방향 | 주어진 등식을 직사각형의 넓이를 이용하여 직관적으로 이해하게 하며, 다항식의 곱셈에 대한 성질과 곱셈 공식 (1)을 활용하여 새로운 곱셈 공식을 유도할 수 있게 한다.

| 풀이 | ❶ 한 변의 길이가 $a+b+c$인 정사각형의 넓이는

$(a+b+c)^2$

a^2, ab, ca, ab, b^2, bc, ca, bc, c^2인 9개의 작은 직사각형의 넓이의 합은

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

큰 정사각형의 넓이는 9개의 작은 직사각형의 넓이의 합과 같으므로

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

❷ $\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

답 풀이 참조

❶ 특별한 형태의 다항식의 곱셈은 중학교에서 배운 다음 곱셈 공식을 이용하면 편리하다.

유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)
그리스의 수학자로 그가 쓴 『원론』에 몇 가지 다항식의 전개식이 나와 있다.

곱셈 공식 (1)

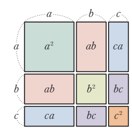
❶ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
❷ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
❸ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
❹ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

다음을 통해 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$가 성립함을 확인해 보자.

함께하기 오른쪽 그림은 한 변의 길이가 $a+b+c$인 정사각형을 9개의 직사각형으로 자른 것이다.

활동 ❶ 주어진 도형의 넓이를 이용하여 위의 등식이 성립함을 설명해 보자.

활동 ❷ **곱셈 공식 ❶**을 이용하여 $\{(a+b)+c\}^2$을 전개하고 위의 등식이 성립함을 확인해 보자.



❷ **예제 1** 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b)^3$ (2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

풀이 (1) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$
$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$

답 (1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (2) a^3+b^3

문제 2 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a-b)^3$ (2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

17

지도 자료

곱셈 공식과 도형의 부피

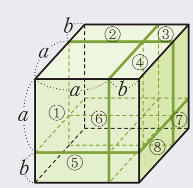
곱셈 공식 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$은 다음과 같이 직육면체 및 정육면체의 부피를 이용하여 설명할 수 있다.

①의 부피: $a\times a\times a=a^3$

②, ④, ⑤의 부피: $a\times b\times a=a^2b$

③, ⑥, ⑧의 부피: $b\times b\times a=ab^2$

⑦의 부피: $b\times b\times b=b^3$



큰 정육면체의 부피는 $(a+b)^3$이므로 다음이 성립한다.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

읽기 자료

대수학

16세기 유럽에서 수 대신 문자를 사용하거나 수학적 법칙을 간결하게 나타내는 등 대수학의 급속한 진전이 시작되었다. 프랑스의 수학자 비에트(Viéte, F., 1540~1603)는 수학의 기호화에 큰 공을 세운 사람으로 이전까지 문장으로 나타내었던 방정식을 +, −의 기호로 나타내었고 미지수와 계수를 문자로 나타내는 방정식을 사용하기 시작했다.

3 이상을 정리하면 다음과 같은 곱셈 공식을 얻는다.

곱셈 공식 (2)

⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑦ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

4 **예제 2** 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b-1)^2$ (2) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

풀이 (1) $(a+b-1)^2=a^2+b^2+(-1)^2+2\times a\times b+2\times b\times(-1)+2\times(-1)\times a$

$=a^2+b^2+2ab-2a-2b+1$

(2) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=(2a-b)\{(2a)^2+2a\times b+b^2\}$

$=(2a)^3-b^3=8a^3-b^3$

답 (1) $a^2+b^2+2ab-2a-2b+1$ (2) $8a^3-b^3$

문제 3 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+2b+3c)^2$ (2) $(2a-3b)^3$

(3) $(x+2)(x^2-2x+4)$ (4) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

5 곱셈 공식을 이용하여 여러 가지 식의 값을 구해 보자.

예제 3 $x+y=3$, $xy=-2$일 때, x^3+y^3의 값을 구하시오.

풀이 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$에서

$x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\times(-2)\times3=45$

답 45

문제 4 $x-y=-2$, $xy=2$일 때, x^3-y^3의 값을 구하시오.

18

문제 풀이

문제 2

| 주안점 | 분배법칙과 곱셈 공식 (1)을 이용하여 식을 전개하고, 곱셈 공식을 유도할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $(a-b)^3$

$=(a-b)(a-b)^2$

$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=a^3-b^3$

답 (1) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2) a^3-b^3

문제 3

| 주안점 | 곱셈 공식 (2)를 이용하여 다항식을 전개할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $(a+2b+3c)^2$

$=a^2+(2b)^2+(3c)^2$

$+2\times a\times 2b+2\times 2b\times 3c+2\times 3c\times a$

$=a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ca$

(2) $(2a-3b)^3$

$=(2a)^3-3\times(2a)^2\times 3b+3\times 2a\times(3b)^2-(3b)^3$

$=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

(3) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\times 2+2^2)$

$=x^3+2^3=x^3+8$

(4) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\times 2y+(2y)^2\}$

$=(3x)^3-(2y)^3$

$=27x^3-8y^3$

답 (1) $a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ca$

(2) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

(3) x^3+8

(4) $27x^3-8y^3$

문제 4

| 주안점 | 곱셈 공식을 이용하여 여러 가지 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$에서

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(-2)^3+3\times 2\times(-2)$

$=-20$

답 -20

지도 자료

파스칼의 삼각형

$(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수가 파스칼의 삼각형을 이룬다는 것을 소개하면 곱셈 공식을 기억하는 데 도움을 줄 수 있다. 그러나 이 내용은 확률과 통계의 이항정리에서 학습할 내용이므로 원리를 깊이 있게 다루지 않고, 규칙성을 찾아내어 흥미를 가질 수 있는 정도로만 다룬다.

$(a+b)^0=1$					1				
$(a+b)^1$				1		1			
$(a+b)^2$			1		2		1		
$(a+b)^3$		1		3		3		1	
$(a+b)^4$	1		4		6		4		1
⋮					⋮				

● 다항식의 나눗셈

평가 기준

상	다항식의 나눗셈과 그 결과에 대한 검산을 능숙하게 할 수 있다.
중	다항식의 나눗셈을 하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
하	다항식의 나눗셈을 할 수 있다.

내용 연구

1 다항식의 나눗셈을 할 때는 먼저 내림차순으로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산할 수 있음을 알게 한다.

두 다항식 A, $B\,(B\neq0)$에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$\begin{array}{rl} & Q \longleftarrow \text{몫} \\ \text{나누는 식} \longrightarrow B\,\big) & A \longleftarrow \text{나누어지는 식} \\ & \vdots \\ \hline & R \longleftarrow \text{나머지} \end{array}$$

에서 다음과 같은 항등식을 얻을 수 있다.

$$A=BQ+R\ (\text{단, } (R\text{의 차수})<(B\text{의 차수}))$$

2 다항식의 나눗셈에서 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 낮아질 때까지 계속 나누어야 함을 주의하고 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 낮음을 이해하게 한다.

3 어떤 다항식을 나누는 식과 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 그 다항식을 구할 수 있다.

즉, 두 다항식 A, $B\,(B\neq0)$에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 할 때,

$$A=BQ+R$$

임을 이용하여 A를 구할 수 있음을 알게 한다.

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | 다항식의 나눗셈을 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 하여 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1)

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \quad\longleftarrow \text{몫} \\ x-3\,\big) & x^2+2x+4 \\ & x^2-3x \\ \hline & \quad 5x+4 \\ & \quad 5x-15 \\ \hline & \qquad 19 \quad\longleftarrow \text{나머지} \end{array}$$

● 다항식의 나눗셈

1 다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

예를 들어 다항식의 나눗셈 $(2x^2-3x+1)\div(2x+1)$은 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{array}{rl} & x-2 \quad\longleftarrow \text{몫} \\ 2x+1\,\big) & 2x^2-3x+1 \\ & 2x^2+x \quad\longleftarrow (2x+1)\times x \\ \hline & \quad -4x+1 \\ & \quad -4x-2 \quad\longleftarrow (2x+1)\times(-2) \\ \hline & \qquad 3 \quad\longleftarrow \text{나머지} \end{array}$$

따라서 $2x^2-3x+1$을 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 $x-2$이고 나머지는 3이다.

› 다항식의 나눗셈에서는 다음 지수법칙을 이용한다.
$x^m\div x^n=\begin{cases} x^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \end{cases}$
(단, $x\neq0$이고, m, n은 자연수이다.)

생각톡톡 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 항상 일차식일까?

문제 5 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^2+2x+4)\div(x-3)$ (2) $(4x^3-3x+2)\div(2x^2-x-1)$

일반적으로 다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R$$

2 와 같이 나타낼 수 있다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

특히 $R=0$, 즉 $A=BQ$일 때, 'A는 B로 나누어떨어진다'고 한다.

› Q는 몫을 뜻하는 quotient의 첫 글자이고, R는 나머지를 뜻하는 remainder의 첫 글자이다.

보기 나눗셈 $(2x^2-3x+1)\div(2x+1)$에서 몫은 $x-2$이고 나머지는 3이므로

$$2x^2-3x+1=(2x+1)(x-2)+3$$

과 같이 나타낼 수 있다.

문제 6 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫 Q와 나머지 R를 구하고, $A=BQ+R$의 꼴로 나타내시오.

(1) $A=3x^3-5x^2-2x+1$, $B=x-2$

(2) $A=2x^3-4x^2+5$, $B=x^2-3x-1$

19

---

(2)

$$\begin{array}{rl} & 2x+1 \quad\longleftarrow \text{몫} \\ 2x^2-x-1\,\big) & 4x^3 \qquad\quad -3x+2 \\ & 4x^3-2x^2-2x \\ \hline & \qquad 2x^2-x+2 \\ & \qquad 2x^2-x-1 \\ \hline & \qquad\qquad 3 \quad\longleftarrow \text{나머지} \end{array}$$

답 (1) 몫: $x+5$, 나머지: 19 (2) 몫: $2x+1$, 나머지: 3

생각톡톡 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 이차식보다 차수가 낮은 상수 또는 일차식이다.

문제 6

| 주안점 | 다항식의 나눗셈의 몫과 나머지를 구한 다음 $A=BQ+R$의 꼴로 나타낼 수 있게 한다.

| 풀이 | (1)

$$\begin{array}{rl} & 3x^2+x \quad\longleftarrow Q \\ x-2\,\big) & 3x^3-5x^2-2x+1 \\ & 3x^3-6x^2 \\ \hline & \qquad x^2-2x+1 \\ & \qquad x^2-2x \\ \hline & \qquad\qquad 1 \quad\longleftarrow R \end{array}$$

$$3x^3-5x^2-2x+1=(x-2)(3x^2+x)+1$$

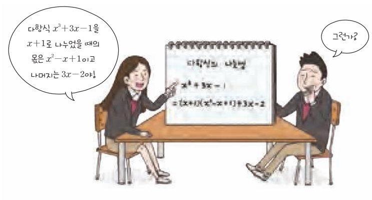
3 **예제 4** 다항식 A를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+2x+3이고 나머지는 6이다. 다항식 A를 구하시오.

풀이
$$A=(3x-1)(x^2+2x+3)+6$$
$$=3x(x^2+2x+3)-(x^2+2x+3)+6$$
$$=3x^3+6x^2+9x-x^2-2x-3+6$$
$$=3x^3+5x^2+7x+3$$

답 $3x^3+5x^2+7x+3$

문제 7 다항식 A를 x^2+1로 나누었을 때의 몫은 $x+3$이고 나머지는 $-2x+1$이다. 다항식 A를 구하시오.

탐구 **문제 8** 현정이는 등식 $x^3+3x-1=(x+1)(x^2-x+1)+3x-2$를 보고 다음과 같이 말했다. 현정이가 한 말이 옳은지 이야기해 보자.



문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

생각 넓히기

다항식의 곱셈에서 규칙을 발견해 보려고 한다.

활동 1 다음 식을 전개해 보자.

(1) $(x-1)(x+1)$ (2) $(x-1)(x^2+x+1)$
(3) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ (4) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

활동 2 활동 1에서 발견할 수 있는 규칙을 말해 보자.

활동 3 활동 2에서 찾은 규칙을 이용하여 $(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1)$을 전개해 보자.

20

(2)
$$\begin{array}{r l}
 & 2x+2 \quad \leftarrow Q \\
x^2-3x-1 \,\big)\!\! & \overline{2x^3-4x^2 \qquad +5} \\
 & 2x^3-6x^2-2x \\
\hline
 & 2x^2+2x+5 \\
 & 2x^2-6x-2 \\
\hline
 & 8x+7 \quad \leftarrow R
\end{array}$$

$$2x^3-4x^2+5=(x^2-3x-1)(2x+2)+8x+7$$

답 풀이 참조

문제 7

|주안점| 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 할 때, $A=BQ+R$임을 이용하여 다항식 A를 구할 수 있게 한다.

|풀이| $A=(x^2+1)(x+3)-2x+1$
$$=x^3+3x^2+x+3-2x+1$$
$$=x^3+3x^2-x+4$$

답 x^3+3x^2-x+4

문제 8

|주안점| 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수임을 이해하게 한다.

|풀이| 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이어야 하므로 현정이가 한 말은 옳지 않다.
$$x^3+3x-1=(x+1)(x^2-x+4)-5$$
따라서 다항식 x^3+3x-1을 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+4이고 나머지는 -5이다. 답 풀이 참조

생각 넓히기

|지도 방향| n이 2 이상의 자연수일 때, $(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)$을 전개하여 다항식의 곱셈에서 성립하는 규칙을 발견해 보게 한다.

|풀이| 1 (1) $(x-1)(x+1)=x^2-1$

(2) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$

(3) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$
$$=x^4+x^3+x^2+x-x^3-x^2-x-1$$
$$=x^4-1$$

(4) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$$=x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^4-x^3-x^2-x-1$$
$$=x^5-1$$

2 n이 2 이상의 자연수일 때, 다음 등식이 성립한다.
$$(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)=x^n-1$$

3 $(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1)=x^{100}-1$

답 1 (1) x^2-1 (2) x^3-1 (3) x^4-1 (4) x^5-1
2 n이 2 이상의 자연수일 때,
$(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)=x^n-1$
3 $x^{100}-1$

지도 자료

1. 다항식의 나눗셈

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)=g(x)h(x)$가 되는 $h(x)$는 일반적으로 존재하지 않는다. 이와 같은 $h(x)$가 존재하면 $f(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어진다고 하고, $g(x)\,|\,f(x)$로 나타낸다. 이때 $g(x)$는 $f(x)$의 약수, $f(x)$는 $g(x)$의 배수라고 한다.

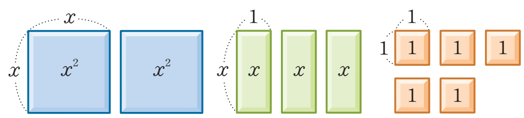
2. 다항식의 나눗셈정리(division algorithm)

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를
$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$
$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$$
이라 하면
$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$
$$(r(x)\text{의 차수}<g(x)\text{의 차수})$$
를 만족시키는 다항식 $q(x)$, $r(x)$가 유일하게 존재한다.

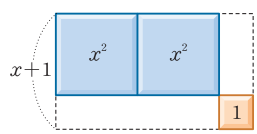
탐구&융합 대수 막대를 이용한 다항식의 나눗셈

| 지도 방향 | 다항식의 나눗셈에서 나누는 다항식, 나누어지는 다항식, 몫, 나머지의 계수가 모두 자연수인 경우에 다항식의 나눗셈을 직사각형의 넓이를 이용하여 설명할 수 있음을 대수 막대를 이용한 구체적인 예를 통해 이해하게 하고, 직접 설명해 보게 한다.

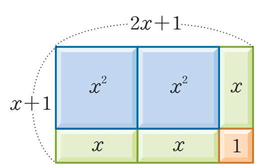
| 풀이 | ❶ 다항식 $2x^2+3x+5$를 x^2을 나타내는 대수 막대 2개, x를 나타내는 대수 막대 3개, 1을 나타내는 대수 막대 5개를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.



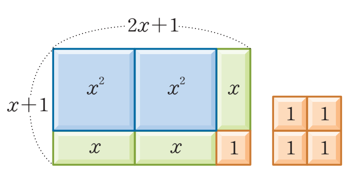
❷ x^2을 나타내는 대수 막대 2개를 가로로 나열한 다음 직사각형의 세로의 길이가 나누는 다항식 $x+1$이 되도록 1을 나타내는 대수 막대 1개를 다음 그림과 같이 추가한다.



❸ 전체가 직사각형이 되도록 x를 나타내는 대수 막대 3개를 다음 그림과 같이 빈 공간에 채운다.



❹ ❶의 대수 막대 중에서 ❷, ❸에서 사용하고 남은 1을 나타내는 대수 막대 4개를 다음 그림과 같이 오른쪽에 둔다.



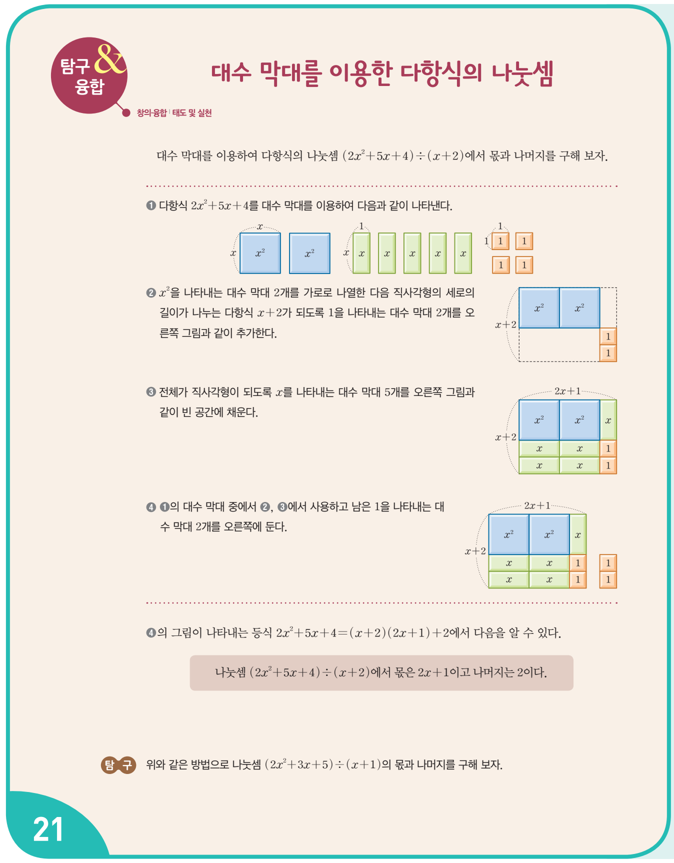
❹의 그림이 나타내는 등식은

$$2x^2+3x+5=(x+1)(2x+1)+4$$

이므로 다항식 나눗셈 $(2x^2+3x+5)\div(x+1)$에서 몫은 $2x+1$이고 나머지는 4이다.

답 몫: $2x+1$, 나머지: 4

| 참고 | 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이므로 x를 나타내는 대수 막대를 모두 사용하도록 한다.



탐구&융합 대수 막대를 이용한 다항식의 나눗셈

창의·융합 | 태도 및 실천

대수 막대를 이용하여 다항식의 나눗셈 $(2x^2+5x+4)\div(x+2)$에서 몫과 나머지를 구해 보자.

❶ 다항식 $2x^2+5x+4$를 대수 막대를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

❷ x^2을 나타내는 대수 막대 2개를 가로로 나열한 다음 직사각형의 세로의 길이가 나누는 다항식 $x+2$가 되도록 1을 나타내는 대수 막대 2개를 오른쪽 그림과 같이 추가한다.

❸ 전체가 직사각형이 되도록 x를 나타내는 대수 막대 5개를 오른쪽 그림과 같이 빈 공간에 채운다.

❹ ❶의 대수 막대 중에서 ❷, ❸에서 사용하고 남은 1을 나타내는 대수 막대 2개를 오른쪽에 둔다.

❹의 그림이 나타내는 등식 $2x^2+5x+4=(x+2)(2x+1)+2$에서 다음을 알 수 있다.

나눗셈 $(2x^2+5x+4)\div(x+2)$에서 몫은 $2x+1$이고 나머지는 2이다.

탐구 위와 같은 방법으로 나눗셈 $(2x^2+3x+5)\div(x+1)$의 몫과 나머지를 구해 보자.

21

읽기 자료

필즈상

필즈상(Fields Medal)은 4년마다 열리는 국제수학자대회(International Congress of Mathematicians)에서 수학 발전에 획기적인 업적을 남긴 40세 이하 수학자에게 수여하는 수학 분야 최고의 상이다.


필즈

캐나다의 수학자 필즈(Fields, J. C., 1863∼1932)는 1924년 캐나다의 토론토에서 개최된 국제수학자대회 추진위원회 회장을 맡았는데, 우수한 업적을 성취한 두 명의 수학자에게 국제수학자대회에서 금메달을 수여할 것을 제안하였다. 그 후 몇 년의 준비 기간을 거쳐 필즈가 세상을 떠난 지 4년 후인 1936년 노르웨이 오슬로의 국제수학자대회에서 첫 금메달이 '필즈상'이라는 명칭으로 수여되었다.

이 필즈상은 현재와 특히 미래의 수학 발전에 크게 공헌할 수학자에게 금메달이 수여되기를 바라는 필즈의 뜻에 따라 수상자의 연령을 40세 이하로 제한하였다.

Ⅰ-1. 다항식의 연산

중단원 마무리하기

다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) **다항식의 덧셈**
다항식의 덧셈은 동류항끼리 모아서 정리한다.

(2) **다항식의 뺄셈**
다항식의 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어서 더한다.

다항식의 곱셈

(1) **다항식의 곱셈**
다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다.

(2) **곱셈 공식**

❶ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
❷ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
❸ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
❹ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
❺ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
❻ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
❼ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

다항식의 나눗셈

(1) **다항식의 나눗셈**
다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

(2) 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 다음이 성립한다.

$$A=BQ+R$$

(단, R의 차수는 B의 차수보다 낮다.)
특히 $R=0$, 즉 $A=BQ$일 때, A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

기본

01 다음 다항식을 [　] 안의 방법으로 정리하시오.

(1) $x^2y-3y^2+2x+x^3$　[x에 대한 내림차순]
(2) $2x^2+xy^2-y+5y^3-1$　[y에 대한 내림차순]

02 두 다항식

$A=-x^2+4xy-3y^2$,
$B=2x^2+5xy-4y^2$

에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $-4A+B$
(2) $2A-(3B+A)$

03 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-2y+z)^2$
(2) $(2a+3b)^3$
(3) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
(4) $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$

04 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(2x^3-5x^2+3)\div(x+2)$
(2) $(4x^3+2x^2-5x+3)\div(x^2-2x+3)$

22

중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있게 한다.

답 (1) $x^3+x^2y+2x-3y^2$
(2) $5y^3+xy^2-y+2x^2-1$

02

| 주안점 | 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1)

$$\begin{aligned}&-4A+B\\&=-4(-x^2+4xy-3y^2)+(2x^2+5xy-4y^2)\\&=4x^2-16xy+12y^2+2x^2+5xy-4y^2\\&=6x^2-11xy+8y^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&2A-(3B+A)\\&=A-3B\\&=(-x^2+4xy-3y^2)-3(2x^2+5xy-4y^2)\\&=-x^2+4xy-3y^2-6x^2-15xy+12y^2\\&=-7x^2-11xy+9y^2\end{aligned}$$

답 (1) $6x^2-11xy+8y^2$　(2) $-7x^2-11xy+9y^2$

03

| 주안점 | 곱셈 공식을 이용하여 다항식을 전개할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1)

$$\begin{aligned}&(x-2y+z)^2\\&=x^2+(-2y)^2+z^2+2\times x\times(-2y)\\&\qquad+2\times(-2y)\times z+2zx\\&=x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(2a+3b)^3\\&=(2a)^3+3\times(2a)^2\times 3b+3\times 2a\times(3b)^2+(3b)^3\\&=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&(2x+1)(4x^2-2x+1)\\&=(2x+1)\{(2x)^2-2x\times 1+1^2\}\\&=(2x)^3+1^3\\&=8x^3+1\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)\\&=(3a-b)\{(3a)^2+3a\times b+b^2\}\\&=(3a)^3-b^3\\&=27a^3-b^3\end{aligned}$$

답 (1) $x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx$
(2) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$
(3) $8x^3+1$
(4) $27a^3-b^3$

04

| 주안점 | 다항식의 나눗셈에서 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1)

$$\begin{array}{r@{}l}
 & 2x^2-9x+18 \quad \longleftarrow \text{몫}\\
x+2\,\big)\! & \overline{2x^3-5x^2\qquad+3}\\
 & 2x^3+4x^2\\
 & \overline{\quad -9x^2\qquad+3}\\
 & \quad -9x^2-18x\\
 & \overline{\qquad\quad 18x+3}\\
 & \qquad\quad 18x+36\\
 & \overline{\qquad\qquad -33} \quad \longleftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r@{}l}
 & 4x+10 \quad \longleftarrow \text{몫}\\
x^2-2x+3\,\big)\! & \overline{4x^3+2x^2-5x+3}\\
 & 4x^3-8x^2+12x\\
 & \overline{\quad 10x^2-17x+3}\\
 & \quad 10x^2-20x+30\\
 & \overline{\qquad\qquad 3x-27} \quad \longleftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

답 (1) 몫: $2x^2-9x+18$, 나머지: -33
(2) 몫: $4x+10$, 나머지: $3x-27$

표준

05 세 다항식

$$A=x^3-x+3,\quad B=-x^3+2x^2-6,\quad C=2x^3-4x^2-3x+1$$

에 대하여 $-3A+2(B-C)-(C-4A)$를 계산하시오.

06 다음을 만족시키는 두 다항식 A, B를 구하시오.

$$2A+B=5x^3-3x^2+5x,\quad A-B=x^3+3x^2+4x+3$$

07 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+y)^3(x-y)^3$

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

08 다음 물음에 답하시오.

(1) $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=5$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

(2) $a+b=1$, $a^3+b^3=19$일 때, ab의 값을 구하시오.

(3) $a-b=2$, $b-c=3$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값을 구하시오.

09 다항식 x^3-x^2-x+a가 다항식 x^2+x+1로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하시오.

23

05

|주안점| 다항식의 덧셈에 대한 성질을 이용하여 주어진 다항식의 계산을 할 수 있게 한다.

|풀이| $-3A+2(B-C)-(C-4A)$

$$\begin{aligned}&=-3A+2B-2C-C+4A\\&=A+2B-3C\\&=(x^3-x+3)+2(-x^3+2x^2-6)\\&\qquad -3(2x^3-4x^2-3x+1)\\&=-7x^3+16x^2+8x-12\end{aligned}$$

답 $-7x^3+16x^2+8x-12$

06

|주안점| 다항식의 덧셈을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $2A+B=5x^3-3x^2+5x$ ...... ①

$A-B=x^3+3x^2+4x+3$ ...... ②

①+②를 하면 $3A=6x^3+9x+3$

따라서 $A=2x^3+3x+1$

①$-2\times$②를 하면 $3B=3x^3-9x^2-3x-6$

따라서 $B=x^3-3x^2-x-2$

답 $A=2x^3+3x+1$, $B=x^3-3x^2-x-2$

07

|주안점| 다항식의 곱셈에 대한 성질과 곱셈 공식을 이용하여 다항식을 전개할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(x+y)^3(x-y)^3$

$$\begin{aligned}&=\{(x+y)(x-y)\}^3\\&=(x^2-y^2)^3\\&=(x^2)^3-3\times(x^2)^2\times y^2+3\times x^2\times(y^2)^2-(y^2)^3\\&=x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6\end{aligned}$$

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$\begin{aligned}&=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2\\&\quad -ab^2-b^2c-abc+a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-ac^2\\&=a^3+b^3+c^3-3abc\end{aligned}$$

답 (1) $x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$ (2) $a^3+b^3+c^3-3abc$

08

|주안점| 곱셈 공식의 변형을 이용하여 여러 가지 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $a^2+b^2+c^2$

$$\begin{aligned}&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=4^2-2\times5=6\end{aligned}$$

(2) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$에서

$1=19+3ab$, $3ab=-18$, 즉 $ab=-6$

(3) $a-b=2$, $b-c=3$에서 $a-c=5$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)\\&\qquad +(c^2-2ca+a^2)\}\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=\frac{1}{2}(4+9+25)\\&=19\end{aligned}$$

답 (1) 6 (2) -6 (3) 19

09

|주안점| 다항식의 나눗셈을 할 수 있게 한다.

|풀이|

$$\begin{array}{r}x-2\\ x^2+x+1\,\overline{)\,x^3-x^2-x+a}\\ \underline{x^3+x^2+x}\\ -2x^2-2x+a\\ \underline{-2x^2-2x-2}\\ a+2\end{array}$$

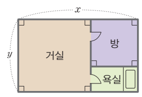
따라서 $a+2=0$이므로 $a=-2$

답 -2

|서·술·형|

10 다항식 x^3+x^2+10을 다항식 A로 나누었을 때의 몫은 $x+2$이고 나머지는 6이다. 다항식 A를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

11 오른쪽 그림은 어느 집의 평면도로 거실과 방은 정사각형 모양, 욕실은 직사각형 모양의 구조로 되어 있다. 평면도 전체는 가로의 길이가 x, 세로의 길이가 y인 직사각형 모양이라 할 때, 욕실의 넓이를 x, y에 대한 식으로 나타내시오. (단, $y<x<2y$)



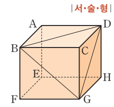
발 전

12 $a+b=2$, $a^2+b^2=6$일 때, a^5+b^5의 값을 구하시오.

13 다항식 $A=x^3+2x^2+ax+b$가 다항식 x^2-x+1로 나누어떨어질 때, 다항식 A를 x^2-2로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

사고력+ |서·술·형|

14 오른쪽 그림과 같은 직육면체의 겉넓이가 94이고, 삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 100이다. 이 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



24

10

|주안점| 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 할 때, $A=BQ+R$임을 이용하여 다항식 A를 구할 수 있게 한다.

해결 과정 $x^3+x^2+10=A(x+2)+6$ ▶ 30 %

이므로 $A(x+2)=x^3+x^2+4$ ▶ 20 %

답 구하기 $A=(x^3+x^2+4)\div(x+2)$

$=x^2-x+2$ ▶ 50 %

11

|주안점| 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| 전체 평면도의 넓이는 xy, 거실의 넓이는 y^2, 방의 넓이는 $(x-y)^2$이므로 구하는 욕실의 넓이는

$$\begin{aligned} xy-y^2-(x-y)^2&=xy-y^2-x^2+2xy-y^2\\ &=-x^2+3xy-2y^2 \end{aligned}$$

답 $-x^2+3xy-2y^2$

12

|주안점| 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$2^2=6+2ab$이므로 $ab=-1$

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$에서

$2^3=a^3+b^3+3\times(-1)\times2$이므로 $a^3+b^3=14$

$(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2$에서

$$\begin{aligned} a^5+b^5&=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)\\ &=6\times14-(-1)^2\times2=82 \end{aligned}$$

답 82

13

|주안점| 다항식의 나눗셈을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항식과 나머지를 구할 수 있게 한다.

|풀이| x^3+2x^2+ax+b를 x^2-x+1로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^2-x+1 & x^3+2x^2+ax+b \\ & x^3-x^2+x \\ \hline & 3x^2+(a-1)x+b \\ & 3x^2-3x+3 \\ \hline & (a+2)x+b-3 \end{array}$$

이때 $(a+2)x+b-3=0$이므로

$a+2=0$, $b-3=0$에서 $a=-2$, $b=3$

따라서 $A=x^3+2x^2-2x+3$

그리고 x^3+2x^2-2x+3을 x^2-2로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x^2-2 & x^3+2x^2-2x+3 \\ & x^3-2x \\ \hline & 2x^2+3 \\ & 2x^2-4 \\ \hline & 7 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 7이다.

답 7

14

|주안점| 곱셈 공식을 이용하여 주어진 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있게 한다.

문제 이해 직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a, b, c라 하자. ▶ 10 %

해결 과정 직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=94$ ▶ 30 %

$\overline{BD}^2+\overline{DG}^2+\overline{GB}^2=100$이므로

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=100$,

$a^2+b^2+c^2=50$ ▶ 30 %

즉, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=144$

이때 $a+b+c>0$이므로 $a+b+c=12$ ▶ 20 %

답 구하기 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

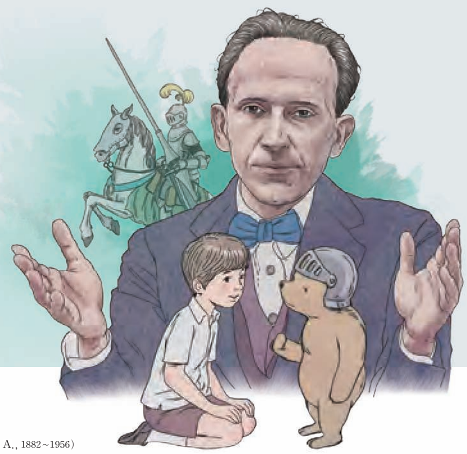
$4(a+b+c)=48$ ▶ 10 %

2 나머지정리와 인수분해

01 항등식
02 나머지정리
03 인수분해

“ 하지만 인수분해보다는 장엄해. ”

(출처: 앨런 밀른, 『푸우 코너에 있는 집』)



앨런 밀른(Milne, A. A., 1882~1956)
영국의 작가

이 글은 동화 『푸우 코너에 있는 집』의 끝부분에서, 말을 타는 기사를 동경하는 푸우에게 크리스토퍼 로빈이 수학에서 중요하게 쓰이는 인수분해와 비교해서 말을 타는 기사가 중요한 사람임을 설명하는 장면에서 한 말이다.

25

01 항등식

학습 목표
항등식의 성질을 이해한다.

준비하기
다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.
(1) $(x+2)(x-3)=x^2+\square x+\square$
(2) $(x+1)^3=x^3+\square x^2+\square x+1$

● 항등식의 성질

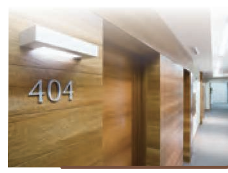
생각 열기 칠판에 다음과 같은 두 등식이 적혀 있다.

ㄱ. $x^2+1=2x$
ㄴ. $x^2=(x+1)(x-1)+1$

❶ 등식 ㄱ을 성립하게 하는 실수 x의 값을 구해 보자.
❷ 등식 ㄴ을 성립하게 하는 실수 x의 값을 구해 보자.

항등식은 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식이다.
위의 **생각 열기**에서 등식 $x^2=(x+1)(x-1)+1$은 항등식이고, 등식 $x^2+1=2x$는 $x=1$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

다가서기
호텔의 객실은 열쇠가 다 다른데 모든 객실을 열 수 있는 마스터키가 있다. 등식에서도 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 항등식이 있다.



예제 1 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이 성립함을 설명하시오.

풀이 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립하므로 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면
$c=0,\quad a+b+c=0,\quad a-b+c=0$
$c=0$을 나머지 두 식에 대입한 후 연립하여 풀면 $\quad a=0,\ b=0$
따라서 $\quad a=b=c=0$

답 풀이 참조

문제 1 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이 성립함을 설명하시오.

26

중단원 도입

다항식을 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 등을 이용하여 변형하더라도 변형된 다항식은 원래의 다항식과 같다.
이 단원에서는 중학교에서 학습한 항등식의 개념을 바탕으로 항등식의 성질을 이해하고, 이를 이용하여 나머지정리와 인수정리를 알아본다. 또, 여러 가지 인수분해 공식과 인수정리를 이용하여 다항식을 인수분해해 본다.

앨런 밀른

앨런 밀른(Milne, A. A., 1882~1956)은 런던에서 태어난 영국의 대표적인 아동문학가이자 극작가, 소설가이다. 초기에는 어른을 위한 풍자적이고 해학적인 작품을 써서 널리 알려졌으며, 대표적인 희곡으로는 「핌 씨 지나가시다」, 「도버 가도」 등이 있다. 1920년에 아들이 태어난 이후에는 아들을 위한 어린이 책을 쓰기 시작했다. 대표적인 『곰돌이 푸우 이야기』는 아들이 가지고 놀던 인형을 의인화해 숲속에서 유쾌하게 노는 모습을 그린 작품으로, 사랑스러운 등장인물과 천진난만한 동심이 잘 어우러져 있으며 오늘날까지 많은 사랑을 받고 있다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 항등식의 개념을 이해하고, 항등식의 성질을 항등식의 뜻으로부터 이해하게 한다.
② 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 정할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 어떤 등식이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하더라도 등식이 항상 성립함을 이해하게 한다.
② 미정계수를 정할 때는 경우에 따라 계수비교법과 수치대입법 중 효율적인 것을 사용할 수 있게 한다.
③ 수치대입법을 사용하여 항등식의 계수를 정할 때는 어떤 수를 대입하여도 상관없지만 가능한 한 계산이 간단해질 수 있는 수를 대입하게 한다.
④ 항등식의 성질을 활용하는 복잡한 문제는 다루지 않는다.

용어와 기호

• 미정계수법(未定係數法, method of undetermined coefficients)

이상으로부터 다음을 알 수 있다.

항등식의 성질

❶ $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.

❷ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

1 항등식의 성질을 이용하여 주어진 등식에서 정해져 있지 않은 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라고 한다. 미정계수법에는 양변에서 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법과 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법이 있다.

예제 2 등식 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=x^2+4x-3$이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하시오.

풀이 1 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$ax^2-(2a-b)x+a-b+c=x^2+4x-3$$

양변에서 동류항의 계수를 비교하면

$$a=1,\quad -(2a-b)=4,\quad a-b+c=-3$$

이므로 $\quad a=1,\ b=6,\ c=2$

풀이 2 양변에 $x=1$, $x=0$, $x=2$를 각각 대입해도 주어진 등식이 성립해야 하므로

$$c=2,\quad a-b+c=-3,\quad a+b+c=9$$

$c=2$를 나머지 두 식에 대입한 후 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=6$

답 $a=1,\ b=6,\ c=2$

문제 2 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하시오.

(1) $2x^2+ax=(bx+1)(x+c)+3$

(2) $2x^2+3x-1=ax(x+1)+b(x+1)(x-1)+cx(x-1)$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음을 각각 등식으로 나타내고, 그 등식이 항등식인 이유를 설명해 보자.

활동 ❶ 연속하는 세 자연수 중 가운데 수의 제곱에서 1을 뺀 것은 양 끝의 두 수의 곱과 같다.

활동 ❷ 연속하는 세 자연수 중 가장 큰 수의 제곱에서 가장 작은 수의 제곱을 빼면 가운데 수의 4배와 같다.

27

준비하기

|주안점| 다항식을 전개할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$

(2) $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$

답 (1) -1, -6 (2) 3, 3

항등식의 성질

평가 기준

상	항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 정하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	항등식의 뜻을 알고, 적당한 수를 대입하여 미정계수를 정할 수 있다.
하	차수가 같은 한 문자로 이루어진 항등식의 미정계수를 정할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 항등식과 방정식을 구별할 수 있게 한다.

❶ $x^2+1=2x$에서 $\quad x^2-2x+1=0,\quad (x-1)^2=0$

따라서 $\quad x=1$

❷ 등식 ㄴ의 우변을 전개하면

$$(x+1)(x-1)+1=x^2-1+1=x^2$$

따라서 등식 ㄴ의 좌변과 우변은 같으므로 이 등식을 성립하게 하는 실수 x의 값은 모든 실수이다.

내용 연구

❶ 미정계수법은 항등식의 뜻과 성질을 이용하여 정해지지 않은 계수(미정계수)를 정하는 것이며, 계수비교법과 수치대입법의 두 가지 방법이 있음을 알게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 항등식의 뜻을 이용하여 항등식의 성질을 설명할 수 있게 한다.

|풀이| $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$에서

$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$이므로

$$a-a'=0,\quad b-b'=0,\quad c-c'=0$$

따라서 $\quad a=a',\ b=b',\ c=c'$

답 풀이 참조

문제 2

|주안점| 항등식의 미정계수를 정할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $2x^2+ax=bx^2+(bc+1)x+c+3$이므로

$$2=b,\quad a=bc+1,\quad 0=c+3$$

따라서 $\quad a=-5,\ b=2,\ c=-3$

(2) $2x^2+3x-1=(a+b+c)x^2+(a-c)x-b$이므로

$$2=a+b+c,\quad 3=a-c,\quad -1=-b$$

따라서 $\quad a=2,\ b=1,\ c=-1$

답 (1) $a=-5,\ b=2,\ c=-3$ (2) $a=2,\ b=1,\ c=-1$

생각 넓히기

|지도 방향| 항등식을 이용하여 연속하는 세 자연수의 성질을 확인할 수 있게 한다.

|풀이| ❶ 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라 하면

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

우변을 전개하면 $\quad (x-1)(x+1)=x^2-1$

이고, 좌변과 같으므로 이 등식은 항등식이다.

❷ 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라 하면

$$(x+1)^2-(x-1)^2=4x$$

좌변을 전개하면

$$(x+1)^2-(x-1)^2=x^2+2x+1-x^2+2x-1$$
$$=4x$$

이고, 우변과 같으므로 이 등식은 항등식이다.

답 풀이 참조

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 나머지정리의 뜻을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

② 인수정리의 뜻을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

③ 조립제법을 알고, 이를 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

▌지도상의 유의점

① 나머지정리를 항등식의 뜻과 성질로부터 이해하게 한다.

② 나머지정리는 다항식을 일차식으로 나눌 때 사용할 수 있음을 이해하게 하고, 나누는 일차식의 계수가 1이 아닌 경우에도 적용됨을 알게 한다.

③ 인수정리는 나머지정리의 특수한 경우임을 알게 한다.

④ 나머지정리와 인수정리는 삼차 이상의 다항식의 인수분해에 활용될 뿐만 아니라 삼차 이상의 방정식의 풀이에도 활용되므로 충분히 숙지하고 활용할 수 있게 한다.

⑤ 나머지정리와 인수정리를 활용하는 복잡한 문제는 다루지 않는다.

▌용어와 기호

- 나머지정리(剩餘定理, remainder theorem)
- 인수정리(因數定理, factor theorem)
- 조립제법(組立除法, synthetic division)

▌준비하기

| 주안점 | 다항식의 나눗셈에서 몫과 나머지를 구할 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | (1)

$$\begin{array}{r|l} & x-4 \\ \hline x+2 & x^2-2x+3 \\ & x^2+2x \\ \hline & -4x+3 \\ & -4x-8 \\ \hline & 11 \end{array}$$

몫: $x-4$, 나머지: 11

(2)

$$\begin{array}{r|l} & x^2-1 \\ \hline x+2 & x^3+2x^2-x-5 \\ & x^3+2x^2 \\ \hline & -x-5 \\ & -x-2 \\ \hline & -3 \end{array}$$

몫: x^2-1, 나머지: -3

답 (1) 몫: $x-4$, 나머지: 11
(2) 몫: x^2-1, 나머지: -3

02 나머지정리

학습 목표
나머지정리의 뜻을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

준비하기
다음 다항식을 일차식 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오.
(1) x^2-2x+3
(2) x^3+2x^2-x-5

● 나머지정리

생각 열기 다항식 $f(x)=2x^2+x-3$을 일차식 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 알아보려고 한다.

❶ 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구해 보자.

❷ $f(-1)$의 값을 구하여 ❶의 결과와 비교해 보자.

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 간편하게 구하는 방법을 알아보자.

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 다음이 성립한다.

1

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\alpha$를 대입하면

$$R=f(\alpha)$$

이다.

다가서기
어떤 수가 3의 배수인지 아닌지는 직접 3으로 나누지 않고 각 자리의 숫자의 합이 3으로 나누어지는지 확인하여 알 수 있다.
다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지도 직접 나누지 않고 알 수 있는 방법이 있다.

이상을 정리하면 다음과 같은 **나머지정리**를 얻는다.

나머지정리
다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$$R=f(\alpha)$$

보기 다항식 $f(x)=x^3-3x^2-4x+2$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지 R는
$$R=f(-2)=(-2)^3-3\times(-2)^2-4\times(-2)+2=-10$$

문제 1 다항식 $f(x)=4x^3-6x^2-2x+1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x+1$ (2) $x-2$ (3) $x-\frac{1}{2}$

28

● 나머지정리

평가 기준

상	항등식의 성질을 이용하여 나머지정리를 이끌어내는 과정을 설명하고, 나머지정리를 활용하여 문제를 해결하고 그 과정을 설명할 수 있다.
중	항등식의 성질을 이용하여 나머지정리를 이끌어내고, 나머지정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
하	나머지정리를 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 다항식 $f(x)$를 일차식 $x+1$로 직접 나누어 구한 나머지와 $f(-1)$의 값을 비교하여 나머지정리를 직관적으로 이해하게 한다.

❶

$$\begin{array}{r|l} & 2x-1 \quad \leftarrow \text{몫} \\ \hline x+1 & 2x^2+\ x-3 \\ & 2x^2+2x \\ \hline & -x-3 \\ & -x-1 \\ \hline & -2 \quad \leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

❷ $f(-1)=2\times(-1)^2+(-1)-3=-2$

따라서 ❶에서 구한 나머지와 $f(-1)$의 값이 같다.

다음을 통해 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 방법을 알아보자.

함께하기 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

> 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
>
> $$f(x)=(ax+b)Q(x)+R=a\left(x+\boxed{}\right)Q(x)+R$$
>
> 이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\boxed{}$를 대입하면 $R=f\left(\boxed{}\right)$이다.

2 위의 활동에서 알 수 있듯이 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

문제 2 다항식 $f(x)=4x^3-3x+1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $2x+1$ (2) $3x-1$

예제 1 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 5이고, $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 -4이다. $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

3 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 나머지를 $ax+b$로 놓는다.

풀이 다항식 $f(x)$를 이차식 $(x-2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면 $f(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$

나머지정리에 의하여 $f(2)=5$, $f(-1)=-4$이므로

$2a+b=5$, $-a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $3x-1$이다. 답 $3x-1$

문제 3 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 3이고, $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 -5이다. $f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

29

내용 연구

1 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지가 $f(a)$와 같음을 항등식의 성질을 통해 알게 한다.

2 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지가 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$임을 이해하고, 이를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다. 이때 $f(x)$를 일차식 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때와 $ax+b$로 나누었을 때, 몫은 서로 다를 수 있지만 나머지는 서로 같음을 이해하게 한다.

3 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식, 즉 일차식 또는 상수가 되므로 $ax+b$의 꼴로 나타낼 수 있음을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 나머지정리를 이용하여 주어진 다항식을 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $f(-1)=4\times(-1)^3-6\times(-1)^2-2\times(-1)+1=-7$

(2) $f(2)=4\times2^3-6\times2^2-2\times2+1=5$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)+1=-1$

답 (1) -7 (2) 5 (3) -1

문제 2

| 주안점 | 나머지정리를 이용하여 주어진 다항식을 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=2$

(2) $f\left(\frac{1}{3}\right)=4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\times\left(\frac{1}{3}\right)+1=\frac{4}{27}$

답 (1) 2 (2) $\frac{4}{27}$

문제 3

| 주안점 | 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$의 꼴임을 알고, 그 나머지를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 다항식 $f(x)$를 이차식 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$f(x)=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$$

나머지정리에 의하여

$$f(1)=3,\quad f(-3)=-5$$

이므로

$$a+b=3,\quad -3a+b=-5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=1$$

따라서 구하는 나머지는 $2x+1$ 답 $2x+1$

함께하기

| 지도 방향 | 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 방법도 나머지정리와 같은 방법임을 이해하게 한다.

| 풀이 | 주어진 등식에서

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R=a\left(x+\boxed{\frac{b}{a}}\right)Q(x)+R$$

양변에 $x=\boxed{-\frac{b}{a}}$를 대입하면 $R=f\left(\boxed{-\frac{b}{a}}\right)$

답 $\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}$

인수정리

평가 기준

상	인수정리를 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	인수정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
하	인수정리를 이용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.

내용 연구

1. 인수정리는 나머지정리에서 나머지가 0인 경우를 뜻하므로 인수정리는 나머지정리의 특수한 경우임을 이해하게 한다.

2. 다음은 모두 같은 뜻임을 이해하게 한다.
   - 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
   - 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.
   - 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
   $$f(x)=(x-\alpha)g(x)$$
   이다.
   - 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이다.

3. 인수정리는 직접 나눗셈을 하지 않고도 일차식을 인수로 갖는지 판단하는 데 활용된다.
   x에 대한 다항식 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.
   ① $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
   ② $f(\alpha)\neq 0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어지지 않는다.

문제 풀이

문제 4

|주안점| 인수정리를 이용하여 미정계수를 정할 수 있게 한다.

|풀이| $f(2)=2^3-3\times2^2+2a+6=2a+2=0$

따라서 $\quad a=-1$

답 -1

문제 5

|주안점| 인수정리를 이용하여 미정계수를 정할 수 있게 한다.

|풀이| $f(1)=2\times1^3+a\times1^2+1+b=0$

따라서 $\quad a+b=-3 \qquad \cdots\cdots ①$

$f(2)=2\times2^3+a\times2^2+2+b=0$

따라서 $\quad 4a+b=-18 \qquad \cdots\cdots ②$

①, ②를 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=2$

답 $a=-5,\ b=2$

인수정리

1 나머지정리에 의하여 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다. 이때 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어지고, $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

2 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $x-\alpha$는 $f(x)$의 인수이다.

이상을 정리하면 다음과 같은 **인수정리**를 얻는다.

3 **인수정리**

다항식 $f(x)$에 대하여
❶ $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
❷ $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

예제 2 다항식 $f(x)=x^3-2x^2+4x+a$가 $x+1$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하시오.

풀이 $f(x)=x^3-2x^2+4x+a$가 $x+1$로 나누어떨어지려면 인수정리에 의하여 $f(-1)=0$이어야 한다.

$$f(-1)=(-1)^3-2\times(-1)^2+4\times(-1)+a$$
$$=-7+a$$
$$=0$$

따라서 $\quad a=7$

답 7

문제 4 다항식 $f(x)=x^3-3x^2+ax+6$이 $x-2$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하시오.

문제 5 다항식 $f(x)=2x^3+ax^2+x+b$가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지도록 상수 a, b의 값을 정하시오.

30

지도 자료

인수 찾기

> 계수가 정수인 다항식
> $$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
> $$(n\geq1,\ a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n\text{은 정수},\ a_0a_n\neq0)$$
> 이 일차식 $ax-b$(a, b는 서로소인 정수)를 인수로 가지면 a는 a_n의 약수이고 b는 a_0의 약수이다.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$=(ax-b)Q(x)$$

로 놓고, $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$이므로 양변에 $x=\dfrac{b}{a}$를 대입하면

$$f\left(\frac{b}{a}\right)=a_n\left(\frac{b}{a}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{b}{a}\right)+a_0$$
$$=0$$

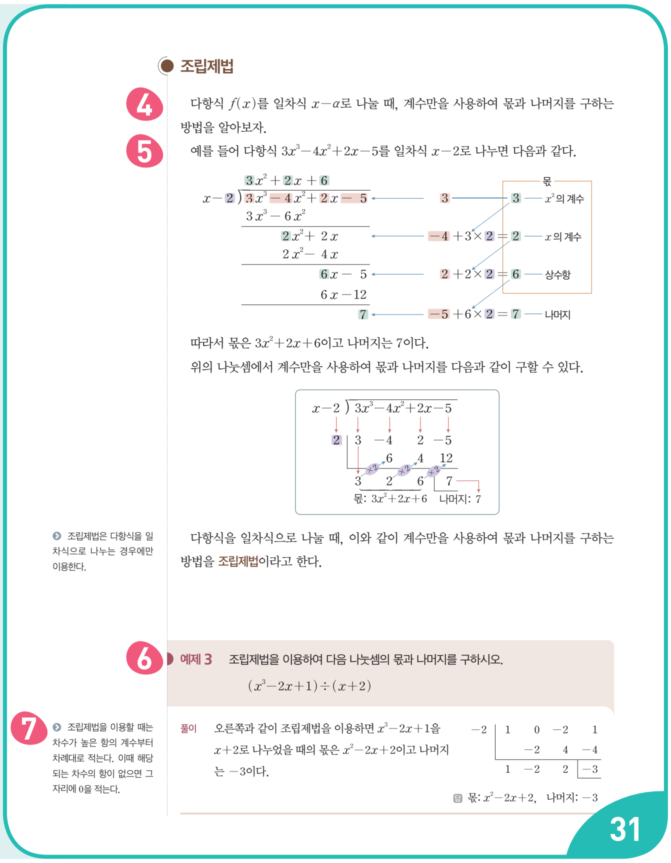
위의 식의 양변에 a^n을 곱하면

$$a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}a+\cdots+a_1ba^{n-1}+a_0a^n=0$$

따라서 $\quad a_nb^n=-a(a_{n-1}b^{n-1}+a_{n-2}b^{n-2}a+\cdots+a_1ba^{n-2}+a_0a^{n-1})$

이때 a와 b는 서로소이므로 a_n은 a로 나누어떨어진다.

$a_0a^n=-b(a_nb^{n-1}+a_{n-1}b^{n-2}a+\cdots+a_1a^{n-1})$에서 마찬가지 방법으로 a_0은 b로 나누어떨어진다.



● 조립제법

4 5 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때, 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 알아보자.

예를 들어 다항식 $3x^3-4x^2+2x-5$를 일차식 $x-2$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2+2x+6 \\
x-2 & 3x^3-4x^2+2x-5 \\
 & 3x^3-6x^2 \\ \hline
 & 2x^2+2x \\
 & 2x^2-4x \\ \hline
 & 6x-5 \\
 & 6x-12 \\ \hline
 & 7
\end{array}$$

3 — 3 — x^2의 계수

$-4+3\times2=2$ — x의 계수

$2+2\times2=6$ — 상수항

$-5+6\times2=7$ — 나머지

몫

따라서 몫은 $3x^2+2x+6$이고 나머지는 7이다.

위의 나눗셈에서 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 다음과 같이 구할 수 있다.

$x-2\ )\ 3x^3-4x^2+2x-5$

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & -4 & 2 & -5 \\
 & & 6 & 4 & 12 \\ \hline
 & 3 & 2 & 6 & 7
\end{array}$$

몫: $3x^2+2x+6$ 나머지: 7

조립제법은 다항식을 일차식으로 나누는 경우에만 이용한다.

다항식을 일차식으로 나눌 때, 이와 같이 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

6 **예제 3** 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$(x^3-2x+1)\div(x+2)$

풀이 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 x^3-2x+1을 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 x^2-2x+2이고 나머지는 -3이다.

$$\begin{array}{c|cccc}
-2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
 & & -2 & 4 & -4 \\ \hline
 & 1 & -2 & 2 & -3
\end{array}$$

답 몫: x^2-2x+2, 나머지: -3

7 조립제법을 이용할 때는 차수가 높은 항의 계수부터 차례대로 적는다. 이때 해당되는 차수의 항이 없으면 그 자리에 0을 적는다.

31

● 조립제법

내용 연구

4 조립제법을 구체적인 예를 통해 설명하고, 이를 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 능숙하게 구할 수 있게 한다.

5 x에 대한 삼차식 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫은 이차식이고, 나머지는 상수이다. 즉, 몫을 px^2+qx+r라 하고, 나머지를 R라 하면

$$\begin{aligned}
&ax^3+bx^2+cx+d \\
&=(x-\alpha)(px^2+qx+r)+R \\
&=px^3+(q-\alpha p)x^2+(r-\alpha q)x+(R-\alpha r)
\end{aligned}$$

이때 양변의 계수를 비교하면

$$\begin{cases} a=p \\ b=q-\alpha p \\ c=r-\alpha q \\ d=R-\alpha r \end{cases},\quad \begin{cases} p=a \\ q=b+\alpha p \\ r=c+\alpha q \\ R=d+\alpha r \end{cases}$$

이 결과로부터 다음과 같이 몫 px^2+qx+r의 계수 p, q, r를 정하고, 나머지 R를 구할 수 있다.

$$\begin{array}{c|cccc}
\alpha & a & b & c & d \\
 & & \alpha p & \alpha q & \alpha r \\ \hline
 & a & b+\alpha p & c+\alpha q & d+\alpha r \\
 & \| & \| & \| & \| \\
 & p & q & r & R
\end{array}$$

몫: px^2+qx+r 나머지: R

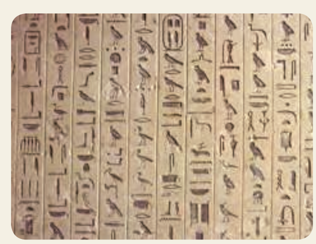
6 다항식을 일차식으로 나눌 때 나머지만을 구할 때는 나머지정리를 이용하고, 몫과 나머지를 동시에 구할 때는 조립제법을 이용함을 알게 한다. 나머지정리와 조립제법은 다항식을 일차식으로 나누는 경우에 한하여 사용하는 것이고, 다항식을 이차 이상의 식으로 나눌 때는 나눗셈을 직접 해야 함을 알게 한다.

7 조립제법을 이용할 때 해당되는 차수가 없는 항, 즉 계수가 0인 항은 그 자리에 0을 적어야 함을 알게 한다.

읽기 자료

문자의 사용

인류 최초의 문자는 기원전 3000년경에 시작된 고대 메소포타미아 수메르인들의 쐐기 문자를 꼽아 왔으나, 1998년 이집트의 아비도스 유적에서는 수메르의 쐐기 문자보다 200년~300년 앞선 상형 문자가 발견되었다. 점토판에 새겨진 수메르의 쐐기 문자나 아비도스의 상형 문자 기록은 주로 인구, 세금, 토지의 계산에 대한 것이다. 특히 수메르의 점토판에서는 간단한 일차방정식, 이차방정식의 풀이를 볼 수 있다.



고대 이집트의 상형 문자

수와 개수 세기에 대한 기록은 최초의 문자 이전으로 거슬러 올라간다. 콩고 공화국의 이샨고에서 발견된 이샨고 뼈(Ishango bone)는 10500년 전의 것으로서 뼈에 새겨진 개수 세기에서 덧셈과 뺄셈의 흔적과 소수(素數)에 대한 생각을 찾아볼 수 있다.

지금까지 발견된 수학의 기록 중에서 가장 오래된 것은 1937년 체코슬로바키아에서 발견된 32000년 전의 늑대뼈이다. 이 늑대뼈에는 55개 줄이 5개의 묶음으로 새겨져 있는데, 이 다섯 묶음의 개수 세기(卌)는 오늘날까지 인류가 쓰고 있는 방법이다.

내용 연구

❶ 다항식 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}\,(a\neq1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하고, 다항식 $P(x)$를 $ax+b$로 나눌 때와 비교하면

$$P(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R=(ax+b)\frac{1}{a}Q(x)+R$$

이므로 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

따라서 조립제법을 이용하여 몫을 구할 때, 나누는 식의 일차항의 계수가 1이 아닌 경우에는 조립제법을 이용하여 몫을 구한 다음 일차항의 계수로 나누어야 함을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 6

| 주안점 | 조립제법을 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ & & 2 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{-7} \end{array}$$

몫: x^2-x-1, 나머지: -7

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 3 & 0 & 15 \\ & & -6 & 9 & -27 \\ \hline & 2 & -3 & 9 & \boxed{-12} \end{array}$$

몫: $2x^2-3x+9$, 나머지: -12

답 (1) 몫: x^2-x-1, 나머지: -7
(2) 몫: $2x^2-3x+9$, 나머지: -12

문제 7

| 주안점 | 조립제법을 이용하여 다항식을 $ax+b$의 꼴인 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 $2x^3+3x^2-x-4$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+2x-2$이고, 나머지는 -3이다. 즉,

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 3 & -1 & -4 \\ & & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & \boxed{-3} \end{array}$$

▶ **문제 6** 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3-3x^2+x-5)\div(x-2)$ (2) $(2x^3+3x^2+15)\div(x+3)$

❶ ▶ **예제 4** 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$(2x^3+3x^2-4x-5)\div(2x-1)$

풀이 $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 $2x^3+3x^2-4x-5$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+4x-2$이고 나머지는 -6이다. 즉,

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & -4 & -5 \\ & & 1 & 2 & -1 \\ \hline & 2 & 4 & -2 & \boxed{-6} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3+3x^2-4x-5&=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-2)-6 \\ &=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+2x-1)-6 \\ &=(2x-1)(x^2+2x-1)-6 \end{aligned}$$

따라서 $2x^3+3x^2-4x-5$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+2x-1이고 나머지는 -6이다.

답 몫: x^2+2x-1, 나머지: -6

▶ **문제 7** 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(2x^3+3x^2-x-4)\div(2x+1)$ (2) $(6x^3-x^2-5x+3)\div(3x-2)$

생각 넓히기 문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

나머지정리를 활용하여 2018^{10}을 2017로 나누었을 때의 나머지를 구하려고 한다.

활동 ❶ 다항식 x^{10}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$x^{10}=(x-1)Q(x)+R \quad \cdots\cdots ①$$

가 성립한다. 이때 R의 값을 구해 보자.

활동 ❷ 조립제법을 이용하여 몫 $Q(x)$를 구하고, $Q(2018)$이 자연수임을 확인해 보자.

활동 ❸ ①의 양변에 $x=2018$을 대입하고, 활동 ❶과 활동 ❷의 결과를 이용하여 2018^{10}을 2017로 나누었을 때의 나머지를 구해 보자.

32

$$\begin{aligned} 2x^3+3x^2-x-4&=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x-2)-3 \\ &=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x-1)-3 \\ &=(2x+1)(x^2+x-1)-3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 몫은 x^2+x-1이고, 나머지는 -3이다.

(2) $3x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면

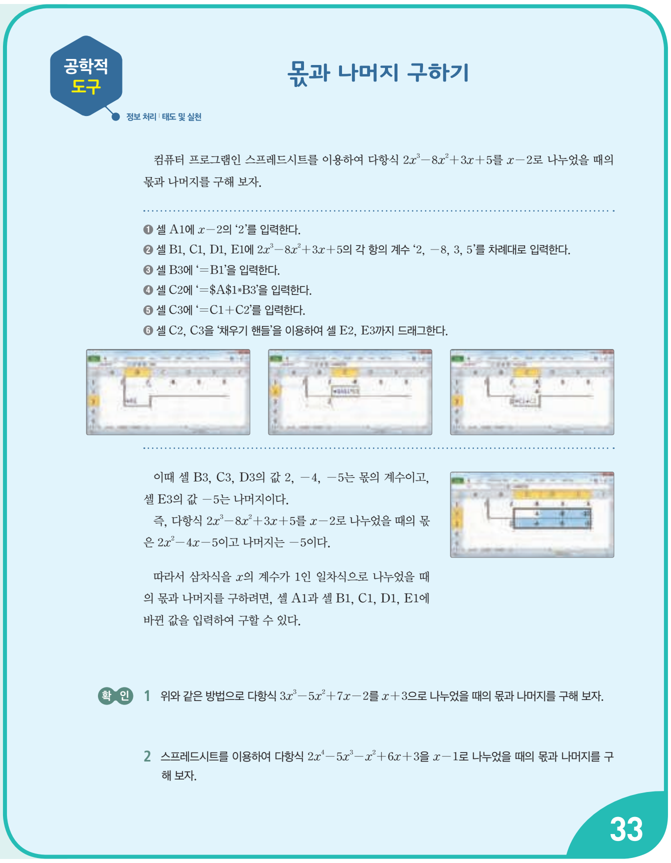
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 6 & -1 & -5 & 3 \\ & & 4 & 2 & -2 \\ \hline & 6 & 3 & -3 & \boxed{1} \end{array}$$

$6x^3-x^2-5x+3$을 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $6x^2+3x-3$이고, 나머지는 1이다. 즉,

$$\begin{aligned} 6x^3-x^2-5x+3&=\left(x-\frac{2}{3}\right)(6x^2+3x-3)+1 \\ &=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(2x^2+x-1)+1 \\ &=(3x-2)(2x^2+x-1)+1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 몫은 $2x^2+x-1$이고, 나머지는 1이다.

답 (1) 몫: x^2+x-1, 나머지: -3
(2) 몫: $2x^2+x-1$, 나머지: 1



공학적 도구

몫과 나머지 구하기

정보 처리 | 태도 및 실천

컴퓨터 프로그램인 스프레드시트를 이용하여 다항식 $2x^3-8x^2+3x+5$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 보자.

❶ 셀 A1에 $x-2$의 '2'를 입력한다.
❷ 셀 B1, C1, D1, E1에 $2x^3-8x^2+3x+5$의 각 항의 계수 '2, -8, 3, 5'를 차례대로 입력한다.
❸ 셀 B3에 '=B1'을 입력한다.
❹ 셀 C2에 '=$A$1*B3'을 입력한다.
❺ 셀 C3에 '=C1+C2'를 입력한다.
❻ 셀 C2, C3을 '채우기 핸들'을 이용하여 셀 E2, E3까지 드래그한다.

이때 셀 B3, C3, D3의 값 2, -4, -5는 몫의 계수이고, 셀 E3의 값 -5는 나머지이다.

즉, 다항식 $2x^3-8x^2+3x+5$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-4x-5$이고 나머지는 -5이다.

따라서 삼차식을 x의 계수가 1인 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하려면, 셀 A1과 셀 B1, C1, D1, E1에 바뀐 값을 입력하여 구할 수 있다.

확인 1 위와 같은 방법으로 다항식 $3x^3-5x^2+7x-2$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 보자.

2 스프레드시트를 이용하여 다항식 $2x^4-5x^3-x^2+6x+3$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 보자.

33

생각 넓히기

| 지도 방향 | 나머지정리를 활용하여 큰 수의 나눗셈에서 나머지를 간단하게 구할 수 있음을 구체적인 예를 통해 알게 한다.

| 풀이 | ❶ ①의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

❷ 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 x^{10}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫은

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \cdots & \boxed{1} \end{array}$$

$$Q(x)=x^9+x^8+\cdots+x+1$$

이다. 따라서

$$Q(2018)=2018^9+2018^8+\cdots+2018+1$$

이므로 $Q(2018)$은 자연수이다.

❸ ①의 양변에 $x=2018$을 대입하면 $R=1$이므로

$$2018^{10}=2017\times Q(2018)+1$$

즉, 2018^{10}을 2017로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 ❶ 1 ❷ 풀이 참조 ❸ 1

공학적 도구 ▸ 몫과 나머지 구하기

| 지도 방향 | 조립제법의 원리를 이해하고, 컴퓨터 프로그램인 스프레드시트를 이용하여 (다항식)÷(일차식)을 할 수 있게 한다.

| 풀이 | 1 ❶ 셀 A1에 $x+3$의 '-3'을 입력한다.

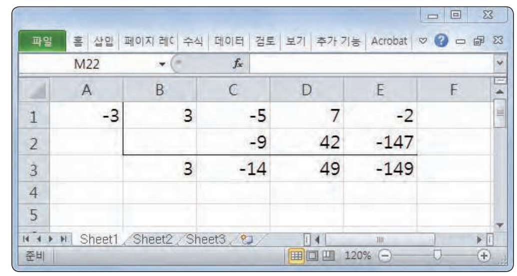
❷ 셀 B1, C1, D1, E1에 $3x^3-5x^2+7x-2$의 각 항의 계수 '3, -5, 7, -2'를 차례대로 입력한다.

❸ 셀 B3에 '=B1'을 입력한다.

❹ 셀 C2에 '=$A$1*B3'을 입력한다.

❺ 셀 C3에 '=C1+C2'를 입력한다.

❻ 셀 C2, C3을 '채우기 핸들'을 이용하여 셀 E2, E3까지 드래그한다.



	A	B	C	D	E	F
1	-3	3	-5	7	-2	
2			-9	42	-147	
3		3	-14	49	-149	
4						
5						

이때 셀 B3, C3, D3의 값 3, -14, 49는 몫의 계수이고, 셀 E3의 값 -149는 나머지이다.

즉, 다항식 $3x^3-5x^2+7x-2$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫은 $3x^2-14x+49$이고, 나머지는 -149이다.

2 ❶ 셀 A1에 $x-1$의 '1'을 입력한다.

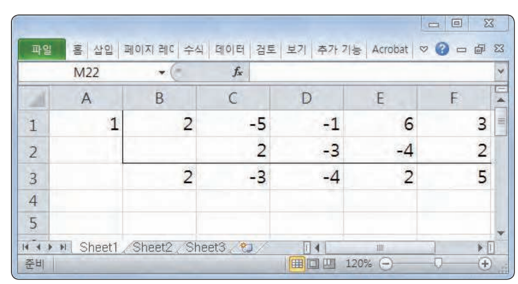
❷ 셀 B1, C1, D1, E1, F1에 $2x^4-5x^3-x^2+6x+3$의 각 항의 계수 '2, -5, -1, 6, 3'을 차례대로 입력한다.

❸ 셀 B3에 '=B1'을 입력한다.

❹ 셀 C2에 '=$A$1*B3'을 입력한다.

❺ 셀 C3에 '=C1+C2'를 입력한다.

❻ 셀 C2, C3을 '채우기 핸들'을 이용하여 F2, F3까지 드래그한다.



	A	B	C	D	E	F
1	1	2	-5	-1	6	3
2			2	-3	-4	2
3		2	-3	-4	2	5
4						
5						

이때 셀 B3, C3, D3, E3의 값 2, -3, -4, 2는 몫의 계수이고, 셀 F3의 값 5는 나머지이다.

즉, 다항식 $2x^4-5x^3-x^2+6x+3$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $2x^3-3x^2-4x+2$이고, 나머지는 5이다.

답 1 몫: $3x^2-14x+49$, 나머지: -149
2 몫: $2x^3-3x^2-4x+2$, 나머지: 5

소단원 지도 개관

지도 목표

① 인수분해 공식을 이해하고 이를 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

② 식의 변형, 치환, 인수정리, 조립제법 등을 이용하여 다항식의 인수분해를 할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 곱셈 공식의 역 과정으로 인수분해 공식을 이해할 수 있게 하고 복잡한 인수분해 문제는 다루지 않는다.

② 다항식의 인수분해는 계수의 범위에 따라 달라진다.
x^4-2x^2-3을 유리수의 범위에서 인수분해하면

$$(x^2-3)(x^2+1)$$

실수의 범위에서 인수분해하면

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$$

복소수의 범위에서 인수분해하면

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-i)(x+i)$$

이다. 하지만 특별한 언급이 없으면 유리수 계수의 범위에서 인수분해하는 것으로 한다.

| 참고 | 복소수의 개념과 복소수의 범위에서 인수분해는 'Ⅱ-1. 복소수와 이차방정식'에서 다룬다.

③ 인수분해는 주어진 다항식을 그보다 차수가 낮으면서 더 이상 분해되지 않는 다항식들의 곱으로 나타내는 것임을 이해하게 한다. 예를 들어 x^4-1을 인수분해하면 $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$이 아니라 $x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$임을 알게 한다.

④ 두 개 이상의 문자를 포함하는 식은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하게 한다.

준비하기

| 주안점 | 간단한 식의 인수분해를 할 수 있는지 확인한다.

답 (1) $ab(5a-3b)$ (2) $(x-2)(x-3)$

● 인수분해 공식

평가기준
상 다양한 형태의 다항식을 인수분해 공식, 치환, 인수정리 등을 이용하여 능숙하게 인수분해하고 그 과정을 설명할 수 있다.
중 여러 가지 다항식을 인수분해 공식, 치환, 인수정리 등을 이용하여 능숙하게 인수분해할 수 있다.
하 인수분해 공식 또는 인수정리를 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있다.

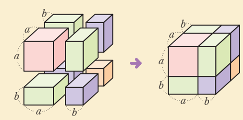
03 인수분해

학습 목표
다항식의 인수분해를 할 수 있다.

준비하기
다음 식을 인수분해하시오.
(1) $5a^2b-3ab^2$
(2) x^2-5x+6

● 인수분해 공식

생각 열기 다음 그림과 같이 직육면체 모양의 블록 8개를 맞추어 한 모서리의 길이가 $a+b$인 정육면체를 만들었다.



▶ 주어진 도형의 부피를 이용하여 다음 등식이 성립함을 설명해 보자.

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 인수분해는 다항식의 전개 과정을 거꾸로 생각한 것이다.

1
$$\underbrace{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}_{\text{전개}}\overset{\text{인수분해}}{=}(a+b)^3$$

다음 인수분해 공식은 17쪽의 **곱셈 공식 (1)**과 18쪽의 **곱셈 공식 (2)**에서 얻은 것이다.

다가서기
고대 그리스 사람들은 대수적 연산을 하기 위해 도형을 이용하여 여러 가지 항등식을 만들었다고 한다.
이러한 항등식은 다항식의 인수분해에 이용되고, 다항식의 인수분해는 방정식의 풀이에 이용된다.

그리스 로마 시대의 파피루스

인수분해 공식

❶ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
❷ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
❸ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
❹ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
❺ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
❻ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
2 ❼ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

34

생각 열기

| 지도 방향 | 8개의 작은 직육면체의 부피의 합과 큰 정육면체의 부피가 같음을 이용하여 인수분해 공식을 이해하게 한다.

▶ 8개의 작은 직육면체의 부피의 합은

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

큰 정육면체의 부피는 $(a+b)^3$

8개의 작은 직육면체의 부피의 합은 큰 정육면체의 부피와 같으므로 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

내용 연구

1 인수분해는 다항식의 전개의 역 과정임을 설명하고, 곱셈 공식으로부터 인수분해 공식을 이해하게 한다.

2 • $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3$
$=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)$
$=a^2(a+b)-b(a-b)(a+b)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

• $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

3 **예제 1** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^3+6x^2+12x+8$ (2) a^3-27b^3

풀이 (1) $x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2+2^3$
$=(x+2)^3$

(2) $a^3-27b^3=a^3-(3b)^3$
$=(a-3b)\{a^2+a\times 3b+(3b)^2\}$
$=(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

답 (1) $(x+2)^3$ (2) $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

문제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^3-9x^2+27x-27$ (2) x^3-1
(3) $a^2+4b^2+c^2-4ab+4bc-2ca$ (4) $27a^3+8b^3$

인수분해 공식을 직접 이용할 수 없는 경우에는 공식을 이용할 수 있도록 식을 적절히 변형한다.

4 **예제 2** 다음 식을 인수분해하시오.

$(x^2+2x)(x^2+2x-1)-6$

공통부분을 하나의 문자로 놓고 인수분해한다.

풀이 $x^2+2x=X$로 놓으면
$(x^2+2x)(x^2+2x-1)-6=X(X-1)-6$
$=X^2-X-6=(X-3)(X+2)$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+2)$
$=(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$

답 $(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x+y)^2+3(x+y)-10$ (2) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)+3$

35

3 인수분해 공식을 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다. 다항식의 인수분해는 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낸 것이다. 일반적으로 다항식을 인수분해할 때는 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 인수분해한다.

4 치환을 이용하여 인수분해할 때는 치환된 문자에 대한 다항식을 인수분해한 다음 그 문자에 원래의 식을 대입하고, 필요한 경우 해당 부분을 다시 인수분해하게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 인수분해 공식을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x^3-9x^2+27x-27$
$=x^3-3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2-3^3$
$=(x-3)^3$

(2) $x^3-1=(x-1)(x^2+x\times 1+1^2)$
$=(x-1)(x^2+x+1)$

(3) $a^2+4b^2+c^2-4ab+4bc-2ca$
$=a^2+(-2b)^2+(-c)^2+2\times a\times(-2b)$
$+2\times(-2b)\times(-c)+2\times(-c)\times a$
$=(a-2b-c)^2$

(4) $27a^3+8b^3=(3a)^3+(2b)^3$
$=(3a+2b)\{(3a)^2-3a\times 2b+(2b)^2\}$
$=(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$

답 (1) $(x-3)^3$
(2) $(x-1)(x^2+x+1)$
(3) $(a-2b-c)^2$
(4) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$

문제 2

|주안점| 공통부분을 치환하여 인수분해할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x+y=X$로 놓으면
$(x+y)^2+3(x+y)-10$
$=X^2+3X-10$
$=(X+5)(X-2)$
$=(x+y+5)(x+y-2)$

(2) $x^2-3x+1=X$로 놓으면
$(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)+3$
$=X(X+4)+3$
$=X^2+4X+3$
$=(X+1)(X+3)$
$=(x^2-3x+2)(x^2-3x+4)$
$=(x-1)(x-2)(x^2-3x+4)$

답 (1) $(x+y+5)(x+y-2)$
(2) $(x-1)(x-2)(x^2-3x+4)$

읽기 자료

산술의 기본 정리와 인수분해의 유일성

고대 그리스의 수학자 유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)는 '1보다 큰 자연수는 오직 한 가지 방법에 의하여 소수의 곱으로 나타내어진다.'라는 산술의 기본 정리를 밝혔다.
그 후 1802년에 독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)는 '이차 이상의 다항식은 더 이상 인수분해가 되지 않는 다항식의 곱으로 유일하게 인수분해된다.'라는 다항식의 인수분해 정리를 밝혀 복잡한 다항식을 쉽게 다룰 수 있도록 하였다.

1 **예제 3** 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-x^2-12　　(2) x^4+x^2+1

풀이 (1) $x^2=X$로 놓으면

$$x^4-x^2-12=X^2-X-12=(X-4)(X+3)$$
$$=(x^2-4)(x^2+3)=(x+2)(x-2)(x^2+3)$$

(2) A^2-B^2의 꼴로 변형하면

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

답 (1) $(x+2)(x-2)(x^2+3)$　(2) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2) $x^2=X$로 놓았을 때, X에 대한 이차식이 인수분해되지 않으면 A^2-B^2의 꼴로 변형해 본다.

문제 3 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4-5x^2+4　　(2) x^4-8x^2-9

(3) x^4+2x^2+9　　(4) $x^4-3x^2y^2+9y^4$

2 두 개 이상의 문자를 포함하는 식을 인수분해할 경우에는 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

예제 4 다항식 $2x^2-5xy-3y^2+x+4y-1$을 인수분해하시오.

풀이 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$2x^2-5xy-3y^2+x+4y-1$$
$$=2x^2-(5y-1)x-3y^2+4y-1$$
$$=2x^2-(5y-1)x-(3y-1)(y-1)$$
$$=\{x-(3y-1)\}\{2x+(y-1)\}$$
$$=(x-3y+1)(2x+y-1)$$

$$\begin{array}{llcr} 1 & -(3y-1) & \longrightarrow & -6y+2 \\ 2 & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ \hline & & & -5y+1 \end{array}$$

답 $(x-3y+1)(2x+y-1)$

문제 4 다항식 $2x^2-xy-y^2+3x+1$을 인수분해하시오.

36

내용 연구

1 x^4-x^2-12와 같이 x에 대한 차수가 짝수인 항으로만 이루어진 다항식인 복이차식의 인수분해는 $x^2=X$로 치환하는 방법이나 A^2-B^2의 꼴로 변형하는 방법이 있음을 알게 한다.

2 두 개 이상의 문자를 포함하고 있는 다항식을 인수분해할 때 문자의 차수가 모두 같은 경우에는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해해도 그 결과는 같음을 알게 한다.

문제 풀이

문제 3

|주안점| $x^2=X$로 치환하거나 다항식을 A^2-B^2의 꼴로 변형하여 인수분해할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x^2=X$로 놓으면

$$x^4-5x^2+4=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$$
$$=(x^2-1)(x^2-4)$$
$$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$$x^4-8x^2-9=X^2-8X-9=(X+1)(X-9)$$
$$=(x^2+1)(x^2-9)$$
$$=(x+3)(x-3)(x^2+1)$$

(3) A^2-B^2의 꼴로 변형하면

$$x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$$
$$=(x^2+3)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

(4) A^2-B^2의 꼴로 변형하면

$$x^4-3x^2y^2+9y^4$$
$$=x^4+6x^2y^2+9y^4-9x^2y^2$$
$$=(x^2+3y^2)^2-(3xy)^2$$
$$=(x^2+3xy+3y^2)(x^2-3xy+3y^2)$$

답 (1) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(2) $(x+3)(x-3)(x^2+1)$

(3) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

(4) $(x^2+3xy+3y^2)(x^2-3xy+3y^2)$

문제 4

|주안점| 두 개 이상의 문자를 포함한 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해할 수 있게 한다.

|풀이| x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$2x^2-xy-y^2+3x+1$$
$$=2x^2-(y-3)x-y^2+1$$
$$=2x^2-(y-3)x-(y+1)(y-1)$$
$$=\{x-(y-1)\}\{2x+(y+1)\}$$
$$=(x-y+1)(2x+y+1)$$

답 $(x-y+1)(2x+y+1)$

지도 자료

아이젠슈타인 판정법

독일의 수학자 아이젠슈타인(Eisenstein, F. G. M., 1823～1852)의 판정법은 어떤 다항식이 인수분해 가능한지 아닌지를 판정하는 방법 중 하나로 그 내용은 다음과 같다.

계수가 정수인 다항식

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

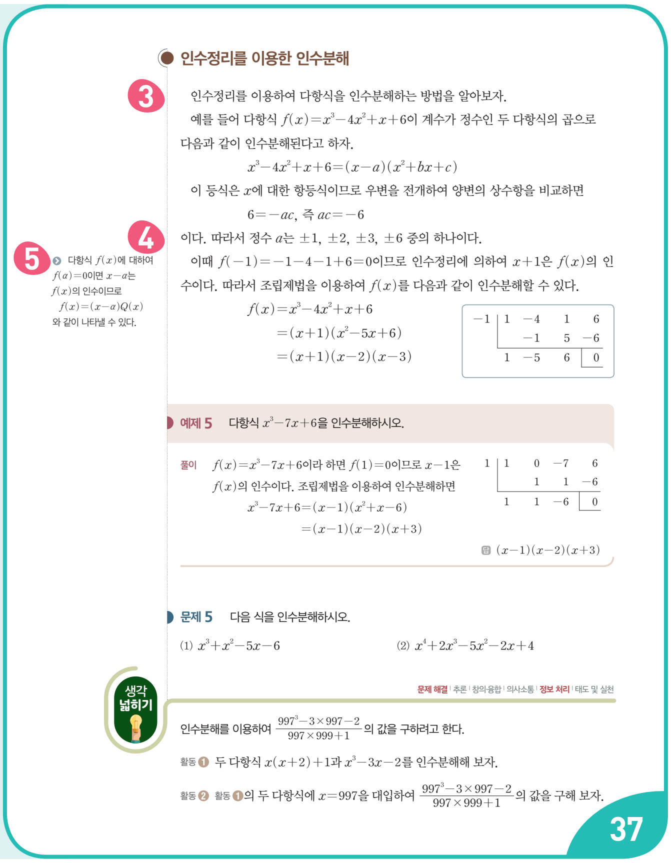
에 대하여 다음을 모두 만족시키는 소수 p가 존재하면, 다항식 $P(x)$는 유리수 범위에서 더 이상 인수분해되지 않는다.

(1) a_n은 p의 배수가 아니다.

(2) a_{n-1}, a_{n-2}, $\cdots$, a_1, a_0은 모두 p의 배수이다.

(3) a_0은 p^2의 배수가 아니다.

(단, 이 판정법에서의 배수는 음의 배수도 포함한 것이다.)



인수정리를 이용한 인수분해

3 인수정리를 이용하여 다항식을 인수분해하는 방법을 알아보자.

예를 들어 다항식 $f(x)=x^3-4x^2+x+6$이 계수가 정수인 두 다항식의 곱으로 다음과 같이 인수분해된다고 하자.

$$x^3-4x^2+x+6=(x-a)(x^2+bx+c)$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 우변을 전개하여 양변의 상수항을 비교하면

$$6=-ac, \text{ 즉 } ac=-6$$

4 이다. 따라서 정수 a는 ±1, ±2, ±3, ±6 중의 하나이다.

이때 $f(-1)=-1-4-1+6=0$이므로 인수정리에 의하여 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다. 따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$f(x)=x^3-4x^2+x+6$$
$$=(x+1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

5 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $x-\alpha$는 $f(x)$의 인수이므로 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$와 같이 나타낼 수 있다.

예제 5 다항식 x^3-7x+6을 인수분해하시오.

풀이 $f(x)=x^3-7x+6$이라 하면 $f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다. 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

답 $(x-1)(x-2)(x+3)$

문제 5 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3+x^2-5x-6 (2) $x^4+2x^3-5x^2-2x+4$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

인수분해를 이용하여 $\dfrac{997^3-3\times997-2}{997\times999+1}$의 값을 구하려고 한다.

활동 1 두 다항식 $x(x+2)+1$과 x^3-3x-2를 인수분해해 보자.

활동 2 활동 1의 두 다항식에 $x=997$을 대입하여 $\dfrac{997^3-3\times997-2}{997\times999+1}$의 값을 구해 보자.

37

|풀이| (1) $f(x)=x^3+x^2-5x-6$이라 하면 $f(-2)=0$이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ & & -2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3+x^2-5x-6=(x+2)(x^2-x-3)$$

(2) $f(x)=x^4+2x^3-5x^2-2x+4$라 하면 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 $x-1$, $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -5 & -2 & 4 \\ & & 1 & 3 & -2 & -4 \\ \hline -1 & 1 & 3 & -2 & -4 & \boxed{0} \\ & & -1 & -2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^4+2x^3-5x^2-2x+4$$
$$=(x+1)(x-1)(x^2+2x-4)$$

답 (1) $(x+2)(x^2-x-3)$

(2) $(x+1)(x-1)(x^2+2x-4)$

인수정리를 이용한 인수분해

내용 연구

3 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 인수정리에 의하여 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가짐을 이해하고, 이를 이용하여 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

4 인수정리를 이용하여 삼차 이상의 다항식 $f(x)$를 인수분해할 때, $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$$\pm\frac{(f(x)\text{의 상수항의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$$

중에서 찾을 수 있음을 구체적인 예를 통해 알게 한다.

5 다항식 $f(x)$의 인수 $x-\alpha$를 찾으면 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 나타내고 다시 $Q(x)$를 인수분해하게 한다.

문제 풀이

문제 5

|주안점| 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

생각 넓히기

|지도 방향| 복잡한 수의 계산에서 인수분해를 활용하여 그 값을 간단하게 구할 수 있음을 구체적인 예를 통해 알게 한다.

|풀이| 1 $x(x+2)+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$f(x)=x^3-3x-2$라 하면 $f(-1)=0$이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)$$
$$=(x-2)(x+1)^2$$

2 1의 결과를 이용하면

$$\frac{x^3-3x-2}{x(x+2)+1}=\frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+1)^2}=x-2$$

이므로 $x=997$을 위의 등식에 대입하면 구하는 값은

$$\frac{997^3-3\times997-2}{997\times999+1}=997-2=995$$

답 1 $x(x+2)+1=(x+1)^2$, $x^3-3x-2=(x-2)(x+1)^2$

2 995

탐구&융합 연산에 유용한 다항식의 인수분해

추론 | 창의·융합

다항식의 인수분해를 이용하면 식의 계산에서 연산 구조를 단순화시키고 연산 횟수를 줄일 수 있어서 계산을 쉽게 할 수 있다.

● $99\times99\times99+3\times99\times99+3\times99+1$의 계산

인수분해 공식 ❻

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

을 이용하면 오른쪽과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}&99\times99\times99+3\times99\times99+3\times99+1\\&=99^3+3\times99^2\times1+3\times99\times1^2+1^3\\&=(99+1)^3=100^3=1000000\end{aligned}$$

● $\sqrt{16\times17\times18\times19+1}$의 계산

연속한 네 자연수의 곱에 1을 더한 수를 나타낸 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&x(x+1)(x+2)(x+3)+1\\&=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1\\&=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1\\&=(x^2+3x+1)^2\end{aligned}$$

이를 이용하여 오른쪽과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\sqrt{16\times17\times18\times19+1}\\&=\sqrt{16(16+1)(16+2)(16+3)+1}\\&=\sqrt{(16^2+3\times16+1)^2}\\&=256+48+1\\&=305\end{aligned}$$

● 1000027이 소수가 아님을 확인하는 방법

인수분해 공식 ❼

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

을 이용하면 오른쪽과 같이 나타낼 수 있으므로 소수가 아님을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}&1000027\\&=1000000+27=100^3+3^3\\&=(100+3)(100^2-100\times3+3^2)\\&=103\times9709\end{aligned}$$

탐구 인수분해를 이용하여 다음에 답하여 보자.

(1) $97^3+9\times97^2+27\times97+27$을 계산해 보자.

(2) 999973이 소수가 아님을 확인해 보자.

38

탐구&융합 연산에 유용한 다항식의 인수분해

| 지도 방향 | 특정한 숫자를 문자처럼 생각한 다음 인수분해를 활용하여 복잡하고 큰 수의 계산을 간단히 할 수 있고, 수학적 사실을 설명할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1)

$$\begin{aligned}&97^3+9\times97^2+27\times97+27\\&=97^3+3\times97^2\times3+3\times97\times3^2+3^3\\&=(97+3)^3=100^3\\&=1000000\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}999973&=1000000-27\\&=100^3-3^3\\&=(100-3)(100^2+100\times3+3^2)\\&=97\times10309\end{aligned}$$

따라서 999973은 97과 10309의 배수이므로 소수가 아니다.

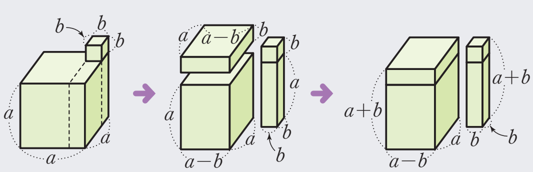
답 (1) 1000000 (2) 풀이 참조

지도 자료

인수분해 공식과 도형의 부피

직육면체 및 정육면체 조각들을 이어 붙여 큰 정육면체를 만들거나, 입체도형을 작은 직육면체와 정육면체로 분할하여도 이들의 부피는 변하지 않음을 이용하여 인수분해 공식을 설명할 수 있다.

(1) $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① [그림 1]과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정육면체 위에 한 모서리의 길이가 b인 정육면체를 붙여 부피가 a^3+b^3인 입체도형을 만든다.

② [그림 1]의 입체도형을 [그림 2]와 같이 분할하여 [그림 3]과 같이 두 개의 직육면체로 만든다.

③ [그림 3]에서 두 직육면체의 부피의 합을 구하면 다음과 같다.

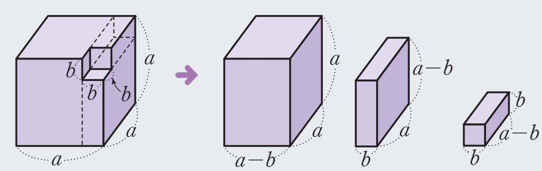
$$\begin{aligned}&a(a+b)(a-b)+b^2(a+b)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

④ [그림 1]의 입체도형의 부피와 [그림 3]의 두 직육면체의 부피의 합이 같으므로 인수분해 공식

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

이 성립함을 알 수 있다.

(2) $\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$



[그림 1] [그림 2]

① [그림 1]과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정육면체에서 한 모서리의 길이가 b인 정육면체를 잘라내어 부피가 a^3-b^3인 입체도형을 만든다.

② [그림 1]의 입체도형을 [그림 2]와 같이 분할하여 세 개의 직육면체로 만든다.

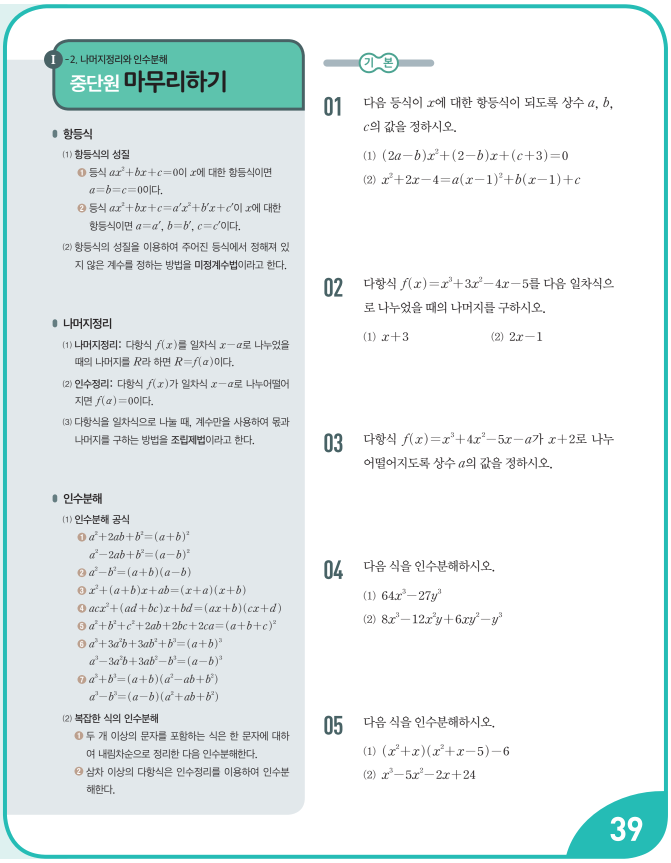
③ [그림 2]에서 세 직육면체의 부피의 합을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

④ [그림 1]의 입체도형의 부피와 [그림 2]의 세 직육면체의 부피의 합이 같으므로 인수분해 공식

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

이 성립함을 알 수 있다.


Ⅰ-2. 나머지정리와 인수분해

중단원 마무리하기

■ 항등식

(1) **항등식의 성질**

❶ 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.

❷ 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

(2) 항등식의 성질을 이용하여 주어진 등식에서 정해져 있지 않은 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라고 한다.

■ 나머지정리

(1) **나머지정리:** 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(\alpha)$이다.

(2) **인수정리:** 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

(3) 다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

■ 인수분해

(1) **인수분해 공식**

❶ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

❷ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

❸ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

❹ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

❺ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

❻ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

❼ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) **복잡한 식의 인수분해**

❶ 두 개 이상의 문자를 포함하는 식은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해한다.

❷ 삼차 이상의 다항식은 인수정리를 이용하여 인수분해한다.

기본

01 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하시오.

(1) $(2a-b)x^2+(2-b)x+(c+3)=0$

(2) $x^2+2x-4=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

02 다항식 $f(x)=x^3+3x^2-4x-5$를 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x+3$　　(2) $2x-1$

03 다항식 $f(x)=x^3+4x^2-5x-a$가 $x+2$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하시오.

04 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $64x^3-27y^3$

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

05 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x^2+x)(x^2+x-5)-6$

(2) $x^3-5x^2-2x+24$

39

중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 정할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $2a-b=0,\quad 2-b=0,\quad c+3=0$

따라서　$a=1,\ b=2,\ c=-3$

(2) 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$$x^2+2x-4=ax^2+(b-2a)x+a-b+c$$

양변에서 동류항의 계수를 비교하면

$$1=a,\quad 2=b-2a,\quad -4=a-b+c$$

따라서　$a=1,\ b=4,\ c=-1$

답 (1) $a=1,\ b=2,\ c=-3$
(2) $a=1,\ b=4,\ c=-1$

02

| 주안점 | 나머지정리를 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-4\times(-3)-5$
$=7$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\times\frac{1}{2}-5=-\frac{49}{8}$

답 (1) 7　(2) $-\frac{49}{8}$

03

| 주안점 | 인수정리를 이용하여 주어진 다항식의 미정계수를 정할 수 있게 한다.

| 풀이 | $f(-2)=(-2)^3+4\times(-2)^2-5\times(-2)-a$
$=18-a=0$

따라서　$a=18$　　답 18

04

| 주안점 | 인수분해 공식을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $64x^3-27y^3$

$$\begin{aligned}&=(4x)^3-(3y)^3\\&=(4x-3y)\{(4x)^2+4x\times3y+(3y)^2\}\\&=(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)\end{aligned}$$

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

$$\begin{aligned}&=(2x)^3-3\times(2x)^2\times y+3\times(2x)\times y^2-y^3\\&=(2x-y)^3\end{aligned}$$

답 (1) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$　(2) $(2x-y)^3$

05

| 주안점 | 치환 또는 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $x^2+x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}&(x^2+x)(x^2+x-5)-6\\&=X(X-5)-6=X^2-5X-6\\&=(X-6)(X+1)\\&=(x^2+x-6)(x^2+x+1)\\&=(x+3)(x-2)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^3-5x^2-2x+24$라 하면 $f(-2)=0$이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 1 & -5 & -2 & 24\\ & & -2 & 14 & -24\\ \hline & 1 & -7 & 12 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}x^3-5x^2-2x+24&=(x+2)(x^2-7x+12)\\&=(x+2)(x-3)(x-4)\end{aligned}$$

답 (1) $(x+3)(x-2)(x^2+x+1)$
(2) $(x+2)(x-3)(x-4)$

06

| 주안점 | 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 정하고, 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 1 | 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$$2x^2-3x+4=(a+b+c)x^2+(a-2b-c)x-2c$$

양변에서 동류항의 계수를 비교하면

$$2=a+b+c, \quad -3=a-2b-c, \quad 4=-2c$$

$c=-2$를 나머지 두 식에 대입한 다음 연립하여 풀면

$$a=1, \ b=3$$

따라서 구하는 값은 $\quad a^2+b^2+c^2=14$

| 풀이 2 | 양변에 $x=0$, $x=-1$, $x=2$를 각각 대입해도 주어진 등식이 성립해야 하므로

$x=0$을 대입하면 $4=-2c$에서 $\quad c=-2$

$x=-1$을 대입하면 $9=3b$에서 $\quad b=3$

$x=2$를 대입하면 $6=6a$에서 $\quad a=1$

따라서 구하는 값은 $\quad a^2+b^2+c^2=14$ 답 14

07

| 주안점 | 나머지정리와 인수정리를 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $f(-1)=3$에서 $\quad a-b=6 \quad \cdots\cdots$ ①

$f(-2)=0$에서 $\quad 2a-b=5 \quad \cdots\cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $\quad a=-1, \ b=-7$

답 $a=-1, \ b=-7$

08

| 주안점 | 나머지정리를 이용하여 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있게 한다.

해결 과정 $f(x)$를 $2x^2-3x-2$, 즉 $(x-2)(2x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$f(x)=(x-2)(2x+1)Q(x)+ax+b$$ ▶ 30 %

나머지정리에 의하여 $f(2)=7$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$이므로

$$f(2)=2a+b=7$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}a+b=2$$ ▶ 40 %

답 구하기 위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2, \ b=3$

따라서 구하는 나머지는 $\quad 2x+3$ ▶ 30 %

09

| 주안점 | 두 개 이상의 문자를 포함한 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해할 수 있게 한다.

표준

06 등식 $2x^2-3x+4=ax(x+1)+bx(x-2)+c(x+1)(x-2)$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

07 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 3이고, $x+2$로 나누어떨어진다고 한다. 상수 a, b의 값을 구하시오.

| 서·술·형 |

08 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 7이고, $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는 2이다. $f(x)$를 $2x^2-3x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

09 다항식 $x^2-xy-2y^2+x+7y-6$이 $(x+ay+3)(x+by+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $2b-a+c$의 값을 구하시오.

10 다항식 $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$가 x에 대한 이차식 $f(x)$의 제곱으로 인수분해될 때, 상수 k의 값과 $f(1)$의 값의 합을 구하시오.

40

| 풀이 | $x^2-xy-2y^2+x+7y-6$

$$=x^2-(y-1)x-(2y^2-7y+6)$$
$$=x^2-(y-1)x-(y-2)(2y-3)$$
$$=(x-2y+3)(x+y-2)$$

따라서 $a=-2$, $b=1$, $c=-2$이므로 구하는 값은

$$2b-a+c=2$$ 답 2

10

| 주안점 | 주어진 다항식에서 반복되는 부분을 치환한 다음 이차식의 완전제곱식을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

| 풀이 | $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$

$$=(x+2)(x+8)(x+4)(x+6)+k$$
$$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k$$

이때 $x^2+10x+16=X$로 놓으면

$$X(X+8)+k=X^2+8X+k$$

이 식이 X에 대한 완전제곱식이 되려면 $\quad k=16$

$$X^2+8X+16=(X+4)^2=(x^2+10x+20)^2$$

이므로 $\quad f(x)=x^2+10x+20$

따라서 $f(1)=31$이므로 구하는 값은

$$k+f(1)=16+31=47$$ 답 47

11 다항식 $f(x)=2x^3-3x^2+ax-1$이 $2x-1$로 나누어떨어진다고 할 때, 상수 a의 값을 구하고, $f(x)$를 인수분해하시오.

12 인수분해를 이용하여 $\frac{2018^3+1}{2017\times2018+1}$의 값을 구하시오.

발 전

사고력+

13 상수 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}에 대하여 등식

$$(x^2-2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

14 다항식 $f(x)=x^3+ax^2-7x+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

15 전력은 단위 시간당 전기 장치에 공급되는 전기 에너지로

(전력)=(전압)×(전류)

와 같이 계산한다. 어느 전기 장치에서 시각 t인 순간의 전력이 $P(t)=t^3+9t^2+23t+a$이고 전류는 $I(t)=t+5$일 때, 전압 $V(t)$에 대하여 $V(10)$의 값을 구하시오.

41

11

|주안점| 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

|풀이| $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}a-1=0$에서 $\quad a=3$

$f(x)=2x^3-3x^2+3x-1$이고, $2x-1$은 $f(x)$의 인수이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -3 & 3 & -1 \\ & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)=(2x-1)(x^2-x+1)$

답 $a=3$, $f(x)=(2x-1)(x^2-x+1)$

12

|주안점| 인수분해를 이용하여 복잡하고 큰 수의 계산을 간단히 할 수 있게 한다.

|풀이| $x=2018$이라 하면

$$\frac{2018^3+1}{2017\times2018+1}=\frac{x^3+1}{(x-1)x+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1=2019$$

답 2019

13

|주안점| 항등식의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $(x^2-2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$에 $x=1$을 대입하면

$-2^5=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$ $\quad\cdots\cdots$ ①

$x=-1$을 대입하면

$2^5=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}$ $\quad\cdots\cdots$ ②

①−②를 하면 $\quad -2\times2^5=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$

따라서 구하는 값은

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2^5=-32$

답 -32

14

|주안점| 다항식의 나눗셈과 인수정리를 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 정하고, 식의 값을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 $f(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$에서 $\quad b=6-a$ $\quad\cdots\cdots$ ①

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -7 & 6-a \\ & & 1 & a+1 & a-6 \\ \hline & 1 & a+1 & a-6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=x^3+ax^2-7x+6-a$
$=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a-6\}$ ▶ 40 %

$g(x)=x^2+(a+1)x+a-6$이라 하면

$g(1)=0$이므로 $2a-4=0$에서 $\quad a=2$

$a=2$를 ①에 대입하면 $\quad b=4$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 구하는 값은 $\quad ab=8$ ▶ 20 %

15

|주안점| 인수정리와 조립제법을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| $P(t)=(t+5)V(t)$에서 다항식 $P(t)=t^3+9t^2+23t+a$가 $t+5$를 인수로 가지므로

$P(-5)=-125+225-115+a=0$에서 $\quad a=15$

$P(t)=t^3+9t^2+23t+15=(t+5)V(t)$

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & 1 & 9 & 23 & 15 \\ & & -5 & -20 & -15 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$V(t)=t^2+4t+3$

즉, 구하는 값은 $\quad V(10)=143$

답 143

대단원 평가하기

01

| 평가 목표 | 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

| 풀이 | $A+B=3x^2-2xy-y^2$ ...... ①

$A-B=-x^2+4xy+5y^2$ ...... ②

①+②를 하면 $2A=2x^2+2xy+4y^2$

따라서 $A=x^2+xy+2y^2$

①−②를 하면 $2B=4x^2-6xy-6y^2$

따라서 $B=2x^2-3xy-3y^2$

즉, $3A+B=5x^2+3y^2$

답 $5x^2+3y^2$

02

| 평가 목표 | 다항식의 곱셈을 이용하여 전개한 다항식의 계수를 구하고, 조건을 만족시키는 상수의 값을 정할 수 있다.

| 풀이 | $abx^2+2x^2=(ab+2)x^2$에서 $ab+2=0$

따라서 $ab=-2$ ...... ①

$ax^3-2x^3=(a-2)x^3$에서 $a-2=0$

따라서 $a=2$

$a=2$를 ①에 대입하면 $b=-1$이므로 구하는 값은

$a+b=1$

답 ④

03

| 평가 목표 | 곱셈 공식을 이용하여 다항식을 전개할 수 있다.

| 풀이 | $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

$=(x^3-1)(x^3+1)=x^6-1$

답 x^6-1

04

| 평가 목표 | 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서

$4^3=40+12xy$이므로 $xy=2$

따라서 구하는 값은 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=12$

답 12

05

| 평가 목표 | 곱셈 공식의 변형을 이용하여 도형에 관한 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | $4(a+b+c)=32$에서 $a+b+c=8$

$2(ab+bc+ca)=38$에서 $ab+bc+ca=19$

즉, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=26$이므로 $\overline{DF}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{26}\,(cm)$

답 $\sqrt{26}$ cm

I 대단원 평가하기

하 ●○○ 중 ●●○ 상 ●●●

01 ●○○

두 다항식 A, B에 대하여

$A+B=3x^2-2xy-y^2$,

$A-B=-x^2+4xy+5y^2$

일 때, $3A+B$를 계산하시오.

02 ●○○

$(x^3+ax+2)(x^2+bx-2)$를 전개한 식에서 x^2과 x^3의 계수가 모두 0이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1

④ 1 ⑤ 2

03 ●○○

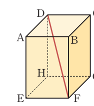
$(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$을 전개하시오.

04 ●●○

$x+y=4$, $x^3+y^3=40$일 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

05 ●●○

오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합은 32 cm이고, 겉넓이는 38 cm^{2}이다. 이 상자의 대각선 DF의 길이를 구하시오.



06 ●○○

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫은 $x-1$이고 나머지는 $2x-1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

07 ●●○

다항식 x^3-4x^2+ax+6이 x^2-x+b로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

42

06

| 평가 목표 | 다항식 $f(x)$를 몫과 나머지를 이용한 식으로 나타내고, 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $f(x)=(x^2+1)(x-1)+2x-1$

따라서 구하는 값은

$f(2)=8$

답 8

07

| 평가 목표 | 다항식의 나눗셈을 할 수 있다.

| 풀이 |

$$\begin{array}{r|l} & x\ -3 \\ \hline x^2-x+b & x^3-4x^2+\qquad ax+\ \ 6 \\ & x^3-\ \ x^2+\qquad bx \\ \hline & -3x^2+(a-b)x+\ \ 6 \\ & -3x^2+\qquad 3x-\ \ 3b \\ \hline & (a-b-3)x+6+3b \end{array}$$

이때 $(a-b-3)x+6+3b=0$이므로

$a-b-3=0$, $6+3b=0$에서

$a=1$, $b=-2$

따라서 구하는 값은 $\frac{b}{a}=-2$

답 ①

08

다항식 $f(x)$에 대하여 등식

$$x^{10}-ax^5+b=(x^2-1)f(x)+7x-4$$

가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, ab의 값은?

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

09

$x+y=2$를 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식

$$ax^2+xy+by^2+x+y-4=0$$

이 항상 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

10

다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 -1이다. $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3일 때, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

11

다항식 $f(x)=x^3+px^2+qx-2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지도록 상수 p, q의 값을 정하시오.

12

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 5이고, $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 35이다. $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

13

다항식 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x+5$이고, x^2-x-2로 나누었을 때의 나머지는 $3x-2$일 때, $f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

14

삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

43

08

| 평가 목표 | 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 정하고, 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $x^{10}-ax^5+b=(x^2-1)f(x)+7x-4$ ...... ①

$x=1$을 ①에 대입하면 $a-b=-2$

$x=-1$을 ①에 대입하면 $a+b=-12$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=-5$

따라서 구하는 값은 $ab=35$ 답 ⑤

09

| 평가 목표 | 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 정하고, 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $y=2-x$를 $ax^2+xy+by^2+x+y-4=0$에 대입하여 정리하면

$(a+b-1)x^2+(2-4b)x+4b-2=0$

$a+b-1=0$, $2-4b=0$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 값은 $a-b=0$ 답 ③

10

| 평가 목표 | 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있다.

| 풀이 | $Q(2)=3$이므로 $f(x)=(x+2)Q(x)-1$에서

$f(2)=4Q(2)-1=11$ 답 11

11

| 평가 목표 | 인수정리를 이용하여 주어진 다항식의 미정계수를 정할 수 있다.

| 풀이 | $f(1)=1+p+q-2=0$, $p+q=1$ ··· ①

$f(-2)=-8+4p-2q-2=0$, $2p-q=5$ ··· ②

①, ②를 연립하여 풀면 $p=2$, $q=-1$

답 $p=2$, $q=-1$

12

| 평가 목표 | 나머지정리와 곱셈 공식을 이용하여 나머지를 구할 수 있다.

| 풀이 | $f(2)+g(2)=5$, $\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=35$이고

$\{f(2)+g(2)\}^3=\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3$
$+3f(2)g(2)\{f(2)+g(2)\}$

이므로 $125=35+15f(2)g(2)$

따라서 구하는 나머지는 $f(2)g(2)=6$ 답 6

13

| 평가 목표 | 나머지정리를 이용하여 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.

| 풀이 | 다항식 $f(x)$를 x^2+2x-3, x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+2x-3)Q_1(x)+2x+5$
$=(x-1)(x+3)Q_1(x)+2x+5$

$f(x)=(x^2-x-2)Q_2(x)+3x-2$
$=(x+1)(x-2)Q_2(x)+3x-2$

에서 $f(-3)=-1$, $f(2)=4$

다항식 $f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x^2+x-6)Q_3(x)+ax+b$
$=(x-2)(x+3)Q_3(x)+ax+b$

이므로 $f(-3)=-3a+b=-1$ ...... ①

$f(2)=2a+b=4$ ...... ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$ 답 $x+2$

14

| 평가 목표 | 다항식의 나눗셈, 인수정리, 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있다.

| 풀이 | 다항식 $f(x)$가 삼차식이므로 $f(x)+8$을 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$라 하면

$$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b) \qquad \cdots\cdots ①$$

또, $1-f(x)$가 x^2-1로 나누어떨어지므로

$$1-f(x)=(x^2-1)Q(x) \qquad \cdots\cdots ②$$

$x=1$, $x=-1$을 ②에 각각 대입하면

$1-f(1)=0$, $1-f(-1)=0$에서

$$f(1)=f(-1)=1$$

$x=1$을 ①에 대입하면

$$a+b=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

$x=-1$을 ①에 대입하면

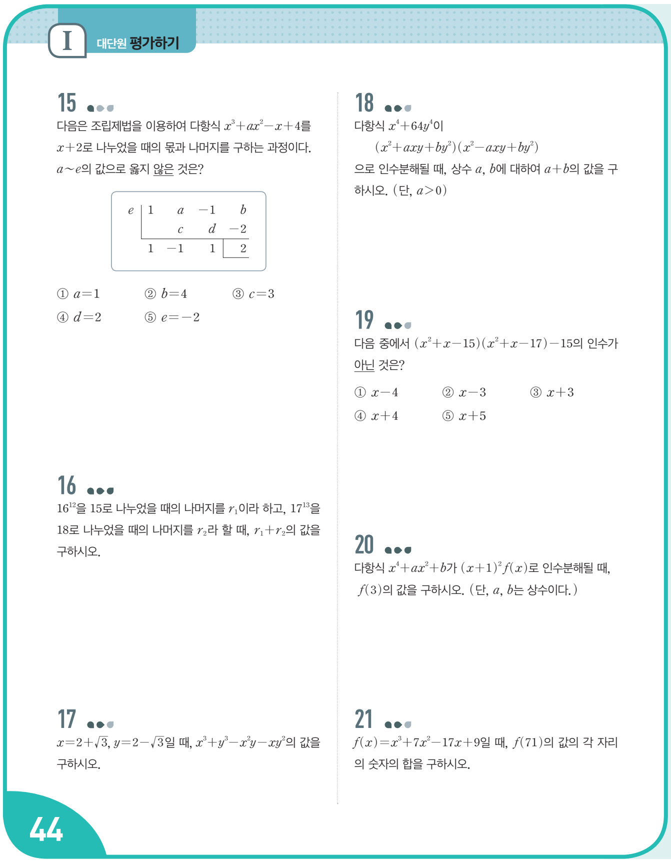
$$9=-a+b \qquad \cdots\cdots ④$$

③, ④를 연립하여 풀면 $\quad a=-4$, $b=5$

따라서 $\quad f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$

즉, 구하는 나머지는 $\quad f(2)=-56$

답 -56


I 대단원 평가하기

15 ●●●
다음은 조립제법을 이용하여 다항식 x^3+ax^2-x+4를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. $a\sim e$의 값으로 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} e & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a=1$ ② $b=4$ ③ $c=3$ ④ $d=2$ ⑤ $e=-2$

16 ●●●
16^{12}을 15로 나누었을 때의 나머지를 r_1이라 하고, 17^{13}을 18로 나누었을 때의 나머지를 r_2라 할 때, r_1+r_2의 값을 구하시오.

17 ●●●
$x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$일 때, $x^3+y^3-x^2y-xy^2$의 값을 구하시오.

18 ●●●
다항식 x^4+64y^4이
$(x^2+axy+by^2)(x^2-axy+by^2)$
으로 인수분해될 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

19 ●●●
다음 중에서 $(x^2+x-15)(x^2+x-17)-15$의 인수가 아닌 것은?

① $x-4$ ② $x-3$ ③ $x+3$ ④ $x+4$ ⑤ $x+5$

20 ●●●
다항식 x^4+ax^2+b가 $(x+1)^2f(x)$로 인수분해될 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

21 ●●●
$f(x)=x^3+7x^2-17x+9$일 때, $f(71)$의 값의 각 자리의 숫자의 합을 구하시오.

44

15

| 평가 목표 | 조립제법을 이용하여 다항식의 나눗셈에서 몫과 나머지를 구할 수 있다.

| 풀이 | 다항식 x^3+ax^2-x+4를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하기 위해 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a & -1 & 4 \\ & & -2 & -2a+4 & 4a-6 \\ \hline & 1 & a-2 & -2a+3 & \boxed{4a-2} \end{array}$$

따라서 $\quad e=-2$, $b=4$, $c=-2$

또, $a-2=-1$, $-2a+4=d$에서 $\quad a=1$, $d=2$

답 ③

16

| 평가 목표 | 나머지정리를 활용하여 복잡하고 큰 수의 나눗셈에서 나머지를 간단하게 구할 수 있다.

| 풀이 | $x^{12}=(x-1)Q_1(x)+R_1$이라 하고, $x=1$을 이 식의 양변에 대입하면 $R_1=1$이므로

$$x^{12}=(x-1)Q_1(x)+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$x=16$을 ①에 대입하면

$$16^{12}=15\times Q_1(16)+1$$

즉, 16^{12}을 15로 나누었을 때의 나머지는 $\quad r_1=1$

또, $x^{13}=(x+1)Q_2(x)+R_2$라 하고, $x=-1$을 이 식의 양변에 대입하면 $R_2=-1$이므로

$$x^{13}=(x+1)Q_2(x)-1 \qquad \cdots\cdots ②$$

$x=17$을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} 17^{13}&=18\times Q_2(17)-1 \\ &=18\{Q_2(17)-1\}+17 \end{aligned}$$

즉, 17^{13}을 18로 나누었을 때의 나머지는

$$r_2=17$$

따라서 구하는 값은 $\quad r_1+r_2=18$

답 18

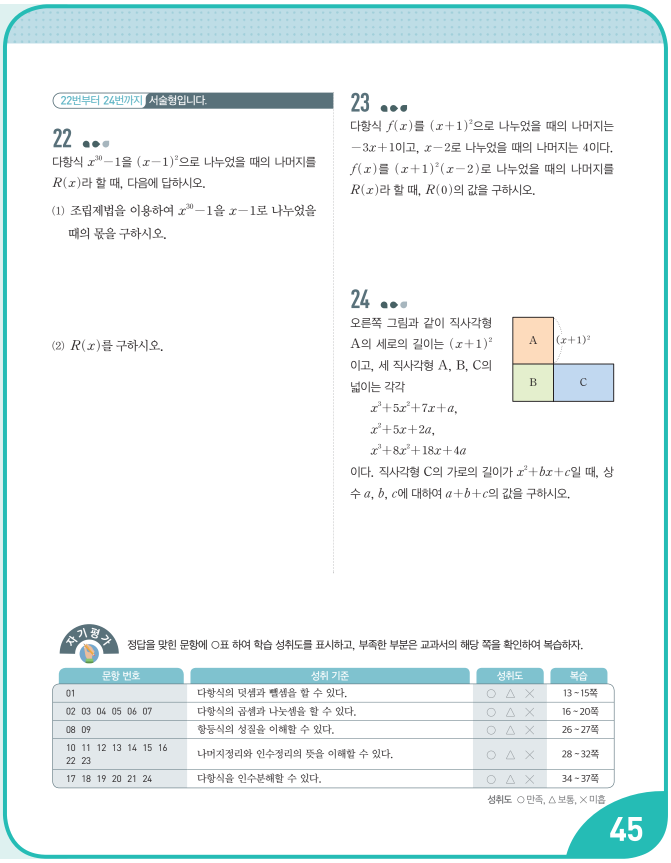
17

| 평가 목표 | 인수분해를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $x+y=4$, $x-y=2\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned} &x^3+y^3-x^2y-xy^2 \\ &=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y) \\ &=(x+y)(x^2-2xy+y^2) \\ &=(x+y)(x-y)^2 \\ &=4\times(2\sqrt{3})^2=48 \end{aligned}$$

답 48



22번부터 24번까지 서술형입니다.

22 ●●●

다항식 $x^{30}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, 다음에 답하시오.

(1) 조립제법을 이용하여 $x^{30}-1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하시오.

(2) $R(x)$를 구하시오.

23 ●●●

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $-3x+1$이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(0)$의 값을 구하시오.

24 ●●●

오른쪽 그림과 같이 직사각형 A의 세로의 길이는 $(x+1)^2$이고, 세 직사각형 A, B, C의 넓이는 각각

x^3+5x^2+7x+a,

$x^2+5x+2a$,

$x^3+8x^2+18x+4a$

이다. 직사각형 C의 가로의 길이가 x^2+bx+c일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

자기평가

정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01	다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.	○ △ ×	13 ~ 15쪽
02 03 04 05 06 07	다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.	○ △ ×	16 ~ 20쪽
08 09	항등식의 성질을 이해할 수 있다.	○ △ ×	26 ~ 27쪽
10 11 12 13 14 15 16 22 23	나머지정리와 인수정리의 뜻을 이해할 수 있다.	○ △ ×	28 ~ 32쪽
17 18 19 20 21 24	다항식을 인수분해할 수 있다.	○ △ ×	34 ~ 37쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

45

18

| 평가 목표 | 주어진 다항식을 A^2-B^2의 꼴로 변형하여 인수분해하고, 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $x^4+64y^4=(x^4+16x^2y^2+64y^4)-16x^2y^2$

$$=(x^2+8y^2)^2-(4xy)^2$$

$$=(x^2+4xy+8y^2)(x^2-4xy+8y^2)$$

따라서 $a=4$, $b=8$이므로 구하는 값은

$$a+b=12$$

답 12

19

| 평가 목표 | 치환을 이용하여 인수분해할 수 있다.

| 풀이 | $x^2+x-15=X$라 하면

$$X(X-2)-15=X^2-2X-15$$

$$=(X+3)(X-5)$$

$$=(x^2+x-12)(x^2+x-20)$$

$$=(x-3)(x+4)(x-4)(x+5)$$

따라서 주어진 다항식의 일차식인 인수는

$x-3$, $x+4$, $x-4$, $x+5$

이므로 인수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

20

| 평가 목표 | 인수분해와 조립제법을 이용하여 미정계수를 정하고, 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | x^4+ax^2+b는 $x+1$로 나누어떨어지므로

$$a+b+1=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & a & 0 & b \\ & & -1 & 1 & -a-1 & a+1 \\ \hline & 1 & -1 & a+1 & -a-1 & \boxed{a+b+1} \end{array}$$

$x^4+ax^2+b=(x+1)\{x^3-x^2+(a+1)x-(a+1)\}$

이때 $x^3-x^2+(a+1)x-(a+1)$은 $x+1$로 나누어떨어지므로

$$(-1)^3-(-1)^2+(a+1)\times(-1)-(a+1)=0,$$

$$-2a-4=0$$

즉, $a=-2$

$a=-2$를 ①에 대입하면

$$b=1$$

$a=-2$, $b=1$을 주어진 다항식에 대입하면

$$x^4-2x^2+1$$

즉, $x^4-2x^2+1=(x+1)^2f(x) \qquad \cdots\cdots ②$

$x=3$을 ②에 대입하면

$$81-18+1=16\times f(3)$$

따라서 구하는 값은

$$f(3)=4$$

답 4

21

| 평가 목표 | 인수분해를 활용하여 복잡한 식의 계산을 간단히 할 수 있다.

| 풀이 | $f(x)=x^3+7x^2-17x+9$에서 $f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 7 & -17 & 9 \\ & & 1 & 8 & -9 \\ \hline & 1 & 8 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2+8x-9)$$

$$=(x-1)^2(x+9)$$

즉, $f(71)=70^2\times 80=392000$

따라서 $f(71)$의 각 자리의 숫자의 합은

$$3+9+2=14$$

답 14

22

| 평가 목표 | 조립제법과 항등식의 성질을 이용하여 나머지를 구할 수 있다.

(1) 다음과 같이 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

따라서 $x^{30}-1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫은

$x^{29}+x^{28}+\cdots+x+1$ ▶ 30 %

(2) $x^{30}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 $R(x)=ax+b$라 하면

$x^{30}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ①

$x=1$을 ①에 대입하면

$a+b=0,\quad b=-a$ ▶ 30 %

$b=-a$를 ①에 대입하면

$x^{30}-1=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$ …… ②

②의 양변을 $x-1$로 나누면

$x^{29}+x^{28}+\cdots+1=(x-1)Q(x)+a$ …… ③

$x=1$을 ③에 대입하면

$a=30$ ▶ 30 %

따라서 구하는 나머지 $R(x)$는

$R(x)=30x-30$ ▶ 10 %

23

| 평가 목표 | 다항식의 나눗셈과 나머지정리를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

해결 과정 $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 $R(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(x)=(x+1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $-3x+1$이므로 ax^2+bx+c를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $-3x+1$이 되어야 한다.

$f(x)=(x+1)^2(x-2)Q(x)$
$\quad+a(x+1)^2-3x+1$ …… ① ▶ 40 %

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(2)=9a-6+1=4$에서 $\quad 9a=9$

즉, $\quad a=1$

$a=1$을 ①에 대입하면 $R(x)$는

$R(x)=(x+1)^2-3x+1$
$\quad=x^2-x+2$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 구하는 값은

$R(0)=2$ ▶ 20 %

24

| 평가 목표 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해할 수 있다.

문제 이해 $f(x)=x^3+5x^2+7x+a$,

$g(x)=x^2+5x+2a$,

$h(x)=x^3+8x^2+18x+4a$

라 하자. ▶ 20 %

해결 과정 인수정리에 의하여

$f(-1)=-1+5-7+a=0$이므로

$a=3$

$a=3$을 세 다항식 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대입하면

$f(x)=x^3+5x^2+7x+3$,

$g(x)=x^2+5x+6$,

$h(x)=x^3+8x^2+18x+12$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ & & -1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$f(x)=x^3+5x^2+7x+3$
$\quad=(x+1)(x^2+4x+3)$
$\quad=(x+1)^2(x+3)$

이므로 직사각형 A의 가로의 길이는 $\quad x+3$

$g(x)=x^2+5x+6$
$\quad=(x+3)(x+2)$

이므로 직사각형 B의 세로의 길이는

$x+2$ ▶ 30 %

조립제법을 이용하여 $h(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 8 & 18 & 12 \\ & & -2 & -12 & -12 \\ \hline & 1 & 6 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

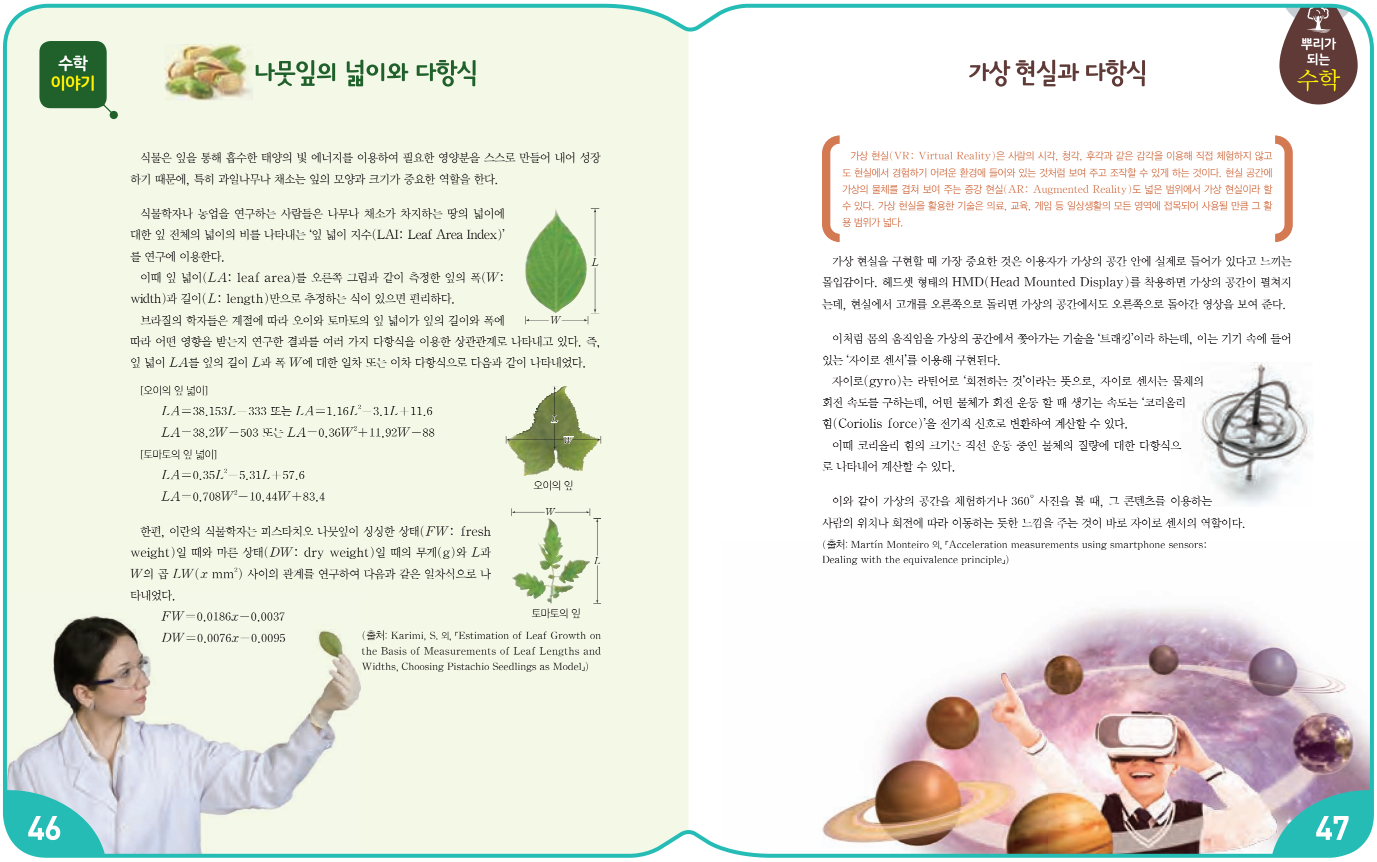
$h(x)=x^3+8x^2+18x+12$
$\quad=(x+2)(x^2+6x+6)$ ▶ 30 %

답 구하기 직사각형 C의 가로의 길이는 x^2+6x+6이므로

$b=6,\ c=6$

따라서 구하는 값은

$a+b+c=15$ ▶ 20 %



수학 이야기

나뭇잎의 넓이와 다항식

식물은 잎을 통해 흡수한 태양의 빛 에너지를 이용하여 필요한 영양분을 스스로 만들어 내어 성장하기 때문에, 특히 과일나무나 채소는 잎의 모양과 크기가 중요한 역할을 한다.

식물학자나 농업을 연구하는 사람들은 나무나 채소가 차지하는 땅의 넓이에 대한 잎 전체의 넓이의 비를 나타내는 '잎 넓이 지수(LAI: Leaf Area Index)'를 연구에 이용한다.

이때 잎 넓이(LA: leaf area)를 오른쪽 그림과 같이 측정한 잎의 폭(W: width)과 길이(L: length)만으로 추정하는 식이 있으면 편리하다.

브라질의 학자들은 계절에 따라 오이와 토마토의 잎 넓이가 잎의 길이와 폭에 따라 어떤 영향을 받는지 연구한 결과를 여러 가지 다항식을 이용한 상관관계로 나타내고 있다. 즉, 잎 넓이 LA를 잎의 길이 L과 폭 W에 대한 일차 또는 이차 다항식으로 다음과 같이 나타내었다.

[오이의 잎 넓이]

$LA=38.153L-333$ 또는 $LA=1.16L^2-3.1L+11.6$

$LA=38.2W-503$ 또는 $LA=0.36W^2+11.92W-88$

[토마토의 잎 넓이]

$LA=0.35L^2-5.31L+57.6$

$LA=0.708W^2-10.44W+83.4$

오이의 잎

토마토의 잎

한편, 이란의 식물학자는 피스타치오 나뭇잎이 싱싱한 상태(FW: fresh weight)일 때와 마른 상태(DW: dry weight)일 때의 무게(g)와 L과 W의 곱 LW(x mm^2) 사이의 관계를 연구하여 다음과 같은 일차식으로 나타내었다.

$FW=0.0186x-0.0037$

$DW=0.0076x-0.0095$

(출처: Karimi, S. 외, 「Estimation of Leaf Growth on the Basis of Measurements of Leaf Lengths and Widths, Choosing Pistachio Seedlings as Model」)

46

가상 현실과 다항식

뿌리가 되는 수학

가상 현실(VR: Virtual Reality)은 사람의 시각, 청각, 후각과 같은 감각을 이용해 직접 체험하지 않고도 현실에서 경험하기 어려운 환경에 들어와 있는 것처럼 보여 주고 조작할 수 있게 하는 것이다. 현실 공간에 가상의 물체를 겹쳐 보여 주는 증강 현실(AR: Augmented Reality)도 넓은 범위에서 가상 현실이라 할 수 있다. 가상 현실을 활용한 기술은 의료, 교육, 게임 등 일상생활의 모든 영역에 접목되어 사용될 만큼 그 활용 범위가 넓다.

가상 현실을 구현할 때 가장 중요한 것은 이용자가 가상의 공간 안에 실제로 들어가 있다고 느끼는 몰입감이다. 헤드셋 형태의 HMD(Head Mounted Display)를 착용하면 가상의 공간이 펼쳐지는데, 현실에서 고개를 오른쪽으로 돌리면 가상의 공간에서도 오른쪽으로 돌아간 영상을 보여 준다.

이처럼 몸의 움직임을 가상의 공간에서 쫓아가는 기술을 '트래킹'이라 하는데, 이는 기기 속에 들어 있는 '자이로 센서'를 이용해 구현된다.

자이로(gyro)는 라틴어로 '회전하는 것'이라는 뜻으로, 자이로 센서는 물체의 회전 속도를 구하는데, 어떤 물체가 회전 운동 할 때 생기는 속도는 '코리올리 힘(Coriolis force)'을 전기적 신호로 변환하여 계산할 수 있다.

이때 코리올리 힘의 크기는 직선 운동 중인 물체의 질량에 대한 다항식으로 나타내어 계산할 수 있다.

이와 같이 가상의 공간을 체험하거나 360° 사진을 볼 때, 그 콘텐츠를 이용하는 사람의 위치나 회전에 따라 이동하는 듯한 느낌을 주는 것이 바로 자이로 센서의 역할이다.

(출처: Martín Monteiro 외, 「Acceleration measurements using smartphone sensors: Dealing with the equivalence principle」)

47

수학 이야기 ▸ 나뭇잎의 넓이와 다항식

식물의 '잎 넓이 지수'는 그 식물이 땅을 덮고 있는 정도를 나타내는 수치로서, 활엽 식물의 경우 그 식물이 차지하는 땅의 넓이에 대한 잎(의 한쪽 면) 전체의 넓이의 비로 측정한다.

그러나 침엽 식물의 경우 잎이 바늘 모양이기 때문에 잎 넓이의 측정이 용이하지 않다.

이와 같은 이유로 침엽 식물의 잎 넓이 지수는 그 식물이 차지하는 땅의 넓이에 대한 잎 전체의 그림자의 넓이의 비로 측정하거나, 그 식물이 차지하는 땅의 넓이에 대한 잎(바늘 모양) 전체 겉넓이의 비의 절반, 혹은 그 식물이 차지하는 땅의 넓이에 대한 잎 전체의 겉넓이의 비로 측정한다고 한다.

뿌리가 되는 수학 ▸ 가상 현실과 다항식

가상 현실은 인공 현실(artificial reality), 사이버 공간(cyberspace), 가상 세계(virtual world), 가상 환경(virtual environment), 합성 환경(synthetic environment), 인공 환경(artificial environment) 등으로 불리는데, 사용 목적은 사람들이 일상적으로 경험하기 어려운 환경을 직접 체험하지 않고서도 그 환경에 들어와 있는 것처럼 보고 느낄 수 있고 조작할 수 있게 하는 것이다. 응용 분야는 교육, 고급 프로그래밍, 원격 조작, 원격 위성 표면 탐사, 탐사 자료 분석, 과학적 시각화(scientific visualization) 등이다.

이와 관련한 구체적인 예로는 탱크 또는 항공기의 조종법 훈련, 가구의 배치 설계, 수술 실습, 게임 등이 있다. 가상 현실 시스템에서는 인간 참여자와 실제 또는 가상에서의 작업 공간이 하드웨어로 상호 연결된다. 또, 가상 환경에서 일어나는 일을 참여자가 주로 시각으로 느끼도록 하며, 보조적으로 청각 또는 촉각 등을 사용한다.

Ⅱ 방정식과 부등식

1. 복소수와 이차방정식
2. 이차방정식과 이차함수
3. 여러 가지 방정식과 부등식

이 단원에서는

복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 이차방정식과 이차함수,
이차부등식과 이차함수의 관계를 알아보며,
여러 가지 방정식과 부등식을 풀어 본다.

1 단원의 개관

지도 목표

1. 복소수와 이차방정식

- 복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙연산을 할 수 있게 한다.
- 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알며, 이차방정식에서 판별식의 뜻을 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.
- 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하게 한다.

2. 이차방정식과 이차함수

- 이차방정식과 이차함수의 관계, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.
- 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

3. 여러 가지 방정식과 부등식

- 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.
- 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.
- 미지수가 1개인 연립일차부등식과 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.
- 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 복소수와 이차방정식

- 방정식은 계수가 실수인 경우만 다룬다.
- 이차방정식의 근은 복소수의 범위까지 구하게 한다.
- 이차방정식의 근과 계수의 관계는 근이 허수일 때도 성립함을 알게 한다.

2. 이차방정식과 이차함수

- 이차방정식과 이차함수의 관계는 그래프를 통해 이해하게 한다.
- 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 판단할 수 있게 한다.
- 이차함수의 최댓값과 최솟값은 실수 전체의 범위뿐만 아니라, 제한된 범위$(a \le x \le b)$에서도 구하게 한다.

3. 여러 가지 방정식과 부등식

- 미지수가 2개인 연립이차방정식은 일차식과 이차식이 각각 한 개씩 주어진 경우, 두 이차식 중 한 이차식이 간단히 인수분해 되는 경우만 다룬다.
- 방정식과 부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 경험을 통해 수학의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
- 연립부등식은 중학교에서 학습한 연립일차방정식 내용을 토대로 이해하게 하고, $A<B<C$와 같은 형태의 연립일차부등식도 다룰 수 있다.
- '삼차방정식', '사차방정식', '연립이차방정식', '연립일차부등식', '이차부등식', '연립이차부등식' 용어는 교수 · 학습 상황에서 사용할 수 있다.

학습 계통도

배운 내용

[중학교 수학 1]
- 일차방정식

[중학교 수학 2]
- 일차부등식과 연립일차방정식

[중학교 수학 3]
- 다항식의 곱셈과 인수분해
- 이차방정식

[수학]
- 나머지정리
- 인수분해

이 단원의 내용

1. 복소수와 이차방정식
01 복소수와 그 연산
02 이차방정식의 판별식
03 이차방정식의 근과 계수의 관계

2. 이차방정식과 이차함수
01 이차방정식과 이차함수
02 이차함수의 최대, 최소

3. 여러 가지 방정식과 부등식
01 삼차방정식과 사차방정식
02 연립이차방정식
03 연립일차부등식
04 이차부등식과 연립이차부등식

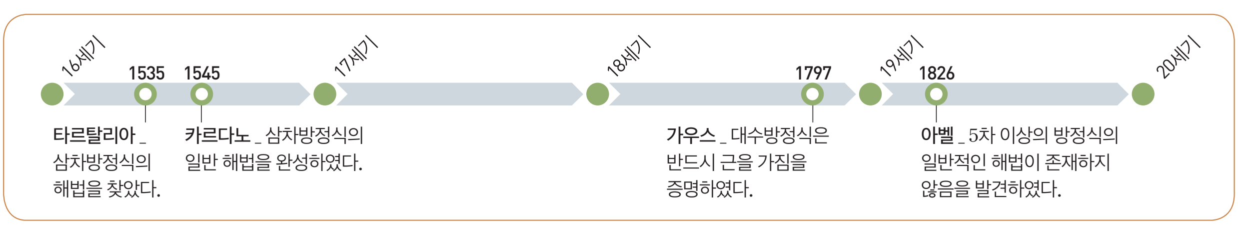
배울 내용

[수학 Ⅰ]
- 지수함수와 로그함수

[수학 Ⅱ]
- 도함수의 활용

[미적분]
- 도함수의 활용

2 단원의 이론적 배경



1 역사적 배경

기원전 16세기경 바빌로니아에서는 미지수를 이용하여 방정식을 만들고, 방정식을 이용하여 미지수의 값을 구하는 방법을 알고 있었다. 이 사실은 고대 이집트에서 만들어진 가장 오래된 수학서인 『아메스 파피루스(Ahmes papyrus)』에 ‘어떤 수와 그의 $\frac{1}{7}$을 더하면 19가 된다. 어떤 수는 얼마인가?’라는 일차방정식 문제를 비롯하여 $x^2+y^2=100$, $y=\frac{3}{4}x$와 같은 연립이차방정식이 기록된 것을 보면 알 수 있다. 바빌로니아에는 이차방정식의 근의 공식에 해당하는 일반적인 표현은 없었지만 해를 구하는 방법을 알고 있었다. 그러나 실제적인 문제를 푸는 것에만 관심이 있어서 방정식 자체를 연구하는 데까지는 발전하지 못하였다.

본격적으로 방정식을 연구한 그리스의 수학자 디오판토스(Diophantos, 200?∼284?)는 이차방정식의 해법을 알고 있었고, 이항(완전제곱식)을 이용하여 방정식을 푸는 방법이 정착된 것은 아라비아의 수학자 알콰리즈미(Al-Khwarizmi, 780?∼850?)의 시대부터라고 알려져 있다.

인도의 수학자 바스카라(Bhaskara, A., 1114∼1185(1193?))는 1150년에 이차방정식에는 두 근이 있고, 음의 근과 무리근이 존재함을 발견한 최초의 수학자였다. 그는 삼차, 사차방정식도 다루었지만, 지금과 같이 차수에 따라 방정식을 분류하고 그 일반적인 해법을 연구한 것은 17세기부터이며 우리가 현재 사용하고 있는 이차방정식의 일반적인 해법은 영국의 수학자 실베스터(Sylvester, J. J., 1814∼1897)에 의한 것이다.

실베스터

1535년 이탈리아의 수학자 타르탈리아(Tartaglia, N. F., 1499∼1557)는 삼차방정식의 해법을 찾았으나 발표하지 못했고, 이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G., 1501∼1576)가 타르탈리아의 해법을 배운 뒤, 삼차방정식의 일반 해법을 완성하였다. 카르다노가 『위대한 술법(Ars Magna)』에 타르탈리아가 발견한 삼차방정식의 대수적 해법까지 자신이 고안한 것처럼 발표하여 삼차방정식의 해법이 알려졌고, 이후 카르다노의 해법이라고 불리고 있다.

사차방정식의 해법은 카르다노의 제자 페라리(Ferrari, L., 1522∼1565)가 성실하게 연구하여 발견하였으나 제자 봄벨리(Bombelli, Raphael, 1526∼1572)가 사차방정식의 해법을 발표하여 봄벨리의 해법이라고 불린다.

삼차, 사차방정식의 해법이 발견된 후에 약 300년간 많은 수학자들이 5차 이상의 방정식의 근의 공식을 발견하려고 고심하였으나 해법은 발견되지 않았다. 1826년 노르웨이의 수학자 아벨(Abel, N. H., 1802∼1829)은 '5차 이상의 방정식의 일반적인 대수적 풀이법은 존재하지 않는다.'라는 정리를 증명하였으나 책으로 출판할 때, '대수적 풀이법'이라는 말을 빼고 논문을 출판하여 당시에는 인정 받지 못하고 『그렐레(Crelle)』지에 실은 후, 수년이 지나서야 비로소 세상에서 인정받게 되었다.

아벨

그는 여기서 유한회(有限回)의 사칙연산(四則演算)과 근호(根號)에 의한 일반적인 풀이의 공식은 존재할 수 없다고만 하는 데 그쳤다. 그러나 프랑스의 수학자 갈루아(Galois, É., 1811∼1832)는 아벨과는 독립적으로 갈루아의 이론을 창시하여 그 문제에 결정적인 해답을 제시하였고, 대수방정식의 근(根) 사이의 치환군(置換群)과 수체(數體) 사이의 밀접한 관계에 착안하여 대수방정식을 대수적으로 풀기 위한 필요충분조건으로 증명하였다. 이것을 갈루아의 이론이라고 부른다.

2 대수학의 기본 정리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 근의 공식을 이용하여 확인할 수 있듯이 복소수의 범위에서 중복을 허용하여 2개의 근을 갖는다. 이와 같이 대수학의 기본 정리는 n차의 대수방정식은 복소수의 범위에서 중복을 허용하여 n개의 근을 갖는다는 이론으로 디데로(Diderot, D., 1713∼1784)와 달랑베르(d'Alembert, J. L. R., 1717∼1783)가 1746년에 발표하였으나 증명이 불충분했던 것을 독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F., 1777∼1855)가 1797년에 발표한 학위 논문에서 '대수방정식은 반드시 근을 갖는다.'고 하여 처음으로 엄밀한 증명을 하였다.

코시

이 기본 정리의 증명에 복소함수론, 갈루아의 이론을 사용한 프랑스의 수학자 코시(Cauchy, A. L., 1789~1857)를 비롯하여 많은 사람들이 별도로 증명한 것도 알려져 있으며, 1826년 아벨이 증명한 '5차 이상의 대수방정식은 일반적으로 대수적 해법(사칙연산과 거듭제곱근 풀이)으로는 풀리지 않는다.'라는 명제와 함께 방정식론의 기본이 되었다.

3 삼차방정식의 근(Cardano의 해법)

p, q가 실수일 때 삼차방정식 $x^3+px+q=0$에 대하여 다음 연립방정식을 생각하자.

$$u^3-v^3=q,\ uv=\frac{p}{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

$uv=\frac{p}{3}$에서 $v=\frac{p}{3u}$이므로 $u^3-v^3=q$에 대입한 다음 양변에 u^3을 곱하면

$$(u^3)^2-qu^3-\frac{p^3}{27}=0$$

이다. 이때 이차방정식의 근의 공식에 의하여

$$u^3=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ \text{즉 } u=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

이다. 같은 방법으로 ①에서 $u=\frac{p}{3v}$를 $u^3-v^3=q$에 대입하여 v를 구하면

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

이다. 그런데 $(v-u)^3+3uv(v-u)+(u^3-v^3)=0$이므로 $v-u=t$로 놓고, ①을 대입하면 $t^3+pt+q=0$이 성립한다.

즉, $t=v-u$는 삼차방정식 $x^3+px+q=0$의 해이고 특히, $v-u$ 네 개의 값 중에서 u와 v의 식의 내부의 근호 앞에 있는 부호가 $+$와 $+$, $-$와 $-$일 때의 차가 같으므로 x의 값은 세 개이다.

한편, 일반적인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$에서 $x=t-\frac{a}{3}$로 놓으면

$$t^3+pt+q=0\left(p=-\frac{a^2}{3}+b,\ q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right) \qquad \cdots\cdots ②$$

으로 변형된다. ②에 위의 풀이법을 적용시키면 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 해를 구할 수 있다.

참고 문헌

- 김응태, 박승안, 『현대대수학』, 경문사, 2011
- Ito, Kiyosi, 「Mathematical Society of Japan」, 『Encyclopedic Dictionary of Mathematics』, MIT Press, 1954
- Smith, D. E., 『History of Mathematics』, Dover, 1953
- Peterson, I., 『현대수학의 여행자』, 김인수 역, 사이언스북스, 1998

3 단원의 지도 계획

중단원	소단원	차시 (총 33차시)	교과서 쪽 수	지도 내용	용어와 기호
1. 복소수와 이차방정식	01 복소수와 그 연산	6	51~56	• 복소수 • 복소수의 사칙연산 • 음수의 제곱근	허수단위, 복소수, 실수부분, 허수부분, 허수, 켤레복소수, i, $a+bi$, $\overline{a+bi}$
			57	• 탐구&융합	
	02 이차방정식의 판별식	2	58~60	• 이차방정식의 실근과 허근 • 이차방정식의 판별식	실근, 허근, 판별식
	03 이차방정식의 근과 계수의 관계	4	61~65	• 이차방정식의 근과 계수의 관계 • 두 수를 근으로 하는 이차방정식 • 이차식의 인수분해	
	중단원 마무리	1	66~68	• 중단원 마무리하기	
2. 이차방정식과 이차함수	01 이차방정식과 이차함수	2	70~73	• 이차방정식과 이차함수의 관계 • 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	
			74	• 수학 이야기	
	02 이차함수의 최대, 최소	3	75~78	• 이차함수의 최대, 최소 • 이차함수의 최대, 최소의 활용	최댓값, 최솟값
	중단원 마무리	1	79~81	• 중단원 마무리하기	
3. 여러 가지 방정식과 부등식	01 삼차방정식과 사차방정식	2	83~85	• 삼차방정식과 사차방정식	
			86	• 수학 이야기	
	02 연립이차방정식	2	87~88	• 미지수가 2개인 연립이차방정식	
	03 연립일차부등식	4	89~93	• 미지수가 1개인 연립일차부등식 • $A<B<C$ 꼴의 연립부등식 • 절댓값 기호를 포함한 일차부등식	연립부등식
			94	• 공학적 도구	
	04 이차부등식과 연립이차부등식	3	95~98	• 이차부등식과 이차함수의 관계 • 이차부등식의 해 • 연립이차부등식	
	중단원 마무리	1	99~101	• 중단원 마무리하기	
대단원 마무리		2	102~105	• 대단원 평가하기	
			106	• 수학 이야기	
			107	• 뿌리가 되는 수학	

※ 실제 지도는 학교의 실정에 따라 알맞게 계획하고 재수정할 수 있다.

1 복소수와 이차방정식

01 복소수와 그 연산
02 이차방정식의 판별식
03 이차방정식의 근과 계수의 관계

“허수는 존재와 비존재의 양면성을 가진 신성한 영혼의 아름답고 놀라운 피난처이다.”

(출처: Klein, F., 『Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis』)

라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)
독일의 수학자

이 글은 제곱해서 -1이 되는 수는 실수 중에서 존재하지 않지만, 우리의 관념 속에서는 이차방정식 $x^2+1=0$의 근으로 존재하는 양면성에 대해 라이프니츠가 1702년에 한 말이다.

50

01 복소수와 그 연산

학습 목표
복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙연산을 할 수 있다.

준비하기
다음을 계산하시오.
(1) $(1+2\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})$
(2) $(3+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$
(3) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$

다가서기
방정식의 해를 모두 표현하는 데 실수만으로는 충분하지 않아서 새로운 수를 생각하게 되었다.
이 새로운 수는 과학과 공학 등에서 다루는 여러 가지 현상을 설명하는 데 활용된다.

복소수

생각 열기 오른쪽 그림은 실수 x를 입력하면 x^2의 값이 출력되는 장치이다.

▶ 출력값이 -1이 되는 실수 x가 있는지 생각해 보고, 그 이유를 말해 보자.

1 제곱해서 음수가 되는 실수는 없으므로 방정식 $x^2=-1$은 실수의 범위에서 해를 갖지 않는다. 따라서 이 방정식이 해를 가지려면 실수 이외의 새로운 수가 필요하다.

제곱해서 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을

$$i$$

로 나타내고 **허수단위**라고 한다. 즉,

$$i^2=-1$$

이며, 제곱해서 -1이 된다는 뜻에서 $i=\sqrt{-1}$로 나타내기도 한다.

i는 허수단위를 뜻하는 imaginary unit의 첫 글자이다.

실수 a, b에 대하여

$$a+bi$$

꼴의 수를 **복소수**라고 한다. 이때 a를 $a+bi$의 **실수부분**, b를 $a+bi$의 **허수부분**이라고 한다.

$a+bi$ (실수부분: a, 허수부분: b)

2 특히, $0i=0$으로 정하면 실수 a는

$$a=a+0=a+0i$$

로 나타낼 수 있으므로 실수도 복소수이다.

이때 실수가 아닌 복소수 $a+bi(b\neq0)$를 **허수**라고 한다.

이상으로부터 복소수는 다음과 같이 분류할 수 있다.

$$\text{복소수 } a+bi\begin{cases}\text{실수 } a & (b=0)\\ \text{허수 } a+bi & (b\neq0)\end{cases}\quad (a,\ b\text{는 실수})$$

51

중단원 도입

복소수의 존재는 이미 오래전부터 알려졌으나 ‘실수’와 같이 하나의 수로 인정받는 데는 많은 시간이 걸렸다. 방정식의 풀이법이 획기적으로 발전하였던 16세기에도 방정식의 해를 형식적으로 나타내기 위해 복소수를 사용하였으나 별다른 의미를 두지 않았다. 이러한 복소수는 18세기 가우스가 기하학적 방법을 이용하여 구체적으로 나타냄으로써 비로소 실제로 존재하는 수로서 인정받았다.

이 단원에서는 판별식을 이용하여 이차방정식이 어떤 근을 갖는지 판별하고 방정식의 근과 계수의 관계를 파악하며 임의의 이차식을 인수분해하는 것을 학습하게 된다.

라이프니츠

라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)는 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)과는 별개로 무한소 미적분을 창시하였고, 이진법 수 체계를 다듬었다. 또한, 기계적 계산기 분야에서도 많은 발명을 하였다. 파스칼의 계산기에 자동 곱셈과 나눗셈 기능을 추가했고, 1685년에 핀 톱니바퀴 계산기를 묘사했으며, 최초로 대량 생산 된 기계적 계산기인 라이프니츠 휠을 발명했다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 복소수의 뜻과 성질을 이해하게 한다.
② 제곱해서 -1이 되는 허수단위 i를 알게 한다.
③ 켤레복소수의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
④ 복소수의 사칙연산을 할 수 있게 한다.
⑤ 음수의 제곱근을 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 방정식 $x^2+1=0$을 만족시키는 수로 허수단위 i를 도입하여 수의 범위를 복소수로 확장하게 한다.
② 임의의 실수 a는 허수부분이 0인 복소수로 나타낼 수 있음을 통해 실수도 복소수임을 알게 한다.
③ 복소수가 서로 같을 조건은 두 복소수의 실수부분과 허수부분이 각각 같을 때임을 알게 한다.
④ 실수에서는 대소 관계가 있지만 복소수에서는 대소 관계가 없음을 이해하게 한다.

용어와 기호

• 허수단위(虛數單位, imaginary unit)

$2-i=2+(-1)i$

보기 ① 복소수 $2-i$의 실수부분은 2, 허수부분은 -1이다.
② 세 복소수 3, $4+2i$, $-5i$에서 3은 실수, $4+2i$와 $-5i$는 허수이다.

문제 1 다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하시오.

(1) $3+2i$ (2) -7

(3) $4i$ (4) $5-3i$

3 두 복소수에서 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 서로 같을 때, 두 복소수는 '서로 같다'고 한다. 즉, 두 복소수 $a+bi$, $c+di$(a, b, c, d는 실수)에 대하여

$$a=c,\ b=d\text{일 때, } a+bi=c+di$$

이다.

특히, $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.

$a+bi=c+di$ (같다. 같다.)

보기 a, b가 실수일 때, $a-3i=2+bi$이면 $a=2$, $b=-3$이다.

문제 2 다음 등식이 성립하도록 실수 a, b의 값을 정하시오.

(1) $a+bi=2+3i$ (2) $a=4+bi$

(3) $3+bi=a-2\sqrt{5}i$ (4) $(a+1)+(b-1)i=-2+i$

한 켤레의 신발처럼 서로 짝이 되는 복소수를 켤레복소수라고 한다.

복소수 $a+bi$(a, b는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 **켤레복소수**라 하며, 이것을 기호로

$$\overline{a+bi}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

이다. 또,

4
$$\overline{a-bi}=a+bi$$

이므로 두 복소수 $a+bi$와 $a-bi$는 서로 켤레복소수이다.

52

- 복소수(複素數, complex number)
- 실수부분(實數部分, real part)
- 허수부분(虛數部分, imaginary part)
- 허수(虛數, imaginary number)
- 켤레복소수(共軛複素數, conjugate complex number)
- i • $a+bi$ • $\overline{a+bi}$

준비하기

|주안점| 근호를 포함한 식의 덧셈, 곱셈, 나눗셈을 할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $(1+2\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=(1+2)+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})$
$=3+\sqrt{3}$

(2) $(3+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})=3\times5-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{2}$
$=13+2\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{(3-\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}=\dfrac{12-3\sqrt{7}-4\sqrt{7}+7}{16-7}$
$=\dfrac{19-7\sqrt{7}}{9}$

답 (1) $3+\sqrt{3}$ (2) $13+2\sqrt{2}$ (3) $\dfrac{19-7\sqrt{7}}{9}$

복소수

생각 열기

|지도 방향| 제곱해서 -1이 되는 실수 x를 생각하기 위해서는 새로운 수의 체계가 필요함을 이해하게 한다.

▶ 제곱해서 음수가 되는 실수는 없으므로 출력값이 -1이 되는 실수 x는 없다.

내용 연구

1 $x^2=-1$과 같은 방정식의 해를 구하기 위해서는 새로운 수의 체계가 필요함을 알게 하고, 이 방정식의 해로 허수단위 i를 도입한다.

2 복소수 $a+bi$에 대하여 $b=0$인 복소수 $a+0i$는 실수 a를 나타내고, 허수부분이 0이 아닌 복소수, 즉 $b\neq0$인 복소수 $a+bi$를 허수라고 함을 알게 한다.

3 두 복소수 $a+bi$와 $c+di$ (a, b, c, d는 실수)의 실수부분과 허수부분이 같을 때, 두 복소수가 서로 같음을 알게 한다. 또, $a+bi=0$이면 $0=0+0i$이므로 $a=0$, $b=0$임을 알게 한다.

|오개념 바로잡기| $a+bi=0$에서 a, b가 실수라는 조건이 없으면 $a=1$, $b=i$인 경우도 있으므로 a, b의 조건에 주의한다.

4 복소수 $a-bi$에서 허수부분이 $-b$이므로 $a-bi$의 켤레복소수는 $a+bi$이다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 복소수의 실수부분과 허수부분을 구할 수 있게 한다.

답 (1) 실수부분: 3, 허수부분: 2
(2) 실수부분: -7, 허수부분: 0
(3) 실수부분: 0, 허수부분: 4
(4) 실수부분: 5, 허수부분: -3

문제 2

|주안점| 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 등식이 성립하도록 하는 실수의 값을 정할 수 있게 한다.

|풀이| (4) $a+1=-2$, $b-1=1$에서 $a=-3$, $b=2$

답 (1) $a=2$, $b=3$ (2) $a=4$, $b=0$
(3) $a=3$, $b=-2\sqrt{5}$ (4) $a=-3$, $b=2$

생각톡톡 켤레복소수가 자기 자신과 같은 수는 허수부분이 0인 복소수이므로 실수이다.

문제 풀이

문제 3

|주안점| 켤레복소수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\overline{3-2i}=3+2i$ (2) $\overline{-1+\sqrt{3}i}=-1-\sqrt{3}i$

(3) $\overline{-6}=-6$ (4) $\overline{2i}=-2i$

답 풀이 참조

지도 자료

복소수의 실수부분과 허수부분

복소수의 실수부분과 허수부분을 각각 기호로 Re, Im과 같이 나타낸다. 즉, 복소수 $z=a+bi$의 실수부분과 허수부분을 각각 기호로 나타내면

$$\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(a+bi)=a,\quad \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(a+bi)=b$$

이다. 이 기호를 사용하면 임의의 두 복소수 z, w에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) $\mathrm{Re}(2z)=2\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(2z)=2\mathrm{Im}(z)$

(2) $\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)$

(3) $\mathrm{Im}(z+w)=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w)$

(4) $\mathrm{Re}(\bar{z})=\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(\bar{z})=-\mathrm{Im}(z)$

(5) $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}(z)$

(6) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z)=-\frac{i}{2}(z-\bar{z})$

복소수의 사칙연산

평가 기준

상	복소수의 성질을 이용하여 복소수의 사칙연산을 하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	복소수의 성질을 이해하고, 그 성질을 이용하여 복소수의 사칙연산을 할 수 있다.
하	두 복소수의 사칙연산을 할 수 있다.

내용 연구

1 복소수의 사칙연산의 결과가 복소수임을 이해하게 한다.

2 복소수의 곱셈은 다항식의 곱셈에서와 같이 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 분배법칙을 이용해 전개한 다음 i^2을 -1로 바꾸어 계산한다.

생각톡톡
켤레복소수가 자기 자신과 같은 수는 어떤 수일까?

보기 $\overline{3+i}=3-i$, $\overline{5}=5$, $\overline{-2-4i}=-2+4i$, $\overline{-\sqrt{2}i}=\sqrt{2}i$

문제 3 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.

(1) $3-2i$ (2) $-1+\sqrt{3}i$

(3) -6 (4) $2i$

복소수의 사칙연산

오일러(Euler, L., 1707 ~1783)
스위스의 수학자로 허수를 나타내기 위한 기호 i를 처음 사용했다고 한다.

1 복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 모아서 다음과 같이 계산한다.

복소수의 덧셈과 뺄셈

a, b, c, d가 실수일 때,

❶ $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

❷ $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

예제 1 다음을 계산하시오.

(1) $(1+3i)+(2-i)$ (2) $(5+4i)-(4-3i)$

풀이 (1) $(1+3i)+(2-i)=(1+2)+\{3+(-1)\}i$
$=3+2i$

(2) $(5+4i)-(4-3i)=(5-4)+\{4-(-3)\}i$
$=1+7i$

답 (1) $3+2i$ (2) $1+7i$

문제 4 다음을 계산하시오.

(1) $(2-5i)+3i$ (2) $(2+3i)-(-4+i)$

53

3 실수의 나눗셈에서와 같이 복소수의 나눗셈에서도 분모가 0이 아닌 경우만 생각한다.

4 a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq0$일 때, 복소수의 나눗셈 $\frac{a+bi}{c+di}$는 분모의 켤레복소수 $c-di$를 분모, 분자에 곱하여 분모를 실수가 되게 한다.

즉, $(c+di)(c-di)=c^2+d^2$이므로

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

이다.

문제 풀이

문제 4

|주안점| 복소수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(2-5i)+3i=2+(-5+3)i=2-2i$

(2) $(2+3i)-(-4+i)=(2+4)+(3-1)i=6+2i$

답 (1) $2-2i$ (2) $6+2i$

다음을 통해 복소수의 곱셈을 알아보자.

2

함께하기 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

활동 ❶ 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 다항식의 곱셈에서와 같이 다음 식을 전개해 보자. (단, a, b, c, d는 실수이다.)

$$(a+bi)(c+di)=\underset{①}{\square}+\underset{②}{\square}+\underset{③}{\square}+\underset{④}{\square}$$

활동 ❷ $i^2=-1$임을 이용하여 활동 ❶의 결과를 간단히 해 보자.

$$(a+bi)(c+di)=(\square)+(\square)i$$

봄벨리(Bombelli, Raphael, 1526~1572)
이탈리아의 수학자로 복소수의 곱셈에서 허수단위를 문자처럼 생각하여 계산하는 방법을 처음 체계화했다.

위의 활동으로부터 다음을 알 수 있다.

복소수의 곱셈

a, b, c, d가 실수일 때,

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

예제 2 $(2+3i)(1-i)$를 계산하시오.

풀이 $(2+3i)(1-i)=2-2i+3i-3i^2=2-2i+3i+3$
$=5+i$

답 $5+i$

생각톡톡
복소수와 그 켤레복소수의 곱은 어떤 수일까?

문제 5 다음을 계산하시오.

(1) $(5+2i)(2+3i)$ (2) $(3+2i)(3-2i)$

3 복소수의 나눗셈은 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 계산한다. 즉, a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq0$일 때, 다음과 같이 계산한다.

4

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

54

문제 5

|주안점| 복소수의 곱셈을 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(5+2i)(2+3i)=10+15i+4i+6i^2$
$=10+15i+4i-6$
$=4+19i$

(2) $(3+2i)(3-2i)=9-6i+6i-4i^2$
$=9+4=13$

답 (1) $4+19i$ (2) 13

생각톡톡 복소수와 그 켤레복소수의 곱은 항상 실수이다. 실제로 $a+bi$ (a, b는 실수)와 그 켤레복소수인 $a-bi$를 곱하면 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$으로 그 결과는 항상 실수임을 알 수 있다.

함께하기

|지도 방향| 복소수의 곱셈도 다항식의 곱셈에서와 같은 방법으로 할 수 있음을 이해하게 한다.

|풀이| ❶ $(a+bi)(c+di)$

$$=\underset{①}{\boxed{ac}}+\underset{②}{\boxed{adi}}+\underset{③}{\boxed{bci}}+\underset{④}{\boxed{bdi^2}}$$

❷ $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bd\times(-1)$

$$=(\boxed{ac-bd})+(\boxed{ad+bc})i$$

답 ❶ ①: ac, ②: adi, ③: bci, ④: bdi^2
❷ $ac-bd$, $ad+bc$

지도 자료

복소수의 연산에 대한 성질

(1) 복소수의 연산에서도 실수의 연산에서와 같이 다음 성질이 성립한다.

임의의 세 복소수 z, w, v에 대하여

① 교환법칙 $z+w=w+z$, $zw=wz$

② 결합법칙 $(z+w)+v=z+(w+v)$
$(zw)v=z(wv)$

③ 분배법칙 $z(w+v)=zw+zv$
$(z+w)v=zv+wv$

즉, 복소수에서는 실수에서와 마찬가지로 덧셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙이 성립한다. 또, 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

(2) 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 다음이 성립한다.

① $z=\bar{z}$이면 z는 실수이고, z가 실수이면 $z=\bar{z}$이다.

➡ $z=\bar{z}$이므로 $a+bi=a-bi$에서
$b=-b$, 즉 $b=0$
따라서 z의 허수부분이 0이므로 z는 실수이다.

② $z=-\bar{z}$이면 z는 0 또는 순허수 (실수부분이 0인 복소수)이고, z가 0 또는 순허수이면 $z=-\bar{z}$이다.

➡ $z=\bar{z}$이므로 $a+bi=-(a-bi)$에서
$a=-a$, 즉 $a=0$
따라서 z의 실수부분이 0이므로
$b=0$이면 z는 0이고, $b\neq0$이면 z는 순허수이다.

③ $z+\bar{z}$, $z\bar{z}$는 실수이다.

➡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)
$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ (실수)

④ z가 실수일 때, $z^2\geq0$이다.

➡ z가 실수이면 $b=0$이므로 $z^2=a^2\geq0$

⑤ z가 순허수일 때, $z^2<0$이다.

➡ z가 순허수이면 $a=0$, $b\neq0$이므로
$z^2=(bi)^2=-b^2<0$

⑥ z가 순허수가 아닌 허수일 때, z^2은 허수이다.

➡ z가 순허수가 아닌 허수이면 $a\neq0$, $b\neq0$이므로
$z^2=(a^2-b^2)+2abi$ $(ab\neq0)$
따라서 $a^2=b^2$이면 z^2은 순허수이고, $a^2\neq b^2$이면 z^2은 순허수가 아닌 허수이다.

문제 풀이

문제 6

| 주안점 | 복소수의 나눗셈을 할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\frac{1}{2-5i}=\frac{2+5i}{(2-5i)(2+5i)}$

$=\frac{2+5i}{4+25}$

$=\frac{2}{29}+\frac{5}{29}i$

(2) $\frac{1-3i}{3+2i}=\frac{(1-3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\frac{-3-11i}{9+4}$

$=-\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$

(3) $\frac{1}{i}=\frac{-i}{i\times(-i)}=\frac{-i}{1}=-i$

(4) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{1+1}=i$

답 (1) $\frac{2}{29}+\frac{5}{29}i$ (2) $-\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$ (3) $-i$ (4) i

문제 7

| 주안점 | 복소수의 연산을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | $\frac{1}{Z}=\frac{1}{3+i}+\frac{1}{1+2i}$에서

$\frac{1}{3+i}=\frac{3-i}{(3+i)(3-i)}$

$=\frac{3-i}{9+1}=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$

$\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\frac{1-2i}{1+4}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

이므로

$\frac{1}{Z}=\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)$

$=\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\right)i$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{1-i}{2}$

따라서 $Z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\frac{2(1+i)}{1+1}=1+i$

답 $1+i$

이상을 정리하면 다음과 같다.

복소수의 나눗셈

a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq0$일 때,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

예제 3 다음을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $\frac{2}{1+i}$ (2) $\frac{2+i}{3-i}$

풀이 (1) $\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i}{1+1}=1-i$

(2) $\frac{2+i}{3-i}=\frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{5+5i}{9+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

답 (1) $1-i$ (2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

문제 6 다음을 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, a, b는 실수이다.)

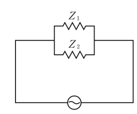
(1) $\frac{1}{2-5i}$ (2) $\frac{1-3i}{3+2i}$

(3) $\frac{1}{i}$ (4) $\frac{1+i}{1-i}$

문제 7 교류 회로에서 전류가 흐르기 어려운 정도를 나타내는 임피던스는 복소수 $a+bi$의 꼴로 나타낸다. 오른쪽 그림과 같이 임피던스의 값이 각각 Z_1, Z_2인 저항을 병렬로 연결시킨 교류 회로에서 임피던스 Z는

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$$

로 주어진다. $Z_1=3+i$, $Z_2=1+2i$일 때, 이 회로의 임피던스를 구하시오.



55

● 음수의 제곱근

내용 연구

❶ $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$이고, $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$임을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 8

| 주안점 | 음수의 제곱근을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) -4의 제곱근은

$\sqrt{4}i=2i$, $-\sqrt{4}i=-2i$

(2) $-\frac{2}{3}$의 제곱근은

$\sqrt{\frac{2}{3}}i=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i=\frac{\sqrt{6}}{3}i$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}i=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i=-\frac{\sqrt{6}}{3}i$

답 (1) $2i$, $-2i$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{3}i$, $-\frac{\sqrt{6}}{3}i$

생각 넓히기

| 지도 방향 | 허수단위 i의 거듭제곱의 규칙을 이용하여 복소수의 연산을 간단히 할 수 있음을 구체적인 예를 통해 알게 한다.

음수의 제곱근

어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉 $x^2=a$일 때 x를 a의 제곱근이라고 한다.

음수의 제곱근을 알아보자.

두 복소수 $\sqrt{3}i$와 $-\sqrt{3}i$에 대하여

$$(\sqrt{3}i)^2=3i^2=-3, \quad (-\sqrt{3}i)^2=3i^2=-3$$

이므로 -3의 제곱근은 $\sqrt{3}i$와 $-\sqrt{3}i$이다.

1

일반적으로 $a>0$일 때,

$$(\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a, \quad (-\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a$$

이므로 $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다.

이때 $\sqrt{a}i$를 $\sqrt{-a}$로 나타내기로 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

음수의 제곱근

$a>0$일 때,

❶ $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ ❷ $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다.

$\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$를 간단히 $\pm\sqrt{a}i$로 나타내기도 한다.

보기 ① $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$ ② -9의 제곱근은 $3i$와 $-3i$이다.

문제 8 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) -4 (2) $-\dfrac{2}{3}$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

허수단위 i의 거듭제곱의 규칙을 이용하여 오른쪽 식의 값을 구하려고 한다.

$$i+i^2+i^3+\cdots+i^{20}$$

활동 ❶ n이 자연수일 때, 다음 표를 완성해 보자.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
i^n	i								$\cdots$

활동 ❷ 활동 ❶의 결과를 바탕으로 발견할 수 있는 규칙을 말해 보자.

활동 ❸ 활동 ❷에서 찾은 규칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구해 보자.

56

지도 자료

음수의 제곱근의 성질

(1) $a<0,\ b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.

➡ $a<0,\ b<0$이면 $-a>0,\ -b>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\sqrt{b}&=\sqrt{-a}i\times\sqrt{-b}i\\&=\sqrt{(-a)(-b)}i^2\\&=-\sqrt{ab}\end{aligned}$$

$a>0,\ b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.

➡ $a>0,\ b<0$이면 $-b>0$이므로

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}i}=\frac{\sqrt{a}i}{\sqrt{-b}i^2}=-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}i=-\sqrt{\frac{a}{b}}$$

그 외의 경우에는

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (\text{단, } b\neq0)$$

예 ① $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\sqrt{8}i=-4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=-2i$

(2) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면

$a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면

$a>0,\ b<0$ 또는 $a=0,\ b\neq0$

| 풀이 |

❶ $i^2=-1,\quad i^3=i^2\times i=-i$

$i^4=i^3\times i=(-i)\times i=-i^2=1$

$i^5=i^4\times i=i,\quad i^6=i^5\times i=i\times i=i^2=-1$

$i^7=i^6\times i=(-1)\times i=-i$

$i^8=i^7\times i=(-i)\times i=-i^2=1$

$\vdots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
i^n	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	$\cdots$

❷ n이 자연수일 때, i^n의 값은 다음 규칙을 갖는다.

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 에 대하여

(i) $n=4k+1$일 때, $i^n=i$

(ii) $n=4k+2$일 때, $i^n=-1$

(iii) $n=4k+3$일 때, $i^n=-i$

(iv) $n=4(k+1)$일 때, $i^n=1$

❸ $i+i^2+i^3+\cdots+i^{20}$

$=(i^1+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20})$

$=(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)=0$

답 ❶ 풀이 참조

❷ $i,\ -1,\ -i,\ 1$이 반복된다. ❸ 0

읽기 자료

음수의 제곱근

> 1의 제곱근은 1과 -1의 두 개이다. 음수를 두 번 곱하면 양수가 되어 이것은 문제가 되지 않는다. 그러면 -1의 제곱근은 얼마인가?

이탈리아의 수학자 봄벨리(Bombelli, Raphael, 1526~1572)는 여러 수들의 제곱근을 연구하던 중 위와 같은 질문을 제기하였다.

이 문제는 사실 해결이 불가능했다. 같은 수를 두 번 곱한 결과는 항상 양수이기 때문에 $+1$이나 -1은 -1의 제곱근 $\sqrt{-1}$이 될 수 없었다. 그래서 수학자들은 새로운 수의 개념을 받아들여야 했고, 이와 같은 과정에서 허수가 발견되었다.

그 후 오일러(Euler, L., 1707~1783)는 $\sqrt{-1}$을 i로 나타내었고, 가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)는 대수학의 기본 정리를 증명하면서 데카르트가 사용한 '허수'라는 용어 대신에 '복소수'라는 새로운 용어를 도입하였다.

가우스

탐구&융합 복소수에서도 대소 관계를 정할 수 있을까?

| 지도 방향 | 복소수에서는 실수에서와 같은 대소 관계를 정할 수 없음을 이해하게 한다.

지도 자료

1. 복소수의 성질

실수에서는 대소 관계를 정할 수 있고, 양의 실수와 음의 실수도 구분할 수 있다. 예를 들어 두 실수 3, 5에 대하여 $3<5$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 3과 5를 복소수로 간주하더라도 위와 같은 대소 관계를 정할 수 있다.

그러나 이와 같은 관계는 모든 복소수에 대하여 정할 수 있다고 말할 수는 없다. 실제로 허수단위 i의 경우에는 양수 또는 음수로 정할 수 없다. 따라서 $3<5$에서 3과 5는 실수로 생각해야 한다.

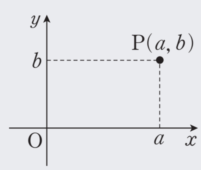
또, 두 허수 $z=3+i$, $w=3-i$에 대하여

$$z+w>0, \quad zw>0$$

이라 할 수 있다. 두 문자 z, w에 대하여 이 부등식이 무의미한 것은 아니지만, 일반적으로 부등식을 나타내는 문자는 특별한 조건이 없는 한 실수로 간주한다.

결과적으로 두 복소수에 대하여 '서로 같다' 또는 '서로 같지 않다'는 말할 수 있어도 대소 관계를 정할 수는 없다.

2. 복소수의 절댓값



실수에서와 마찬가지로 복소수에서도 절댓값을 정의할 수 있다. 복소수 $z=a+bi$에 대하여 $\sqrt{a^2+b^2}$을 복소수 z의 절댓값이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\sqrt{a^2+b^2}=|z|=|a+bi|$$

복소평면에 복소수 $z=a+bi$를 나타내었을 때 $|z|$는 원점에서 z를 나타내는 점 $\mathrm{P}(a, b)$까지의 거리와 같다.

복소수 $a+bi$에 대하여

$$|\mathrm{Re}(z)|=|a|\le|z|, \quad |\mathrm{Im}(z)|=|b|\le|z|$$

가 성립한다. 또, $\bar{z}=a-bi$, $z\bar{z}=a^2+b^2$이므로

$$|\bar{z}|=|z|, \quad |\bar{z}|^2=z\bar{z}$$

이다. 임의의 두 복소수 $z=a+bi$, $w=c+di$에 대하여

$zw=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$이므로

$$\begin{aligned}|zw|^2&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2\\&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\&=|z|^2|w|^2\end{aligned}$$

에서 $|zw|=|z||w|$이 성립한다. 또,

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2=\frac{z}{w}\left(\overline{\frac{z}{w}}\right)=\frac{z}{w}\times\frac{\bar{z}}{\bar{w}}=\frac{|z|^2}{|w|^2}=\left(\frac{|z|}{|w|}\right)^2$$

이므로 $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$이 성립한다.

탐구&융합 복소수에서도 대소 관계를 정할 수 있을까?

창의·융합 | 태도 및 실천

프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)는 실수를 수직선 위에 나타내었고, 수직선 위에 나타낼 수 없는 수를 상상의 수라는 뜻으로 허수(imaginary number)라고 했다.

실수는 수직선 위에 나타낼 수 있으므로 대소 관계를 확인할 수 있다. 즉, 두 실수 a, b에 대하여 수직선 위에서 실수 b를 나타내는 점이 실수 a를 나타내는 점보다 오른쪽에 있으면 $a<b$와 같이 대소 관계를 정한다.

따라서 두 실수 a, b에 대하여 반드시 오른쪽 세 가지 중 어느 하나만 성립함을 알 수 있다.

$$a>b, \quad a=b, \quad a<b$$

또한, 실수에서의 대소 관계는 다음과 같은 성질을 갖는다.

> 실수의 대소 관계에 대한 성질
> 세 실수 a, b, c에 대하여
> ① $a>b$이고 $c>0$이면 $\quad ac>bc$ $\qquad$ ② $a>b$이고 $c<0$이면 $\quad ac<bc$

그렇다면 복소수에서도 실수에서와 같이 위의 성질을 만족시키는 대소 관계를 정할 수 있을까?
이를 위해 우선 허수단위 i와 0 사이에 실수에서와 같은 대소 관계를 정할 수 있는지 알아보자.

❶ $i>0$인 경우: 위의 성질 ①에 의하여

$$i\times i>0\times i=0$$

이고 $i\times i=i^2=-1$이므로, $-1>0$이 되어서 모순이다.

❷ $i=0$인 경우: 양변에 i를 곱하면

$$i\times i=0\times i=0$$

이고 $i\times i=i^2=-1$이므로, $-1=0$이 되어서 모순이다.

❸ $i<0$인 경우: 위의 성질 ②에 의하여

$$i\times i>0\times i=0$$

이고 $i\times i=i^2=-1$이므로, $-1>0$이 되어서 모순이다.

따라서 허수단위 i와 0 사이에 실수에서와 같은 대소 관계를 정할 수 없다. 이를 통해 복소수에서는 실수에서와 같은 대소 관계를 정할 수 없음을 알 수 있다.

57

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 이차방정식의 근을 복소수의 범위에서 구할 수 있게 한다.

② 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알게 한다.

③ 이차방정식에서 판별식의 뜻을 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.

④ 이차방정식의 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 있게 한다.

▌지도상의 유의점

① 이차방정식의 근을 복소수의 범위까지 확장하더라도 이차방정식의 계수는 실수인 경우만 다룬다.

② 완전제곱식이나 근의 공식을 이용하면 계수가 실수인 모든 이차방정식의 근을 복소수의 범위에서 구할 수 있음을 이해하게 한다.

③ 계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 항상 두 근을 갖고, 허근을 갖는 경우에는 두 근이 서로 켤레복소수임을 근의 공식을 이용하여 알게 한다.

02 이차방정식의 판별식

학습 목표
이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알며, 이차방정식에서 판별식의 뜻을 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

준비하기
다음 이차방정식을 푸시오.
(1) $x^2-3x+2=0$
(2) $x^2-2x-1=0$

● 이차방정식의 실근과 허근

생각 열기 다음과 같은 두 이차방정식이 있다.

ㄱ. $x^2+4x+2=0$ ㄴ. $x^2-3x+3=0$

▶ 실수의 범위에서 근을 갖는 이차방정식을 말해 보자.

지금까지는 이차방정식의 근을 실수의 범위에서 구하였으나 이제부터는 복소수의 범위에서 구할 수 있는지 알아보자.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

에서

$b^2-4ac\ge0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 실수,

$b^2-4ac<0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 허수

이다.

1 따라서 계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 갖는다.

이때 실수인 근을 **실근**, 허수인 근을 **허근**이라고 한다.

다가서기
리트머스 시험지를 이용하면 용액이 산성인지 알칼리성인지를 판별할 수 있다.
이차방정식의 경우에도 근을 직접 구하지 않고, 그 근이 실수인지 허수인지를 판별하는 방법이 있다.

보기 이차방정식 $x^2-4x+5=0$을 근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times5}}{2\times1}$$

$$=\frac{4\pm2i}{2}=2\pm i$$

따라서 $x=2+i$ 또는 $x=2-i$

생각 톡톡
계수가 실수인 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가질 때, 두 허근은 어떤 관계일까?

문제 1 다음 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지를 말하시오.

(1) $x^2-3x+6=0$ (2) $2x^2-5x+1=0$

58

④ 이차방정식의 근을 직접 구하지 않고도 판별식 b^2-4ac를 이용하여 근을 판별할 수 있음을 이해하게 하고, 중근은 실근임을 알게 한다.

⑤ 이차방정식의 근이 실근인지 허근인지 판별하는 방법은 수학 전반에 걸쳐 자주 활용되고 있음을 알게 한다.

용어와 기호

- 실근(實根, real root)
- 허근(虛根, imaginary root)
- 판별식(判別式, discriminant)

준비하기

| 주안점 | 이차방정식의 해를 구할 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | (1) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=2$

(2) $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$

$=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ (2) $x=1\pm\sqrt{2}$

● 이차방정식의 실근과 허근

생각 열기

| 지도 방향 | 주어진 이차방정식을 만족시키는 실수 x의 값이 있는지 확인해 봄으로써 실수의 범위에서 근을 갖는 이차방정식과 근을 갖지 않는 이차방정식이 있음을 예를 통해 이해하게 한다.

▶ ㄱ. $x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times2}}{2\times1}$

$=-2\pm\sqrt{2}$

ㄴ. $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times3}}{2\times1}$

$=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 실수의 범위에서 근을 갖는 이차방정식은 ㄱ이다.

내용 연구

1 중학교 과정에서는 이차방정식의 근을 실수의 범위에서만 다루었기 때문에 실근, 허근이라는 용어를 사용하지 않았지만 이제부터는 근을 복소수의 범위까지 확장하여 다루고 있으므로 실근, 허근이라는 용어를 정의함을 알게 한다. 단, 이차방정식의 계수는 실수인 범위에서만 다룬다.

생각 톡톡 계수가 실수인 이차방정식의 두 허근은 서로 켤레복소수이다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀고, 그 근이 실근인지 허근인지를 알게 한다.

| 풀이 | (1) $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times6}}{2\times1}$

$=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

(2) $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times1}}{2\times2}$

$=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 (1) $x=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}$, 허근

(2) $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$, 실근

이차방정식의 판별식

평가 기준

상	이차방정식의 판별식을 이용한 실생활 관련 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	이차방정식의 근을 판별하고, 판별식의 뜻을 설명할 수 있다.
하	판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 이차방정식의 근의 공식의 근호 안에 있는 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 주어진 이차방정식이 실근 또는 허근을 가짐을 알 수 있게 한다.

답

$ax^2+bx+c=0$	b^2-4ac의 값의 부호	실근, 허근
$x^2+2x-1=0$	$2^2-4\times1\times(-1)=8>0$	실근
$4x^2-4x+1=0$	$(-4)^2-4\times4\times1=0$	실근
$x^2-3x+4=0$	$(-3)^2-4\times1\times4=-7<0$	허근

내용 연구

1 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근을 직접 구하지 않고도 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 다음과 같이 근을 판별할 수 있음을 알게 한다.

(i) $b^2-4ac>0$일 때,
$\sqrt{b^2-4ac}$의 값이 실수이므로 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $b^2-4ac=0$일 때,
$\sqrt{b^2-4ac}=0$이므로 이차방정식은 중근(실근)을 갖는다.

(iii) $b^2-4ac<0$일 때,
$\sqrt{b^2-4ac}$의 값이 허수이므로 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

2 이차방정식의 계수가 실수가 아닌 경우에는 판별식으로 근을 판별할 수 없다.
예를 들어 이차방정식

$$x^2-(3+2i)x+(1+3i)=0$$

의 판별식 D는

$$\begin{aligned} D&=\{-(3+2i)\}^2-4(1+3i)\\ &=5+12i-4-12i\\ &=1>0 \end{aligned}$$

이지만, 이 이차방정식의 해를 직접 구하면 $1+i$, $2+i$로 두 허근을 가지므로 계수가 허수인 경우에는 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 없다.

이차방정식의 판별식

생각 열기 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b^2-4ac의 값의 부호를 판단하고, 그 근이 실근인지 허근인지를 조사하여 다음 표를 완성해 보자.

$ax^2+bx+c=0$	b^2-4ac의 값의 부호	실근, 허근
$x^2+2x-1=0$	$2^2-4\times1\times(-1)=8>0$	실근
$4x^2-4x+1=0$		
$x^2-3x+4=0$		

위의 생각 열기에서와 같이 이차방정식의 근을 직접 구하지 않고도 그 근이 실근인지 허근인지를 판별할 수 있다.

1 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

가 실근인지 허근인지는 근호 안에 있는 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

(i) $b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 실근
(ii) $b^2-4ac=0$이면 중근(실근)
(iii) $b^2-4ac<0$이면 서로 다른 두 허근

2 실베스터(Sylvester, J. J., 1814~1897)
영국의 수학자로 판별식의 기호 D를 처음 사용했다고 한다.

이와 같이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 판별할 수 있으므로 b^2-4ac를 이차방정식의 **판별식**이라 하고, 기호 D로 나타낸다. 즉,

$$D=b^2-4ac$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

3 **이차방정식의 근의 판별**

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 할 때,
1 $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
2 $D=0$이면 중근(실근)을 갖는다.
3 $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 가질 조건은
$D=b^2-4ac\geq0$
이다.

59

|참고| 계수가 실수가 아닐 때도 판별식의 값이 0이면 이차방정식은 중근을 갖는다.

3 '계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이다.'를 증명하면 다음과 같다.
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때 $D>0$이 성립하지 않는다고 하면, $D=0$ 또는 $D<0$이다.
그런데 $D=0$이면 중근을 가지므로 가정에 어긋나고, $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 가지므로 가정에 어긋난다. 따라서 $D>0$이다.
같은 방법으로 '계수가 실수인 이차방정식이 중근을 가지면 $D=0$이다.'와 '계수가 실수인 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이다.'도 증명할 수 있다. 특히, 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D\geq0$이다. 이때 중근도 실근임을 확인한다.

4 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$과 같이 일차항의 계수가 짝수인 경우에는 판별식 D가

$$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$$

예제 1 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2+4x-1=0$ (2) $x^2-8x+16=0$ (3) $x^2-3x+5=0$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2+4x-1=0$의 판별식 D는
$D=4^2-4\times1\times(-1)=20>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(2) 이차방정식 $x^2-8x+16=0$의 판별식 D는
$D=(-8)^2-4\times1\times16=0$이므로 중근을 갖는다.
(3) 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 판별식 D는
$D=(-3)^2-4\times1\times5=-11<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근

문제 2 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2-3x+2=0$ (2) $x^2+6x+9=0$
(3) $2x^2-4x+3=0$ (4) $3x^2+x+1=0$

4 **예제 2** 이차방정식 $x^2-4x+a-5=0$이 실근을 갖도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오.

풀이 주어진 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식 D가 $D\geq0$이어야 하므로
$$D=(-4)^2-4\times1\times(a-5)=36-4a\geq0$$
따라서 $a\leq9$

답 $a\leq9$

문제 3 이차방정식 $x^2+2x+3-a=0$이 다음과 같은 근을 갖도록 실수 a의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 중근 (2) 서로 다른 두 허근

탐구 **문제 4** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a와 c의 부호가 다르면 이 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 가짐을 설명하시오. (단, $c\neq0$)

60

이므로 $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$를 이용하여 근을 판별할 수도 있다.

문제 풀이

문제 2

| 주안점 | 판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별하게 한다.

| 풀이 | (1) 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 판별식 D는
$$D=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 이차방정식 $x^2+6x+9=0$의 판별식 D는
$$D=6^2-4\times1\times9=0$$
이므로 중근을 갖는다.

(3) 이차방정식 $2x^2-4x+3=0$의 판별식 D는
$$D=(-4)^2-4\times2\times3=-8<0$$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(4) 이차방정식 $3x^2+x+1=0$의 판별식 D는
$$D=1^2-4\times3\times1=-11<0$$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근
(3) 서로 다른 두 허근 (4) 서로 다른 두 허근

문제 3

| 주안점 | 이차방정식이 중근, 서로 다른 두 허근을 가질 조건을 이용하여 실수 a의 값 또는 범위를 정할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로
$$D=2^2-4\times1\times(3-a)=4a-8=0$$
따라서 $a=2$

(2) 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지려면 판별식 D가 $D<0$이어야 하므로
$$D=2^2-4\times1\times(3-a)=4a-8<0$$
따라서 $a<2$

답 (1) $a=2$
(2) $a<2$

문제 4

| 주안점 | 이차방정식이 항상 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 이해하게 한다.

| 풀이 | 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 판별식 D는
$$D=b^2-4ac$$
이때 a와 c의 부호가 서로 다르므로
$$ac<0$$
즉, $-4ac>0$이고 $b^2\geq0$이므로
$$D=b^2-4ac>0$$
따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a와 c의 부호가 다르면 이 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

지도 자료

이차방정식의 근과 판별식

일반적으로 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 이 이차바정식의 판별식 D에 대하여

(i) α, β가 모두 양수인 경우
$$D\geq0,\quad \alpha+\beta>0,\quad \alpha\beta>0$$
(ii) α, β가 모두 음수인 경우
$$D\geq0,\quad \alpha+\beta<0,\quad \alpha\beta>0$$
(iii) α, β 중 어느 하나는 양수, 나머지는 음수인 경우
$$\alpha\beta<0$$
| 참고 | 두 근의 부호가 다르면 판별식 D는 항상 $D\geq0$으로 서로 다른 두 실근을 가지므로 D의 조건을 고려할 필요가 없다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하게 한다.
② 근과 계수의 관계를 이용하여 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있게 한다.
③ 이차방정식의 두 근을 이용하여 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 이차방정식의 근과 계수의 관계는 방정식의 계수가 허수일 때도 성립하지만, 고등학교 과정에서는 계수가 실수인 것만 다룬다.
② 이차방정식의 계수를 알면 근을 구하지 않고도 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구할 수 있음을 알게 한다.
③ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하는 복잡한 문제는 다루지 않는다.
④ 다항식의 인수분해는 허용되는 수의 범위에 따라 다양하게 나올 수 있음을 알게 한다.

준비하기

| 주안점 | 식을 전개한 다음 좌변과 우변을 비교하여 등식이 성립할 조건을 찾을 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | (1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\boxed{2\alpha\beta}$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\boxed{\alpha+\beta}}{\alpha\beta}$

답 (1) $2\alpha\beta$ (2) $\alpha+\beta$

● 이차방정식의 근과 계수의 관계

평가 기준

상	이차방정식의 근의 공식으로부터 근과 계수의 관계를 이용하는 실생활과 관련된 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	이차방정식의 근의 공식으로부터 근과 계수의 관계를 이끌어내고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
하	근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 직접 구해 보고, 이차방정식의 근과 계수가 서로 관계가 있음을 알게 한다.

03 이차방정식의 근과 계수의 관계

학습 목표
이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.

준비 하기
다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.
(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\square$
(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\square}{\alpha\beta}$

● 이차방정식의 근과 계수의 관계

생각 열기 이차방정식 $x^2-2x-8=0$의 두 근과 계수 사이의 관계를 알아보려고 한다.

❶ 두 근의 합을 구하고, 그 값을 x의 계수와 비교해 보자.
❷ 두 근의 곱을 구하고, 그 값을 상수항과 비교해 보자.

이차방정식의 두 근의 합과 곱이 각 항의 계수와 어떤 관계가 있는지 알아보자.

1 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

라 하면, 합 $\alpha+\beta$와 곱 $\alpha\beta$는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=-\frac{b}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\\&=\frac{c}{a}\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

다가 서기
지도상의 길이와 축척을 이용하면 두 도시 사이의 거리를 직접 측정하지 않고도 구할 수 있다.
이차방정식에서도 근과 계수의 관계를 이용하면 두 근을 직접 구하지 않고도 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.

이차방정식의 근과 계수의 관계
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2 참고 계수가 실수인 이차방정식에서 두 근의 합과 곱은 항상 실수이다.

61

❶ $x^2-2x-8=0$, $(x-4)(x+2)=0$
따라서 $x=4$ 또는 $x=-2$
두 근의 합: $4+(-2)=2$, x의 계수: -2
즉, 두 근의 합은 x의 계수와 부호만 다르다.
❷ 두 근의 곱: $4\times(-2)=-8$, 상수항: -8
즉, 두 근의 곱은 상수항과 같다.

내용 연구

1 이차방정식의 근과 계수의 관계는 다음과 같이 항등식을 이용하여 유도할 수도 있음을 이해하게 한다.
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

즉, $ax^2+bx+c=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$
위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2 계수가 실수인 이차방정식이 한 허근을 가지면 그 켤레복소수도 근이 됨을 알고, 서로 다른 두 허근을 갖는 경우에도 두 근의 합과 곱은 실수가 됨을 이해하게 한다.

(보기) 이차방정식 $3x^2-4x+2=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3},\quad \alpha\beta=\frac{2}{3}$$

3 **문제 1** 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하시오.

(1) $x^2-3x+3=0$ (2) $2x^2+5x-4=0$

(3) $3x^2-4x=0$ (4) $-2x^2-7x+6=0$

4 **예제 1** 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 식으로 변형한다.

풀이 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times5=-1$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{5}$

답 (1) -1 (2) $\frac{3}{5}$

문제 2 이차방정식 $4x^2+3x+8=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$ (2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

탐구 **문제 3** 다음은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 푼 후 나눈 대화이다. (단, a, b는 실수이다.)

(1) 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근을 구하시오.

62

3 각 이차방정식의 두 근을 직접 구하여 두 근의 합과 곱을 계산할 수도 있으나 이는 계산 과정이 복잡하므로 근과 계수의 관계를 이용하게 한다.

4 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한 다음 주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 식으로 변형한다. 이때 곱셈 공식의 변형을 적절히 이용하도록 한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 주어진 이차방정식의 두 근을 각각 α, β라 하면 근과 계수의 관계로부터

(1) $\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3,\quad \alpha\beta=\frac{3}{1}=3$

(2) $\alpha+\beta=-\frac{5}{2},\quad \alpha\beta=\frac{-4}{2}=-2$

(3) $\alpha+\beta=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3},\quad \alpha\beta=\frac{0}{3}=0$

(4) $\alpha+\beta=-\frac{-7}{-2}=-\frac{7}{2},\quad \alpha\beta=\frac{6}{-2}=-3$

답 (1) 두 근의 합: 3, 두 근의 곱: 3

(2) 두 근의 합: $-\frac{5}{2}$, 두 근의 곱: -2

(3) 두 근의 합: $\frac{4}{3}$, 두 근의 곱: 0

(4) 두 근의 합: $-\frac{7}{2}$, 두 근의 곱: -3

문제 2

| 주안점 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{4},\quad \alpha\beta=\frac{8}{4}=2$$

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$$=2-\frac{3}{4}+1=\frac{9}{4}$$

(2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$$=\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2-2\times2}{2}=-\frac{55}{32}$$

답 (1) $\frac{9}{4}$ (2) $-\frac{55}{32}$

문제 3

| 주안점 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 처음 이차방정식의 계수를 정하고, 이를 이용하여 이차방정식의 근을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 상수항을 바르게 보고 풀었을 때의 두 근이 $-1+i$, $-1-i$이므로 두 근의 곱은

$$b=(-1+i)(-1-i)=2$$

x의 계수를 바르게 보고 풀었을 때의 두 근이 $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$이므로 두 근의 합은

$$-a=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2,$$

즉, $a=-2$

(2) (1)에서 처음 이차방정식은

$$x^2-2x+2=0$$

따라서 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 근은

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times2}}{2\times1}$$

$$=1\pm i$$

답 (1) $a=-2$, $b=2$ (2) $x=1\pm i$

● 두 수를 근으로 하는 이차방정식

내용 연구

❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구할 수 있게 한다.
즉, 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\text{두 근의 합})x+(\text{두 근의 곱})=0$$

의 꼴이다. 따라서 두 근의 합과 곱만 알면 주어진 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있음을 알게 한다.

❷ 두 수를 근으로 하는 이차방정식은 x^2의 계수가 1인 경우만 다루지만 x^2의 계수에 따라 무수히 많은 이차방정식이 존재함을 알게 한다.
인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이의 역 과정을 생각하여 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 다음과 같이 구할 수도 있다.
두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

과 같이 나타낼 수 있다.
이때 위의 식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$$

이다.
또, α를 중근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$$a(x-\alpha)^2=0$$

과 같이 나타낼 수 있다.

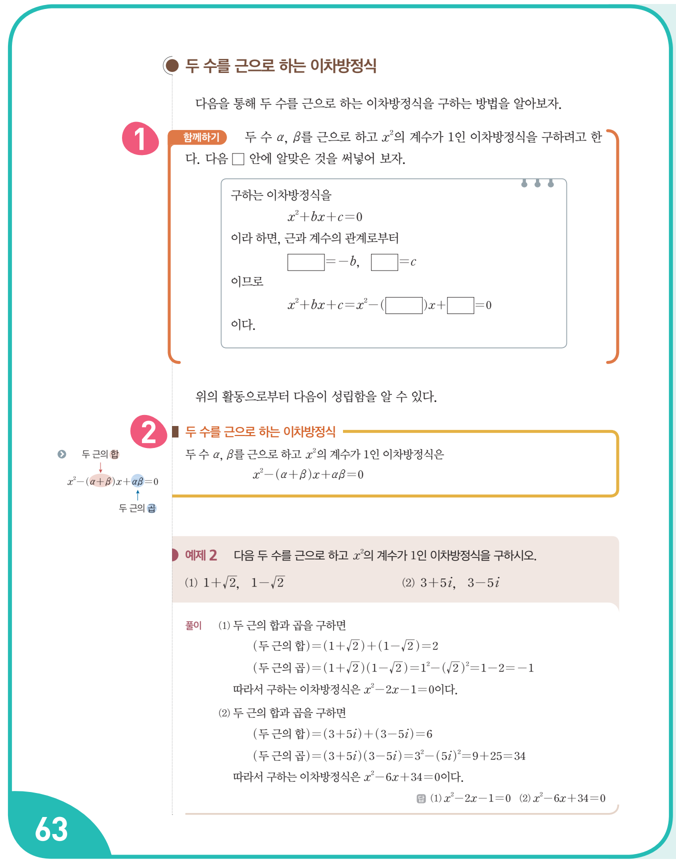
❸ 이차방정식 $x^2+ax+b=0\ (b\neq0)$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 수 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 근으로 하는 이차방정식은 $bx^2+ax+1=0$이다.
실제로 α는 $x^2+ax+b=0$의 한 근이므로 $\alpha^2+a\alpha+b=0$이고, 위의 식의 양변을 α^2으로 나누면 다음이 성립한다.

$$1+a\times\frac{1}{\alpha}+\frac{b}{\alpha^2}=0,\quad b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+a\times\frac{1}{\alpha}+1=0$$

β도 $x^2+ax+b=0$의 한 근이므로 같은 방법으로

$$b\left(\frac{1}{\beta}\right)^2+a\times\frac{1}{\beta}+1=0$$

이 성립한다. 따라서 이차방정식 $bx^2+ax+1=0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이다.


● 두 수를 근으로 하는 이차방정식

다음을 통해 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구하는 방법을 알아보자.

1 함께하기 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하려고 한다. 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

구하는 이차방정식을

$$x^2+bx+c=0$$

이라 하면, 근과 계수의 관계로부터

$$\boxed{}=-b,\quad \boxed{}=c$$

이므로

$$x^2+bx+c=x^2-(\boxed{})x+\boxed{}=0$$

이다.

위의 활동으로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

2 ■ 두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

두 근의 합
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
두 근의 곱

예제 2 다음 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ (2) $3+5i$, $3-5i$

풀이 (1) 두 근의 합과 곱을 구하면

(두 근의 합)$=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

(두 근의 곱)$=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1^2-(\sqrt{2})^2=1-2=-1$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-2x-1=0$이다.

(2) 두 근의 합과 곱을 구하면

(두 근의 합)$=(3+5i)+(3-5i)=6$

(두 근의 곱)$=(3+5i)(3-5i)=3^2-(5i)^2=9+25=34$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+34=0$이다.

답 (1) $x^2-2x-1=0$ (2) $x^2-6x+34=0$

63

함께하기

|지도 방향| 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하는 과정을 이해하게 한다.

|풀이| 구하는 이차방정식을

$$x^2+bx+c=0$$

이라 하면, 근과 계수의 관계로부터

$$\boxed{\alpha+\beta}=-b,\quad \boxed{\alpha\beta}=c$$

이므로

$$x^2+bx+c=x^2-(\boxed{\alpha+\beta})x+\boxed{\alpha\beta}=0$$

이다.

답 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$

문제 풀이

문제 4

|주안점| 근과 계수의 관계를 이용하여 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) (두 근의 합)$=2+(-3)=-1$

(두 근의 곱)$=2\times(-3)=-6$

문제 4 다음 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $2, \quad -3$ (2) $\sqrt{5}+1, \quad \sqrt{5}-1$

(3) $-3+i, \quad -3-i$ (4) $4+\sqrt{2}i, \quad 4-\sqrt{2}i$

3 **예제 3** 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$과 $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

풀이 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=5$이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}=0$이다.

답 $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}=0$

문제 5 이차방정식 $2x^2+6x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.

(1) $\alpha+\beta, \quad \alpha\beta$ (2) $\alpha+1, \quad \beta+1$

이차식의 인수분해

4 계수가 실수인 이차식 ax^2+bx+c의 인수분해는 지금까지 실수의 범위에서 생각하였지만 이차방정식의 근을 이용하면 복소수의 범위에서도 할 수 있다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ &=a(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

따라서 계수가 실수인 이차식은 복소수의 범위에서 항상 두 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있다.

64

따라서 구하는 이차방정식은 $\quad x^2+x-6=0$

(2) (두 근의 합)$=(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{5}-1)=2\sqrt{5}$

(두 근의 곱)$=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=4$

따라서 구하는 이차방정식은 $\quad x^2-2\sqrt{5}x+4=0$

(3) (두 근의 합)$=(-3+i)+(-3-i)=-6$

(두 근의 곱)$=(-3+i)(-3-i)=10$

따라서 구하는 이차방정식은 $\quad x^2+6x+10=0$

(4) (두 근의 합)$=(4+\sqrt{2}i)+(4-\sqrt{2}i)=8$

(두 근의 곱)$=(4+\sqrt{2}i)(4-\sqrt{2}i)=18$

따라서 구하는 이차방정식은 $\quad x^2-8x+18=0$

답 (1) $x^2+x-6=0$ (2) $x^2-2\sqrt{5}x+4=0$
(3) $x^2+6x+10=0$ (4) $x^2-8x+18=0$

문제 5

|주안점| 근과 계수의 관계를 이용하여 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta=-3, \quad \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

(1) $\alpha+\beta+\alpha\beta=-3+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\times(-3)=-\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$$

(2) $(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=-3+2=-1$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=\frac{1}{2}-3+1=-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2+x-\frac{3}{2}=0$$

답 (1) $x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$ (2) $x^2+x-\frac{3}{2}=0$

지도 자료

두 수를 근으로 하는 이차방정식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

(1) $-\alpha$, $-\beta$를 근으로 하는 이차방정식

(두 근의 합)$=-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$

(두 근의 곱)$=(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

이므로 구하는 이차방정식은

$$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

따라서 $\quad ax^2-bx+c=0$

(2) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 근으로 하는 이차방정식

(두 근의 합)$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}$

(두 근의 곱)$=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}$

이므로 구하는 이차방정식은

$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$$

따라서 $\quad cx^2+bx+a=0\,(c\neq0)$

이차식의 인수분해

내용 연구

4 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 계수가 실수인 이차방정식의 두 근을 복소수의 범위에서 구할 수 있으므로 계수가 실수인 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해할 수 있다.

내용 연구

1 계수가 실수인 이차식은 복소수의 범위에서 항상 두 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있음을 이해하게 한다. 더 확장하면 n차방정식은 복소수의 범위에서 n개의 근을 가지므로 n차식은 복소수의 범위에서 항상 n개의 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있음을 이해하게 한다.

2 이차식의 인수분해에서는 두 수를 근으로 하는 이차방정식과는 달리 x^2의 계수가 1이 아닌 경우에 주의하도록 한다.

문제 풀이

문제 6

| 주안점 | 이차방정식의 두 근을 이용하여 이차식을 인수분해할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 이차방정식 $x^2+8=0$의 근은

$x=\pm2\sqrt{2}i$이므로

$$x^2+8=(x-2\sqrt{2}i)\{x-(-2\sqrt{2}i)\}$$
$$=(x-2\sqrt{2}i)(x+2\sqrt{2}i)$$

(2) 이차방정식 $x^2+5x+5=0$의 근은

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$이므로

$$x^2+5x+5=\left(x-\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$=\left(x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

(3) 이차방정식 $x^2-8x+4=0$의 근은

$x=4\pm2\sqrt{3}$이므로

$$x^2-8x+4=\{x-(4+2\sqrt{3})\}\{x-(4-2\sqrt{3})\}$$
$$=(x-4-2\sqrt{3})(x-4+2\sqrt{3})$$

(4) 이차방정식 $3x^2-2x+3=0$의 근은

$x=\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$이므로

$$3x^2-2x+3$$
$$=3\left\{x-\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)\right\}$$
$$=3\left(x-\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)\left(x-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)$$

답 (1) $(x-2\sqrt{2}i)(x+2\sqrt{2}i)$

(2) $\left(x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

(3) $(x-4-2\sqrt{3})(x-4+2\sqrt{3})$

(4) $3\left(x-\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)\left(x-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

1 **이차식의 인수분해**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

예제 4 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

(1) x^2-6x+7 (2) x^2+4x+5

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 근은 $x=3\pm\sqrt{2}$이므로

$$x^2-6x+7=\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}$$
$$=(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$$

(2) 이차방정식 $x^2+4x+5=0$의 근은 $x=-2\pm i$이므로

$$x^2+4x+5=\{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\}$$
$$=(x+2-i)(x+2+i)$$

답 (1) $(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$ (2) $(x+2-i)(x+2+i)$

2 **문제 6** 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하시오.

(1) x^2+8 (2) x^2+5x+5

(3) x^2-8x+4 (4) $3x^2-2x+3$

생각 넓히기 문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G., 1501~1576)는 1545년에 발간한 『위대한 술법』에서, 합이 10이고 곱이 40인 두 수를 찾는 문제를 제시했다.

2013년에 발행된 카르다노 기념 우표

활동 1 두 근의 합이 10이고 곱이 40일 때, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구해 보자.

활동 2 활동 1에서 구한 이차방정식을 풀고, 주어진 조건을 모두 만족시키는 두 수를 찾아보자.

65

생각 넓히기

| 지도 방향 | 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식을 구하고, 주어진 조건을 만족시키는 두 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 1 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=10$, $\alpha\beta=40$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-10x+40=0$

2 이차방정식 $x^2-10x+40=0$을 풀면

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times1\times40}}{2\times1}$$
$$=5\pm\sqrt{15}i$$

따라서 구하는 두 수는 $5+\sqrt{15}i$, $5-\sqrt{15}i$

답 1 $x^2-10x+40=0$ 2 $5+\sqrt{15}i$, $5-\sqrt{15}i$

읽기 자료

카르다노의 문제

카르다노(Cardano, G., 1501~1576)는 삼차방정식의 일반적인 해를 구하는 과정에 음수의 제곱근이 필요함을 인식했다. 그는 '10을 두 부분으로 나누고, 그 두 부분을 곱하여 40이 되도록 할 수 있는가?'라는 문제에서 $5\pm\sqrt{-15}$라는 답을 얻어 음수의 제곱근을 소개했지만 실제의 수로 인정하지는 않았다고 한다.

Ⅱ-1. 복소수와 이차방정식

중단원 마무리하기

복소수

(1) 실수 a, b에 대하여 $a+bi$ 꼴의 수를 **복소수**라 하고, a를 **실수부분**, b를 **허수부분**이라고 한다.

(2) **복소수가 서로 같을 조건**
두 복소수 $a+bi$, $c+di$(a, b, c, d는 실수)에 대하여 $a=c$, $b=d$일 때, $a+bi=c+di$이다.

(3) **켤레복소수:** a, b가 실수일 때,
$\overline{a+bi}=a-bi$

(4) **복소수의 사칙연산:** a, b, c, d가 실수일 때,
① $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
② $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
③ $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
④ $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq0$)

(5) **음수의 제곱근:** $a>0$일 때,
① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$
② $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다.

이차방정식의 판별식

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 판별식 $D=b^2-4ac$라 할 때,
① $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $D=0$이면 중근(실근)을 갖는다.
③ $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

(1) **이차방정식의 근과 계수의 관계**
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(2) **두 수를 근으로 하는 이차방정식**
두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

(3) **이차식의 인수분해**
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

기본

01 다음 등식이 성립하도록 실수 x, y의 값을 정하시오.
(1) $(x-3)+(2-y)i=0$
(2) $(2x+y)-yi=6i$

02 다음 복소수의 켤레복소수를 구하시오.
(1) $-3+4i$　　(2) $-5+\sqrt{2}i$

03 다음을 계산하시오.
(1) $(2+i)+(1-3i)$
(2) $(3-2i)-(2-3i)$
(3) $(-3+i)(2-i)$
(4) $\dfrac{2-i}{3+4i}$

04 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.
(1) $3x^2+4x-1=0$
(2) $9x^2+12x+4=0$
(3) $5x^2-x+3=0$

05 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오.
(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$
(3) $(\alpha-1)(\beta-1)$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

66

중단원 마무리하기

01

|주안점| 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 등식이 성립하도록 하는 실수의 값을 정할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(x-3)+(2-y)i=0$에서

$x-3=0,\quad 2-y=0$

따라서　$x=3$, $y=2$

(2) $(2x+y)-yi=6i$에서

$2x+y=0,\quad -y=6$

따라서　$x=3$, $y=-6$

답 (1) $x=3$, $y=2$　(2) $x=3$, $y=-6$

02

|주안점| 복소수의 켤레복소수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\overline{-3+4i}=-3-4i$　(2) $\overline{-5+\sqrt{2}i}=-5-\sqrt{2}i$

답 풀이 참조

03

|주안점| 복소수의 사칙연산을 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(2+i)+(1-3i)=(2+1)+(1-3)i$
$=3-2i$

(2) $(3-2i)-(2-3i)=(3-2)+(-2+3)i$
$=1+i$

(3) $(-3+i)(2-i)=-6+3i+2i+1$
$=-5+5i$

(4) $\dfrac{2-i}{3+4i}=\dfrac{(2-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{2-11i}{9+16}=\dfrac{2}{25}-\dfrac{11}{25}i$

답 (1) $3-2i$　(2) $1+i$　(3) $-5+5i$　(4) $\dfrac{2}{25}-\dfrac{11}{25}i$

04

|주안점| 판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별하게 한다.

|풀이| (1) 이차방정식 $3x^2+4x-1=0$의 판별식 D는

$D=4^2-4\times3\times(-1)=28>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 이차방정식 $9x^2+12x+4=0$의 판별식 D는

$D=12^2-4\times9\times4=0$

이므로 중근을 갖는다.

(3) 이차방정식 $5x^2-x+3=0$의 판별식 D는

$D=(-1)^2-4\times5\times3=-59<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 (1) 서로 다른 두 실근
(2) 중근
(3) 서로 다른 두 허근

05

|주안점| 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 근과 계수의 관계로부터

$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times\dfrac{1}{2}=3$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$

(3) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=\dfrac{1}{2}-2+1=-\dfrac{1}{2}$

(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$

답 (1) 3　(2) 4　(3) $-\dfrac{1}{2}$　(4) 6

06

| 주안점 | 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x+y+(x-y)i=3+i$$

따라서 $\quad x+y=3, \quad x-y=1$

위의 식을 연립하여 풀면 $\quad x=2,\ y=1$

즉, 구하는 값은 $\quad x^2+y^2=5$ 답 5

07

| 주안점 | 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 복소수와 켤레복소수의 연산을 할 수 있게 한다.

| 풀이 | $z=x+yi$ (x, y는 실수)라 하면 $\bar{z}=x-yi$이므로 주어진 등식의 좌변은

$$\begin{aligned}3(x+yi)-2(x-yi)&=3x+3yi-2x+2yi\\&=x+5yi\end{aligned}$$

따라서 $x+5yi=2+15i$이므로

$$x=2,\ y=3$$

즉, $z=2+3i$, $\bar{z}=2-3i$이므로 구하는 값은

$$z\bar{z}=(2+3i)(2-3i)=4+9=13$$

답 13

표준

06 등식 $(1+i)(x-yi)=3+i$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하시오.

07 등식 $3z-2\bar{z}=2+15i$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

08 두 복소수 $z=5+3i$, $w=4-i$에 대하여 $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{w}}$의 값을 구하시오.
(단, $\bar{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

09 이차방정식 $x^2-6x+2a-1=0$이 서로 다른 두 허근을 갖도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오.

|서·술·형|

10 이차방정식 $x^2+ax-6=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2+bx+18=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$일 때, $a+b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.
(단, a, b는 실수이다.)

67

08

| 주안점 | 복소수의 나눗셈을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $z=5+3i$, $\bar{w}=4+i$에서

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{5+3i}=\frac{5-3i}{(5+3i)(5-3i)}=\frac{5}{34}-\frac{3}{34}i$$

$$\frac{1}{\bar{w}}=\frac{1}{4+i}=\frac{4-i}{(4+i)(4-i)}=\frac{4}{17}-\frac{1}{17}i$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{w}}=\frac{5}{34}-\frac{3}{34}i+\frac{4}{17}-\frac{1}{17}i=\frac{13}{34}-\frac{5}{34}i$$

답 $\dfrac{13}{34}-\dfrac{5}{34}i$

09

| 주안점 | 판별식을 이용하여 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가질 조건을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지려면 판별식 D가 $D<0$이어야 하므로

$$D=(-6)^2-4\times1\times(2a-1)=40-8a<0$$

따라서 $\quad a>5$ 답 $a>5$

10

| 주안점 | 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 이차방정식 $x^2+ax-6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta=-a,\quad \alpha\beta=-6 \qquad \cdots\cdots ① \qquad ▶ 30\,\%$$

또, 이차방정식 $x^2+bx+18=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta+\alpha\beta=-b \qquad \cdots\cdots ②$$

$$(\alpha+\beta)\alpha\beta=18 \qquad \cdots\cdots ③ \qquad ▶ 30\,\%$$

답 구하기 ①을 ②와 ③에 각각 대입하면

$$-a-6=-b,\quad 6a=18$$

$a=3$, $b=9$이므로 구하는 값은 $\quad a+b=12$ ▶ 40 %

11

| 주안점 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 두 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 근과 계수의 관계로부터

11 다음을 만족시키는 두 수 α, β를 구하시오.

(1) $\alpha+\beta=4,\quad \alpha\beta=5$　　(2) $\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-4$

발 전

12 실수가 아닌 두 복소수 z, w가 $z+\overline{w}=0$을 만족시킬 때, 항상 실수인 것만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오. (단, $\overline{z}$, $\overline{w}$는 각각 z, w의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ. $w-\overline{z}$　ㄴ. $i(z+w)$　ㄷ. $z\overline{w}$　ㄹ. $\dfrac{\overline{z}}{w}$

사고력

13 x에 대한 이차방정식

$$x^2-2(a+b)x+(a-b)^2+3ab-5a-3b-2=0$$

이 중근을 갖도록 하는 정수 a, b에 대하여 ab의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오.

|서·술·형|

14 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 -2와 $\frac{1}{3}$이 되었고, c를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 2와 $-\frac{5}{2}$가 되었다. 처음 이차방정식의 근을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

68

(1) $x^2-4x+5=0$이므로　　$x=2\pm i$

따라서 $\begin{cases}\alpha=2+i \\ \beta=2-i\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=2-i \\ \beta=2+i\end{cases}$

(2) $x^2-2x-4=0$이므로　　$x=1\pm\sqrt{5}$

따라서 $\begin{cases}\alpha=1+\sqrt{5} \\ \beta=1-\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=1-\sqrt{5} \\ \beta=1+\sqrt{5}\end{cases}$

답 풀이 참조

12

|주안점| 복소수와 켤레복소수의 사칙연산을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 식을 찾을 수 있게 한다.

|풀이| $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면　　$b\neq0$

$z+\overline{w}=0$, $\overline{w}=-z=-a-bi$이므로　　$w=-a+bi$

ㄱ. $w-\overline{z}=(-a+bi)-(a-bi)=-2a+2bi$

ㄴ. $i(z+w)=i\{(a+bi)+(-a+bi)\}=-2b$

ㄷ. $z\overline{w}=(a+bi)(-a-bi)=-(a+bi)^2$

$\quad=-a^2+b^2-2abi$

ㄹ. $\dfrac{\overline{z}}{w}=\dfrac{a-bi}{-a+bi}=-1$

이상에서 항상 실수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.　　답 ㄴ, ㄹ

13

|주안점| 판별식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 주어진 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$D=\{-2(a+b)\}^2-4\{(a-b)^2+3ab-5a-3b-2\}$

$\quad=0$

위의 식을 전개하여 정리하면 $ab+5a+3b+2=0$에서

$a(b+5)+3(b+5)=13$,　$(a+3)(b+5)=13$

이때 a, b는 정수이므로 ab의 값을 다음 네 가지 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) $a+3=1$, $b+5=13$인 경우

$a=-2$, $b=8$이므로　　$ab=-16$

(ii) $a+3=13$, $b+5=1$인 경우

$a=10$, $b=-4$이므로　　$ab=-40$

(iii) $a+3=-1$, $b+5=-13$인 경우

$a=-4$, $b=-18$이므로　　$ab=72$

(iv) $a+3=-13$, $b+5=-1$인 경우

$a=-16$, $b=-6$이므로　　$ab=96$

(i)~(iv)에서 ab의 값 중 가장 큰 값은 96이다.

답 96

14

|주안점| 근과 계수의 관계를 이용하여 처음 이차방정식을 구하고, 처음 이차방정식의 근을 구할 수 있게 한다.

(해결 과정) $ax^2+bx+c=0$에서 a와 c를 바르게 보고 풀었을 때의 두 근이 -2, $\frac{1}{3}$이므로 두 근의 곱은

$$\frac{c}{a}=(-2)\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{3},\quad c=-\frac{2}{3}a \qquad \cdots\cdots ①$$

$ax^2+bx+c=0$에서 a와 b를 바르게 보고 풀었을 때의 두 근이 2, $-\frac{5}{2}$이므로 두 근의 합은

$$-\frac{b}{a}=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2}a \qquad \cdots\cdots ②$$

▶ 50 %

①, ②를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$$ax^2+\frac{1}{2}ax-\frac{2}{3}a=0$$

▶ 20 %

(답 구하기) 이때 $a\neq0$이므로 양변에 $\frac{6}{a}$을 곱하면

$$6x^2+3x-4=0$$

즉, 처음 이차방정식의 근은　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{105}}{12}$　▶ 30 %

중단원 도입

물체의 운동을 나타내는데 이차함수나 이차부등식을 활용할 수 있다. 예를 들어 공을 멀리 던질 때, 공이 날아간 거리는 공을 던지는 순간의 속도와 지면으로부터의 각도에 영향을 받는다. 따라서 초기 속도와 각도가 주어지면 공이 날아간 거리를 시간에 대한 이차식으로 나타낼 수 있고, 부등식을 활용하면 시간에 따른 공의 높이의 변화 또는 공이 날아간 거리 등과 관련된 여러 가지 현상을 설명할 수 있다. 한편, 아치(arch)형 구조는 원 또는 활 모양의 곡선을 이용하는 건축 구조 양식이다. 아치형 구조는 건축물의 무게를 잘 분산시켜 견고하게 지탱해 주기 때문에 지붕, 다리, 문 등에 많이 활용되고 있다. 로마의 상징 중 하나인 콜로세움은 아치형 구조를 활용한 건물로 유명하다. 우리나라의 국보 제1호인 숭례문과 보물 제1호인 흥인지문의 출입문도 아치형 구조로 만들어졌다.


숭례문


흥인지문

이러한 아치형 구조의 기본은 원이나 이차함수로 나타낼 수 있는 포물선 모양이다.
이 단원에서는 이차방정식과 이차함수의 관계, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 알아보고, 이차함수의 최대, 최소의 활용을 학습하게 된다.

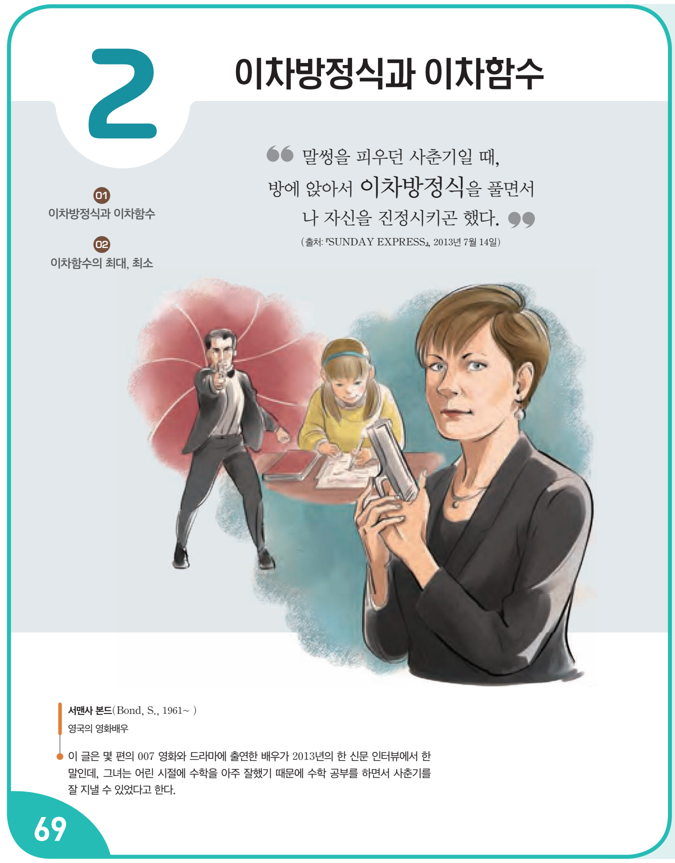
서맨사 본드

서맨사 본드(Bond, S., 1961~)는 영국의 영화배우로 「007 골든 아이(1995)」, 「007 언리미티드(1999)」, 「007 어나더 데이(2002)」 등 다수의 작품에 출연하였다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해하게 한다.
② 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이해하게 한다.
③ 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.


2

이차방정식과 이차함수

01 이차방정식과 이차함수
02 이차함수의 최대, 최소

“말썽을 피우던 사춘기일 때,
방에 앉아서 이차방정식을 풀면서
나 자신을 진정시키곤 했다.”
(출처: 『SUNDAY EXPRESS』, 2013년 7월 14일)

서맨사 본드(Bond, S., 1961~)
영국의 영화배우

이 글은 몇 편의 007 영화와 드라마에 출연한 배우가 2013년의 한 신문 인터뷰에서 한 말인데, 그녀는 어린 시절에 수학을 아주 잘했기 때문에 수학 공부를 하면서 사춘기를 잘 지낼 수 있었다고 한다.

69

지도상의 유의점

① 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 이차방정식의 실근과 같음을 알게 한다.
② 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용한 이차방정식의 해법에서는 함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 y좌표가 0이라는 점에 착안하여 그 교점의 x좌표가 구하는 근임을 이해하게 한다.
③ 이차함수의 그래프는 x축과 만나지 않는 경우도 있다는 것을 지도함으로써 허근을 생각할 수 있게 한다.

준비하기

|주안점| 판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식 D는

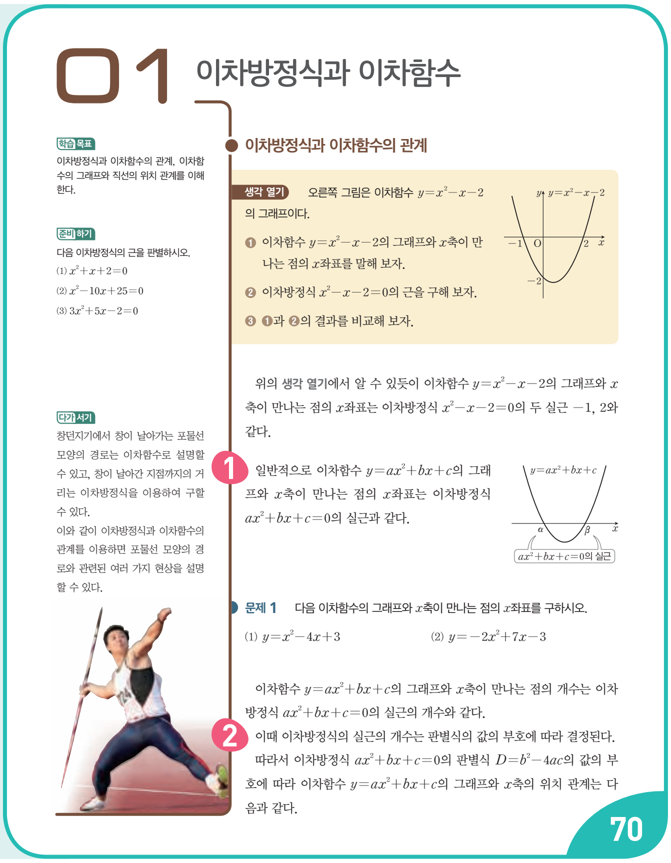
$$D=1^2-4\times1\times2=-7<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(2) 이차방정식 $x^2-10x+25=0$의 판별식 D는

$$D=(-10)^2-4\times1\times25=0$$

이므로 중근을 갖는다.



01 이차방정식과 이차함수

학습 목표
이차방정식과 이차함수의 관계, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.

준비하기
다음 이차방정식의 근을 판별하시오.
(1) $x^2+x+2=0$
(2) $x^2-10x+25=0$
(3) $3x^2+5x-2=0$

다가서기
창던지기에서 창이 날아가는 포물선 모양의 경로는 이차함수로 설명할 수 있고, 창이 날아간 지점까지의 거리는 이차방정식을 이용하여 구할 수 있다.
이와 같이 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하면 포물선 모양의 경로와 관련된 여러 가지 현상을 설명할 수 있다.

이차방정식과 이차함수의 관계

생각 열기 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프이다.

❶ 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표를 말해 보자.
❷ 이차방정식 $x^2-x-2=0$의 근을 구해 보자.
❸ ❶과 ❷의 결과를 비교해 보자.

위의 생각 열기에서 알 수 있듯이 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-x-2=0$의 두 실근 -1, 2와 같다.

1 일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

문제 1 다음 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하시오.
(1) $y=x^2-4x+3$ (2) $y=-2x^2+7x-3$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다.
2 이때 이차방정식의 실근의 개수는 판별식의 값의 부호에 따라 결정된다.
따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 다음과 같다.

70

(3) 이차방정식 $3x^2+5x-2=0$의 판별식 D는

$$D=5^2-4\times3\times(-2)=49>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 (1) 서로 다른 두 허근
(2) 중근
(3) 서로 다른 두 실근

이차방정식과 이차함수의 관계

평가 기준

상	이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
하	판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구할 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 이차방정식의 실근과 같음을 알게 한다.

❶ -1, 2

❷ $x^2-x-2=0$에서

$$(x+1)(x-2)=0$$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=2$

❸ 같다.

내용 연구

1 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근을 구하려면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y=0$이 되는 x의 값, 즉 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면 됨을 알게 한다.

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$, 즉 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$의 그래프는 x축과 접하는 이차함수 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$만큼 평행이동했다고 볼 수 있다.
즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차항의 계수인 a의 부호와 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 결정된다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 이차방정식의 실근과 같음을 이해하게 한다.

| 풀이 | (1) 이차방정식 $x^2-4x+3=0$에서

$$(x-1)(x-3)=0$$

따라서 $x=1$ 또는 $x=3$
즉, 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 1, 3이다.

(2) 이차방정식 $-2x^2+7x-3=0$의 양변에 -1을 곱하여 인수분해하면 $(2x-1)(x-3)=0$

따라서 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=3$
즉, 이차함수 $y=-2x^2+7x-3$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}$, 3이다.

답 (1) 1, 3 (2) $\dfrac{1}{2}$, 3

내용 연구

1 이차방정식

$$ax^2+bx+c=0$$

의 판별식 D의 값의 부호가

(i) $D>0$이면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

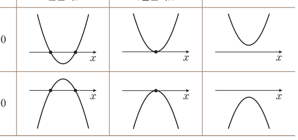
(ii) $D=0$이면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.(접한다.)

(iii) $D<0$이면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

2 근의 공식을 이용하면 이차방정식의 해를 직접 구할 수 있으나 여기서는 방정식의 근의 기하학적 의미를 이해하는 데 초점을 맞춘다.

이차방정식과 이차함수의 관계

		$D>0$	$D=0$	$D<0$
1 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D		$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 근		서로 다른 두 실근	중근	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계		서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다.(접한다.)	만나지 않는다.
2 $y=ax^2+bx+c$의 그래프	$a>0$			
	$a<0$			



문제 2 다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하시오.

(1) $y=x^2+2x-5$ (2) $y=-x^2+5x-4$

(3) $y=4x^2-4x+1$ (4) $y=-3x^2+4x-2$

예제 1 이차함수 $y=x^2-6x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

풀이 이차함수 $y=x^2-6x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 판별식 D가 $D>0$이어야 하므로

$$D=(-6)^2-4\times1\times k=36-4k>0$$

따라서 $k<9$

답 $k<9$

문제 3 이차함수 $y=-2x^2+4x+k$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 k의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 접한다. (3) 만나지 않는다.

71

문제 풀이

문제 2

|주안점| 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 조사할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 판별식 D가

$$D=2^2-4\times1\times(-5)=24>0$$

이므로 이차함수 $y=x^2+2x-5$의 그래프와 x축은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $-x^2+5x-4=0$의 판별식 D가

$$D=5^2-4\times(-1)\times(-4)=9>0$$

이므로 이차함수 $y=-x^2+5x-4$의 그래프와 x축은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 이차방정식 $4x^2-4x+1=0$의 판별식 D가

$$D=(-4)^2-4\times4\times1=0$$

이므로 이차함수 $y=4x^2-4x+1$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.(접한다.)

(4) 이차방정식 $-3x^2+4x-2=0$의 판별식 D가

$$D=4^2-4\times(-3)\times(-2)=-8<0$$

이므로 이차함수 $y=-3x^2+4x-2$의 그래프와 x축은 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(3) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(4) 만나지 않는다.

문제 3

|주안점| 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 실수 k의 값 또는 범위를 정할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 이차함수 $y=-2x^2+4x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $-2x^2+4x+k=0$의 판별식 D가 $D>0$이어야 하므로

$$D=4^2-4\times(-2)\times k=16+8k>0$$

따라서 $k>-2$

(2) 이차함수 $y=-2x^2+4x+k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $-2x^2+4x+k=0$의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=4^2-4\times(-2)\times k=16+8k=0$$

따라서 $k=-2$

(3) 이차함수 $y=-2x^2+4x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $-2x^2+4x+k=0$의 판별식 D가 $D<0$이어야 하므로

$$D=4^2-4\times(-2)\times k=16+8k<0$$

따라서 $k<-2$

답 (1) $k>-2$ (2) $k=-2$ (3) $k<-2$

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 알아보자.

3 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \quad \cdots\cdots ①$$

의 실근과 같으므로 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 이차방정식 ①의 실근의 개수와 같다.

①의 판별식 D는 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$

따라서 이차방정식 ①의 판별식 D의 값의 부호에 따라 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

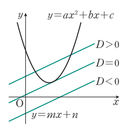
4 **이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식

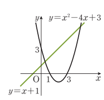
$$ax^2+(b-m)x+c-n=0$$

의 판별식 D의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)
❸ $D<0$이면 만나지 않는다.



예제 2 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 위치 관계를 말하시오.



풀이 $x^2-4x+3=x+1$에서 $x^2-5x+2=0$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=(-5)^2-4\times1\times2=17>0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

문제 4 이차함수 $y=-x^2+x+2$의 그래프와 다음 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $y=-2x+1$ (2) $y=-x+3$ (3) $y=3x+4$

72

● 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

평가 기준
상 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 설명하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
하 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구할 수 있다.

내용 연구

3 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계는 그림을 이용하여 간단하게 설명한다. 또, 두 그래프의 교점의 x좌표는 이차함수와 직선의 방정식에서 y를 없애서 얻은 이차방정식의 실근을 이용하여 구할 수 있음을 이해하게 한다. 이때 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 이차방정식의 실근의 개수와 같으므로 이차방정식의 판별식을 도입하여 설명한다.

4 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$에 대하여 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D의 값의 부호가

(i) $D>0$이면 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 즉, 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $D=0$이면 방정식은 중근을 갖는다. 즉, 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

(iii) $D<0$이면 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 즉, 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

문제 풀이

문제 4

|주안점| 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 조사할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $-x^2+x+2=-2x+1$에서

$$x^2-3x-1=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=(-3)^2-4\times1\times(-1)=13>0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $-x^2+x+2=-x+3$에서 $x^2-2x+1=0$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=(-2)^2-4\times1\times1=0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $-x^2+x+2=3x+4$에서 $x^2+2x+2=0$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=2^2-4\times1\times2=-4<0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 만나지 않는다.

지도 자료

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=0$ (x축),
$y=ax^2+bx$의 그래프와 직선 $y=-c$,
$y=ax^2+c$의 그래프와 직선 $y=-bx$,
$y=ax^2$의 그래프와 직선 $y=-bx-c$

의 교점의 x좌표를 이용하여 구할 수 있다.

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 실수 a의 값을 정할 수 있게 한다.

| 풀이 | $2x^2+x+a=5x+2$에서

$$2x^2-4x+(a-2)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나려면 이차방정식 ①의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=(-4)^2-4\times2\times(a-2)=0$$

따라서 $\quad a=4$

답 4

문제 6

| 주안점 | 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $-\dfrac{3}{2}x^2+6x+\dfrac{1}{10}=6$에서

$$\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{59}{10}=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=(-6)^2-4\times\frac{3}{2}\times\frac{59}{10}=\frac{3}{5}>0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=6$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

또, $-\dfrac{3}{2}x^2+6x+\dfrac{1}{10}=7$에서

$$\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{69}{10}=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=(-6)^2-4\times\frac{3}{2}\times\frac{69}{10}=-\frac{27}{5}<0$$

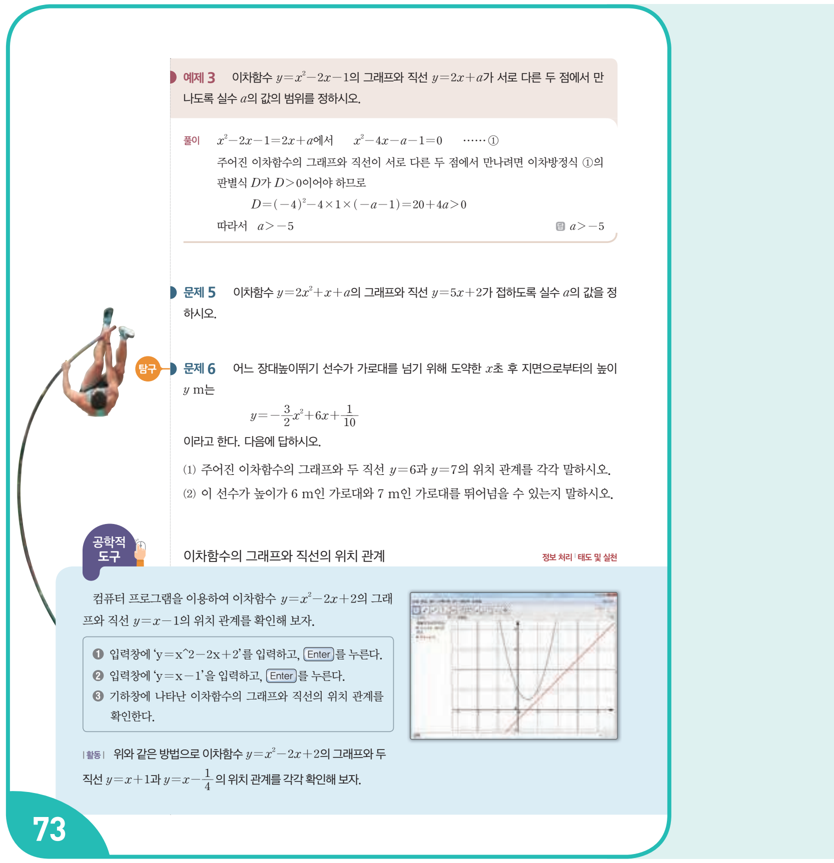
이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=7$은 만나지 않는다.

(2) (1)에서 이차함수 $y=-\dfrac{3}{2}x^2+6x+\dfrac{1}{10}$의 그래프와 직선 $y=6$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 이 선수는 높이가 6 m인 가로대를 뛰어넘을 수 있다.

또, 이 이차함수의 그래프와 직선 $y=7$은 만나지 않으므로 높이가 7 m인 가로대는 뛰어넘을 수 없다.

답 (1) 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=6$은 서로 다른 두 점에서 만난다. 또, 주어진 이차함수의 그래프와 직선 $y=7$은 만나지 않는다.

(2) 높이가 6 m인 가로대는 뛰어넘을 수 있지만 높이가 7 m인 가로대는 뛰어넘을 수 없다.



예제 3 이차함수 $y=x^2-2x-1$의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오.

풀이 $x^2-2x-1=2x+a$에서 $\quad x^2-4x-a-1=0 \quad \cdots\cdots ①$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 ①의 판별식 D가 $D>0$이어야 하므로

$$D=(-4)^2-4\times1\times(-a-1)=20+4a>0$$

따라서 $\quad a>-5$

답 $a>-5$

문제 5 이차함수 $y=2x^2+x+a$의 그래프와 직선 $y=5x+2$가 접하도록 실수 a의 값을 정하시오.

탐구 **문제 6** 어느 장대높이뛰기 선수가 가로대를 넘기 위해 도약한 x초 후 지면으로부터의 높이 y m는

$$y=-\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{1}{10}$$

이라고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 주어진 이차함수의 그래프와 두 직선 $y=6$과 $y=7$의 위치 관계를 각각 말하시오.

(2) 이 선수가 높이가 6 m인 가로대와 7 m인 가로대를 뛰어넘을 수 있는지 말하시오.

공학적 도구 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 정보 처리 | 태도 및 실천

컴퓨터 프로그램을 이용하여 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=x-1$의 위치 관계를 확인해 보자.

❶ 입력창에 'y=x^2−2x+2'를 입력하고, Enter를 누른다.
❷ 입력창에 'y=x−1'을 입력하고, Enter를 누른다.
❸ 기하창에 나타난 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 확인한다.

| 활동 | 위와 같은 방법으로 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 두 직선 $y=x+1$과 $y=x-\frac{1}{4}$의 위치 관계를 각각 확인해 보자.

73

공학적 도구

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

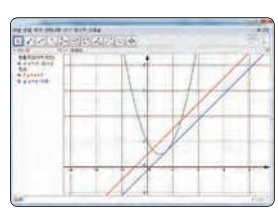
| 지도 방향 | 컴퓨터 프로그램을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 확인할 수 있게 한다.

| 풀이 | ❶ 입력창에 'y=x^2−2x+2'를 입력하고, Enter를 누른다.

❷ 입력창에 'y=x+1', 'y=x−1/4'을 각각 입력하고, Enter를 누른다.

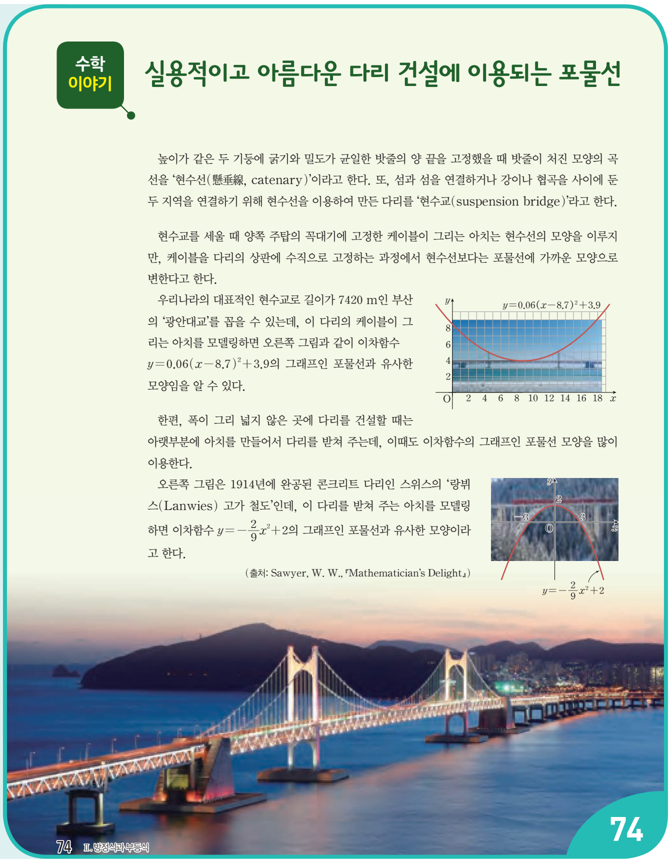
❸ 기하창에 나타난 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 확인한다.

답



이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

또, 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=x-\dfrac{1}{4}$은 한 점에서 만난다. (접한다.)


수학 이야기

실용적이고 아름다운 다리 건설에 이용되는 포물선

높이가 같은 두 기둥에 굵기와 밀도가 균일한 밧줄의 양 끝을 고정했을 때 밧줄이 처진 모양의 곡선을 '현수선(懸垂線, catenary)'이라고 한다. 또, 섬과 섬을 연결하거나 강이나 협곡을 사이에 둔 두 지역을 연결하기 위해 현수선을 이용하여 만든 다리를 '현수교(suspension bridge)'라고 한다.

현수교를 세울 때 양쪽 주탑의 꼭대기에 고정한 케이블이 그리는 아치는 현수선의 모양을 이루지만, 케이블을 다리의 상판에 수직으로 고정하는 과정에서 현수선보다는 포물선에 가까운 모양으로 변한다고 한다.

우리나라의 대표적인 현수교로 길이가 7420 m인 부산의 '광안대교'를 꼽을 수 있는데, 이 다리의 케이블이 그리는 아치를 모델링하면 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=0.06(x-8.7)^2+3.9$의 그래프인 포물선과 유사한 모양임을 알 수 있다.

한편, 폭이 그리 넓지 않은 곳에 다리를 건설할 때는 아랫부분에 아치를 만들어서 다리를 받쳐 주는데, 이때도 이차함수의 그래프인 포물선 모양을 많이 이용한다.

오른쪽 그림은 1914년에 완공된 콘크리트 다리인 스위스의 '랑뷔스(Lanwies) 고가 철도'인데, 이 다리를 받쳐 주는 아치를 모델링하면 이차함수 $y=-\frac{2}{9}x^2+2$의 그래프인 포물선과 유사한 모양이라고 한다.

(출처: Sawyer, W. W., 『Mathematician's Delight』)

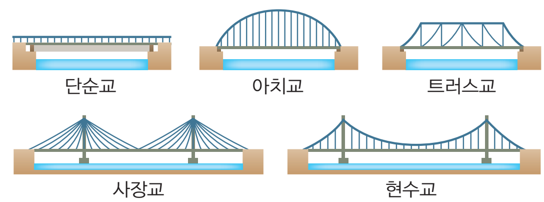
74 Ⅱ. 방정식과 부등식

74

수학 이야기 **실용적이고 아름다운 다리 건설에 이용되는 포물선**

다리를 건설할 때는 다리의 위치, 다리 밑을 지나는 배의 크기, 바람 등의 기상 조건을 고려하여 그 기능과 목적에 적합한 종류의 다리를 놓아야 한다.

이러한 다리의 종류는 상부 구조의 모양에 따라 다음과 같이 단순교, 아치교, 트러스교, 사장교, 현수교 등으로 나누어진다.



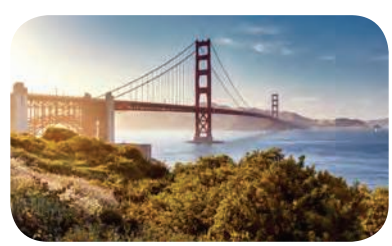
이 중 현수교는 양쪽에 주탑을 세우고 그 사이를 케이블로 연결한 다리로, 교각 사이가 넓어 큰 배가 그 밑으로 지나갈 수 있다.

미국 캘리포니아주의 샌프란시스코에 있는 금문교는 대표적인 현수교이다.

골든게이트교(Golden Gate Bridge)라고도 불리는 금문교(金門橋)는 골든게이트 해협에 위치한 현수교로 총 길이가 2825 m이다.

1933년에 착공하여 1937년에 완공된 이 다리는 구조 공학자인 조셉 스트라우스(Strauss, J., 1870~1938)가 설계하였다. 다리를 매어단 탑의 높이는 약 227.5 m로 이 탑들은 금문교가 완성되었을 당시 세계에서 가장 높은 현수교 탑이었다. 또, 주탑(主塔)과 주탑 사이의 거리는 1280 m나 된다.

중앙부는 해수면에서 70 m 높이에 있으며, 수심이 깊어 대형 선박도 다리 밑을 통과할 수 있다.



금문교는 전 세계 현수교 설계의 본보기가 되었을뿐만 아니라 웅장한 경관을 자랑하는 곳 중 하나이며 다리가 가지고 있는 미학적 가치와 역사로 많은 사람들에게 기억되는 다리이다.

읽기 자료

체조 종목과 이차함수

이차함수는 우리 생활과 밀접한 관련이 있고, 이차함수의 그래프인 포물선은 주변에서 흔히 찾아볼 수 있다.

예를 들어 올림픽 경기의 기계체조 종목 중 하나인 도마에서 선수는 도마 앞에 놓여 있는 '구름판'을 딛고 도움닫기를 하여 도마에 손을 짚고 뛰어 오른 다음 근력, 지구력, 유연성, 민첩성, 평형 감각 등을 이용해 공중에서 여러 가지 연기를 하고 착지한다. 특히, 공중에서 훌륭한 연기를 펼치기 위해서는 착지할 때 어려움이 있더라도 최대한 높이 뛰어올라 체공 시간을 늘려야 한다.

이와 같이 선수가 도움닫기를 하여 뛰어 올라 착지할 때까지의 움직임을 모델링하면 이차함수의 식으로 나타낼 수 있고, 움직임의 모양은 이 이차함수의 그래프인 포물선과 유사한 모양으로 표현할 수 있다.

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 이차함수의 최대, 최소를 이해하게 한다.

② 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

③ 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

▌지도상의 유의점

① 이차함수에서 x의 값의 범위가 실수 전체일 때는 최댓값, 최솟값 중 어느 하나를 반드시 갖게 되고, x의 값의 범위가 제한되어 있을 때는 최댓값과 최솟값을 모두 가질 수도 있음을 그래프를 통해 직관적으로 이해하게 한다.

② 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값은 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지의 여부에 따라 구할 수 있게 한다. 이때 각각의 값은 이차함수의 식을 완전제곱식으로 고친 다음 이차함수의 그래프를 이용하여 구할 수 있음을 이해하게 한다.

③ x의 값의 범위가 달라지면 이차함수의 최댓값, 최솟값도 달라질 수 있음을 알게 한다.

▌용어와 기호

• 최댓값(最大, absolute maximum)

• 최솟값(最小, absolute minimum)

▌준비하기

|주안점| 이차식을 완전제곱식으로 고쳐서 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $y=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(3,\ -2)$

(2) $y=-3x^2+4x-2=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

답 (1) $(3,\ -2)$ (2) $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

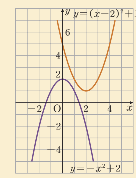
02 이차함수의 최대, 최소

학습 목표
이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

준비하기
다음 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.
(1) $y=x^2-6x+7$
(2) $y=-3x^2+4x-2$

● 이차함수의 최대, 최소

생각 열기 오른쪽 그림은 두 이차함수 $y=-x^2+2$와 $y=(x-2)^2+1$의 그래프이다.



❶ 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프의 꼭짓점을 좌표평면 위에 나타내고, 이 함수의 함숫값 중 가장 큰 값을 말해 보자.

❷ 이차함수 $y=(x-2)^2+1$의 그래프의 꼭짓점을 좌표평면 위에 나타내고, 이 함수의 함숫값 중 가장 작은 값을 말해 보자.

어떤 함수의 모든 함숫값 중에서 가장 큰 값을 그 함수의 **최댓값**이라 하고, 가장 작은 값을 그 함수의 **최솟값**이라고 한다.

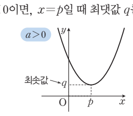
위의 생각 열기에서 이차함수 $y=-x^2+2$는 $x=0$일 때 최댓값 2를 갖고 최솟값은 없다. 또, 이차함수 $y=(x-2)^2+1$은 $x=2$일 때 최솟값 1을 갖고 최댓값은 없다.

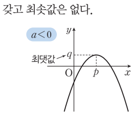
다가서기
어떤 물건을 생산하는 데 필요한 비용을 수학적으로 계산하려고 할 때 그 식을 이차함수로 나타내는 경우가 있다.
또, 생산된 제품을 판매하여 얻는 이익을 최대로 하기 위한 전략을 수립하는 데 이차함수의 최대, 최소가 활용되기도 한다.

1 일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 이 함수를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 다음과 같이 구할 수 있다.

2 **이차함수의 최댓값과 최솟값**

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
❶ $a>0$이면, $x=p$일 때 최솟값 q를 갖고 최댓값은 없다.
❷ $a<0$이면, $x=p$일 때 최댓값 q를 갖고 최솟값은 없다.





75

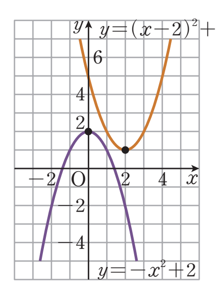
● 이차함수의 최대, 최소

평가 기준

상	이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 활용한 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	x의 값의 범위가 주어진 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다.
하	주어진 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 이차함수의 꼭짓점의 좌표를 좌표평면 위에 나타낸 다음 함숫값 중 가장 큰 값 또는 가장 작은 값을 찾아보게 한다.



❶ 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프의 꼭짓점을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 이 함수의 함숫값 중에서 가장 큰 값은 2이다.

❷ 이차함수 $y=(x-2)^2+1$의 그래프의 꼭짓점을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 이 함수의 함숫값 중에서 가장 작은 값은 1이다.

예제 1 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

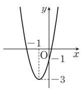
(1) $y=2x^2+4x-1$ (2) $y=-x^2+6x-6$

풀이 (1) $y=2x^2+4x-1$에서

$y=2(x+1)^2-3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-1$일 때 최솟값 -3을 갖고, 최댓값은 없다.

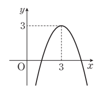


(2) $y=-x^2+6x-6$에서

$y=-(x-3)^2+3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=3$일 때 최댓값 3을 갖고, 최솟값은 없다.



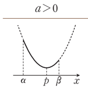
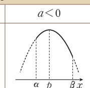
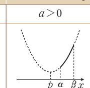
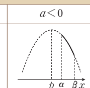
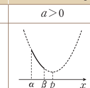
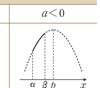
답 (1) 최솟값: -3, 최댓값: 없다.
(2) 최댓값: 3, 최솟값: 없다.

문제 1 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=2x^2+12x-5$ (2) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-1$

다음을 통해 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법을 알아보자.

3 **함께하기** 다음 그래프의 실선 부분은 x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 그래프이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$\alpha \le p \le \beta$		$p<\alpha$		$p>\beta$	
$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
					
최댓값: $f(\alpha)$ 최솟값: $f(p)$	최댓값: □ 최솟값: □	최댓값: □ 최솟값: □	최댓값: □ 최솟값: □	최댓값: □ 최솟값: □	최댓값: □ 최솟값: □

76

내용 연구

1 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 꼭짓점이 원점인 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$인 포물선이다.

2 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수는 x^2의 계수의 부호에 따라 최댓값과 최솟값 중 하나의 값만 갖는다.

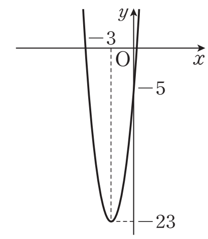
3 x의 값의 범위가 제한되어 있는 경우, 이차함수의 최댓값과 최솟값은 그래프를 그려서 구할 수 있다. 이때 꼭짓점의 x좌표가 x의 값의 범위에 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우를 구분한다. 또, 제한된 범위의 끝 값이 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우를 주의하며 그래프를 그리게 한다.

문제 풀이

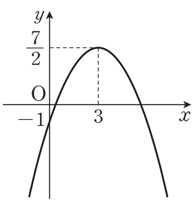
문제 1

| 주안점 | x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y=2(x+3)^2-23$이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x=-3$일 때 최솟값 -23을 갖고, 최댓값은 없다.



(2) $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{7}{2}$이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $x=3$일 때 최댓값 $\frac{7}{2}$을 갖고, 최솟값은 없다.



답 (1) 최솟값: -23, 최댓값: 없다.
(2) 최댓값: $\frac{7}{2}$, 최솟값: 없다.

함께하기

| 지도 방향 | 이차함수의 최댓값과 최솟값을 그래프의 개형과 제한된 x의 값의 범위에 따라 구하는 방법을 이해하게 한다.

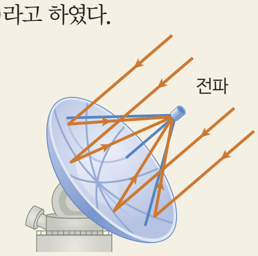
답 $f(p)$, $f(\beta)$ / $f(\beta)$, $f(\alpha)$ / $f(\alpha)$, $f(\beta)$ / $f(\alpha)$, $f(\beta)$ / $f(\beta)$, $f(\alpha)$

읽기 자료

포물선(parabola)

포물선은 물건을 위로 던졌을 때 물체가 그리는 곡선을 뜻한다. parabola는 고대 그리스의 수학자 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)가 이름 붙인 것으로 직원뿔을 모선에 평행한 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면을 파라볼라(일치한다는 뜻)라고 하였다.

위성 방송을 시청하는데 사용하는 접시형 안테나는 파라볼라 안테나라고도 불리는데 이 안테나의 면은 포물선을 그 축을 중심으로 회전시켜 만든 모양인 포물면으로 되어 있다.



인공위성에서 발사된 전파는 평행하게 진행하여 접시형 안테나에서 반사된 후 한 점을 지나게 된다. 따라서 이 점의 위치에 수신기를 설치하면 미약한 전파도 잘 탐지할 수 있게 된다. 이와 같은 원리는 먼 곳에 있는 목적물을 비추기 위한 탐조등과 자동차의 전조등 및 손전등에도 이용된다.

내용 연구

1 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위에 속하면, 즉 $\alpha \le p \le \beta$이면 다음과 같다.

(ⅰ) $a>0$인 경우

최댓값: $x=\alpha$, $x=\beta$일 때의 함숫값 중에서 큰 값

최솟값: $x=p$일 때의 함숫값, 즉 q

(ⅱ) $a<0$인 경우

최댓값: $x=p$일 때의 함숫값, 즉 q

최솟값: $x=\alpha$, $x=\beta$일 때의 함숫값 중에서 작은 값

2 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위에 속하지 않으면, 즉 $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $x=\alpha$, $x=\beta$의 함숫값 중에서 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

문제 풀이

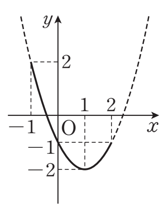
문제 2

| 주안점 | x의 값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y=x^2-2x-1$에서

$y=(x-1)^2-2$

이므로 $-1 \le x \le 2$일 때 그래프는 오른쪽 그림의 실선 부분이고, 꼭짓점의 x좌표 1은 주어진 x의 값의 범위에 속한다.



$x=-1$일 때 $y=2$

$x=1$일 때 $y=-2$

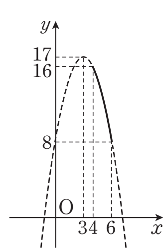
$x=2$일 때 $y=-1$

따라서 최댓값은 2이고 최솟값은 -2이다.

(2) $y=-x^2+6x+8$에서

$y=-(x-3)^2+17$

이므로 $4 \le x \le 6$일 때 그래프는 오른쪽 그림의 실선 부분이고, 꼭짓점의 x좌표 3은 주어진 x의 값의 범위에 속하지 않는다.



$x=4$일 때 $y=16$

$x=6$일 때 $y=8$

따라서 최댓값은 16이고 최솟값은 8이다.

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 16, 최솟값: 8

77

앞의 활동으로부터 x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수

$f(x)=a(x-p)^2+q$

의 최댓값과 최솟값은 다음과 같음을 알 수 있다.

1 (ⅰ) $\alpha \le p \le \beta$이면 $f(\alpha)$, $f(p)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고 가장 작은 값이 최솟값이다.

2 (ⅱ) $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고 작은 값이 최솟값이다.

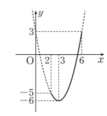
예제 2 주어진 x의 값의 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=x^2-6x+3$ $(2 \le x \le 6)$ (2) $y=-x^2+4x+2$ $(0 \le x \le 1)$

풀이 (1) $y=x^2-6x+3$에서

$y=(x-3)^2-6$

이므로 $2 \le x \le 6$일 때 그래프는 오른쪽 그림의 실선 부분이고, 꼭짓점의 x좌표 3은 주어진 x의 값의 범위에 속한다.



$x=2$일 때 $y=-5$

$x=3$일 때 $y=-6$

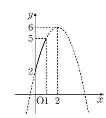
$x=6$일 때 $y=3$

따라서 최댓값은 3이고 최솟값은 -6이다.

(2) $y=-x^2+4x+2$에서

$y=-(x-2)^2+6$

이므로 $0 \le x \le 1$일 때 그래프는 오른쪽 그림의 실선 부분이고, 꼭짓점의 x좌표 2는 주어진 x의 값의 범위에 속하지 않는다.



$x=0$일 때 $y=2$

$x=1$일 때 $y=5$

따라서 최댓값은 5이고 최솟값은 2이다.

답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -6

(2) 최댓값: 5, 최솟값: 2

문제 2 주어진 x의 값의 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=x^2-2x-1$ $(-1 \le x \le 2)$ (2) $y=-x^2+6x+8$ $(4 \le x \le 6)$

지도 자료

연속함수의 최댓값과 최솟값

연속함수에 대해서는 다음의 정리가 성립한다.

> 함수 $f:[a, b] \longrightarrow R$가 연속이면 f는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이 정리를 확장하면 함수 f의 정의역이 구간이 아니더라도 정의역이 유계이고 닫힌 집합이기만 하면 f는 최댓값과 최솟값을 갖는다. 다시 말하면 함수 f의 치역 중에서 최대와 최소인 값을 가지는 정의역의 원소가 있다.

그런데 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 연속함수이므로 정의역이 닫힌구간이면 이차함수는 최댓값과 최솟값을 갖는다. 물론 정의역이 닫힌구간이 아닌 경우에는 최댓값과 최솟값이 존재한다는 것을 보장할 수 없다.

이차함수의 최대, 최소의 활용

3 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 여러 가지 문제를 해결해 보자.

예제 3 어떤 물체를 지면에서 초속 40 m로 똑바로 위로 쏘아 올렸을 때, t초 후 지면으로부터 이 물체의 높이 y m는

$$y=-5t^2+40t$$

라고 한다. 다음에 답하시오. (단, 물체의 크기는 생각하지 않는다.)

(1) 물체가 도달하는 최고 높이를 구하시오.

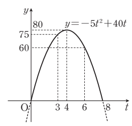
(2) 물체를 쏘아 올린 후 3초 이상 6초 이하에서 이 물체의 최소 높이를 구하시오.

풀이 (1) $y=-5t^2+40t$에서

$$y=-5(t-4)^2+80$$

이므로 $t=4$일 때 주어진 함수의 최댓값은 80이다.

따라서 물체가 도달하는 최고 높이는 80 m이다.



(2) 3초 후의 물체의 높이는

$$y=-5\times3^2+40\times3=75(\text{m})$$

6초 후의 물체의 높이는

$$y=-5\times6^2+40\times6=60(\text{m})$$

따라서 3초 이상 6초 이하에서 이 물체의 최소 높이는 60 m이다.

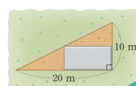
답 (1) 80 m (2) 60 m

문제 3 스마트 밴드를 생산하는 어느 회사에서는 판매 가격 x만 원과 판매 수익 y만 원 사이에

$$y=-20x^2+160x$$

인 관계가 성립한다고 한다. 판매 가격을 2만 원 이상 5만 원 이하로 했을 때, 판매 수익의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

문제 4 오른쪽 그림과 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 10 m, 20 m인 직각삼각형 모양의 땅에 밑면이 직사각형 모양인 건물을 지으려고 한다. 이 건물의 밑면의 최대 넓이를 구하시오.



78

이차함수의 최대, 최소의 활용

내용 연구

3 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값, 최솟값을 구하는 방법을 이용하여 실생활 문제를 다음과 같은 순서로 해결할 수 있다.

① 무엇을 변수로 놓을지 정한다.

② 주어진 상황을 파악하여 함수의 식으로 나타낸다.

③ ②에서 구한 함수의 제한된 x의 값의 범위를 구한다.

④ 제한된 x의 값의 범위에서 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

⑤ ④에서 구한 최댓값 또는 최솟값을 이용하여 답을 구한 다음 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

문제 풀이

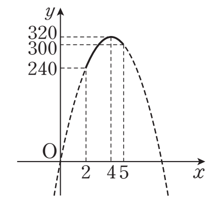
문제 3

| 주안점 | 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | $y=-20x^2+160x=-20(x-4)^2+320$

이때 판매 가격이 2만 원 이상 5만 원 이하이므로 x의 값의 범위는

$$2\le x\le 5$$



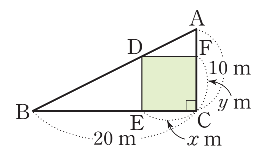
따라서 $x=4$일 때 주어진 함수의 최댓값은 320이고, $x=2$일 때 주어진 함수의 최솟값은 240이다. 즉, 판매 가격이 2만 원 이상 5만 원 이하일 때, 스마트 밴드의 판매 수익의 최댓값은 320만 원이고, 최솟값은 240만 원이다.

답 최댓값: 320만 원, 최솟값: 240만 원

문제 4

| 주안점 | 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 도형의 최대 넓이를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 오른쪽 그림과 같이 지으려고 하는 건물의 밑면의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면



$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{DF}$에서

$$10:20=(10-y):x$$

이므로 $y=10-\frac{1}{2}x$

따라서 이 건물의 밑면의 넓이는

$$xy=x\left(10-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$$

$0<x<20$이므로 $x=10$일 때 이 함수의 최댓값은 50이다. 즉, 건물의 밑면의 최대 넓이는 50 m^2이다.

답 50 m^2

읽기 자료

하라파(Harappa)의 건축

청동기 시대인 기원전 2500년경 아프가니스탄에서 파키스탄에 걸쳐 발생한 인더스 계곡 문명에 속하는 고대 도시 하라파는 인류가 건설한 첫 번째 도시 중의 하나이다. 발굴한 유적에 의하면 하라파 사람들은 직사각형 모양의 집을 지었는데, 직사각형 가운데에는 벽돌로 둘러싸인 안마당을 만든 것으로 보인다. 이러한 직사각형 모양의 집 내부에 직사각형 모양의 안마당을 만들 때 공간의 유용성이나 집을 짓는 과정의 효율성을 위해서 이차방정식이나 이차함수의 최대, 최소를 활용할 수 있다.

중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 조사할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 판별식 D가
$D=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2-6x+9=0$의 판별식 D가
$D=(-6)^2-4\times1\times9=0$이므로 한 점에서 만난다.

(3) 이차방정식 $-x^2+2x-5=0$의 판별식 D가
$D=2^2-4\times(-1)\times(-5)=-16<0$이므로 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 만나지 않는다.

02

| 주안점 | 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 조사할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 판별식 D가
$D=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8>0$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2+4x+4=0$의 판별식 D가
$D=4^2-4\times1\times4=0$이므로 한 점에서 만난다.

(3) 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-3x+5=0$의 판별식 D가
$D=(-3)^2-4\times\frac{1}{2}\times5=-1<0$이므로 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 만나지 않는다.

03

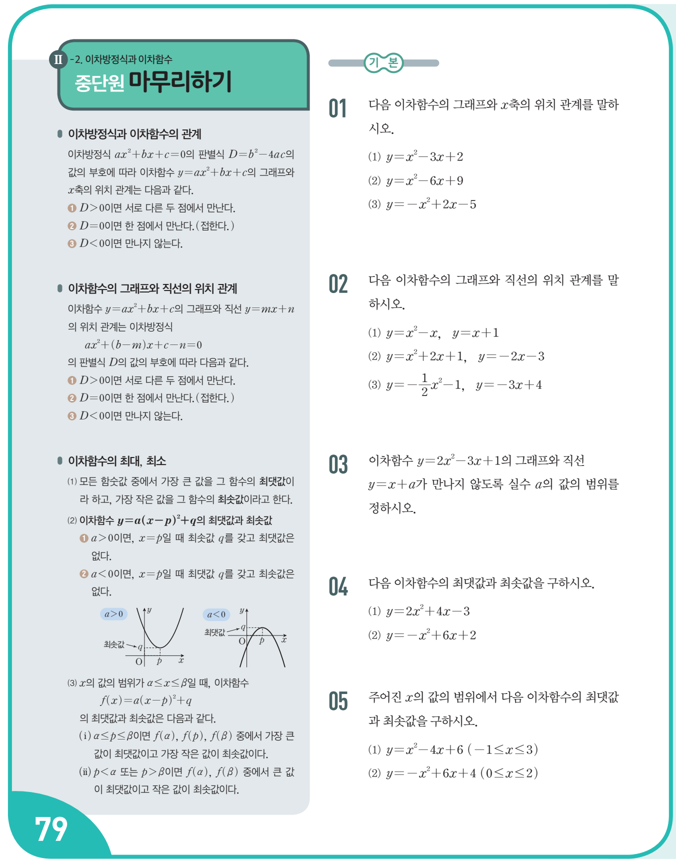
| 주안점 | 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위를 정할 수 있게 한다.

| 풀이 | 이차방정식 $2x^2-4x+1-a=0$의 판별식 D가 $D<0$이어야 하므로

$$D=(-4)^2-4\times2\times(1-a)<0,\quad 8+8a<0$$

따라서 $a<-1$

답 $a<-1$


Ⅱ-2. 이차방정식과 이차함수

중단원 마무리하기

● 이차방정식과 이차함수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 값의 부호에 따라 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 다음과 같다.
❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)
❸ $D<0$이면 만나지 않는다.

● 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식
$ax^2+(b-m)x+c-n=0$
의 판별식 D의 값의 부호에 따라 다음과 같다.
❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)
❸ $D<0$이면 만나지 않는다.

● 이차함수의 최대, 최소

(1) 모든 함숫값 중에서 가장 큰 값을 그 함수의 **최댓값**이라 하고, 가장 작은 값을 그 함수의 **최솟값**이라고 한다.
(2) **이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값**
❶ $a>0$이면, $x=p$일 때 최솟값 q를 갖고 최댓값은 없다.
❷ $a<0$이면, $x=p$일 때 최댓값 q를 갖고 최솟값은 없다.

(3) x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수
$f(x)=a(x-p)^2+q$
의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.
(i) $\alpha\le p\le\beta$이면 $f(\alpha)$, $f(p)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고 가장 작은 값이 최솟값이다.
(ii) $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고 작은 값이 최솟값이다.

79

기본

01 다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하시오.
(1) $y=x^2-3x+2$
(2) $y=x^2-6x+9$
(3) $y=-x^2+2x-5$

02 다음 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 말하시오.
(1) $y=x^2-x$, $y=x+1$
(2) $y=x^2+2x+1$, $y=-2x-3$
(3) $y=-\frac{1}{2}x^2-1$, $y=-3x+4$

03 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 만나지 않도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오.

04 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.
(1) $y=2x^2+4x-3$
(2) $y=-x^2+6x+2$

05 주어진 x의 값의 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.
(1) $y=x^2-4x+6$ $(-1\le x\le3)$
(2) $y=-x^2+6x+4$ $(0\le x\le2)$

04

| 주안점 | x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y=2x^2+4x-3=2(x+1)^2-5$이므로
$x=-1$일 때 최솟값 -5를 갖고, 최댓값은 없다.

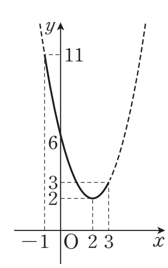
(2) $y=-x^2+6x+2=-(x-3)^2+11$이므로 $x=3$일 때 최댓값 11을 갖고, 최솟값은 없다.

답 (1) 최솟값: -5, 최댓값: 없다.
(2) 최댓값: 11, 최솟값: 없다.

05

| 주안점 | x의 값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y=(x-2)^2+2$이므로
$-1\le x\le3$일 때 그래프는 오른쪽 그림의 실선 부분이고, 꼭짓점의 x좌표 2는 x의 값의 범위에 속한다.



$x=-1$일 때 $y=11$,
$x=2$일 때 $y=2$,
$x=3$일 때 $y=3$

표준

06 이차함수 $y=x^2+2ax+a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

07 이차함수 $y=x^2+ax-10$의 그래프가 x축과 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$에서 만날 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

08 이차함수 $y=2x^2+ax+4$의 그래프와 직선 $y=-3x+b$의 두 교점의 x좌표의 합이 4이고 곱이 6일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

|서·술·형|

09 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프와 만나지 않을 때, 실수 k의 값의 범위를 정하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

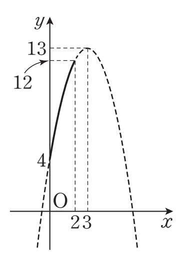
10 $0\le x\le 4$일 때, 이차함수 $y=2x^2-12x+k$의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오. (단, k는 실수이다.)

80

이므로 최댓값은 11, 최솟값은 2이다.

(2) $y=-(x-3)^2+13$이므로

$0\le x\le 2$일 때 그래프는 오른쪽 그림의 실선 부분이고, 꼭짓점의 x좌표 3은 x의 값의 범위에 속하지 않는다.



$x=0$일 때 $\quad y=4$,

$x=2$일 때 $\quad y=12$

이므로 최댓값은 12, 최솟값은 4이다.

답 (1) 최댓값: 11, 최솟값: 2
(2) 최댓값: 12, 최솟값: 4

06

|주안점| 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 합을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 이차함수 $y=x^2+2ax+a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+2ax+a=0$의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=4a^2-4a=0,\quad 4a(a-1)=0$$

따라서 $\quad a=0$ 또는 $a=1$

즉, 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 $\quad 1$ 답 1

07

|주안점| 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 이차함수의 그래프가 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지나므로

$$4-2a-10=0,\quad -2a=6,\quad a=-3$$

$a=-3$을 주어진 이차함수의 식에 대입하면

$$y=x^2-3x-10$$

이 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-3x-10=0$에서 $\quad (x-5)(x+2)=0$

따라서 $\quad x=5$ 또는 $x=-2$

즉, $b=5$이므로 $\quad a+b=2$ 답 2

08

|주안점| 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 이차방정식 $2x^2+(a+3)x+4-b=0$의 두 근의 합이 4이고, 곱이 6이므로 근과 계수의 관계로부터

$$-\frac{(a+3)}{2}=4,\quad \frac{4-b}{2}=6$$

따라서 $a=-11$, $b=-8$이므로 $\quad ab=88$

답 88

09

|주안점| 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위를 정할 수 있게 한다.

해결 과정 $x^2-2x+2=x+k$에서

$$x^2-3x+2-k=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가 $D>0$이므로

$$D=(-3)^2-4\times1\times(2-k)=1+4k>0$$

따라서 $\quad k>-\frac{1}{4}\quad \cdots\cdots$ ① ▶ 40 %

또, $x^2+2x+3=x+k$에서 $\quad x^2+x+3-k=0$

이 이차방정식의 판별식 D가 $D<0$이므로

$$D=1^2-4\times1\times(3-k)=-11+4k<0$$

따라서 $\quad k<\frac{11}{4}\quad \cdots\cdots$ ② ▶ 40 %

답 구하기 ①, ②에서 실수 k의 값의 범위는

$$-\frac{1}{4}<k<\frac{11}{4}$$ ▶ 20 %

10

|주안점| x의 값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값의 차를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $0 \le x \le 4$에서 이차함수 $y=2(x-3)^2+k-18$의 꼭짓점의 x좌표 3은 x의 값의 범위에 속한다. 따라서 $x=3$일 때 최솟값은 $k-18$이고, $x=0$일 때 최댓값은 k이므로 $\quad k-(k-18)=18$

답 18

11

| 주안점 | 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 세로의 길이를 x라 하면 가로의 길이는 $40-2x$이고 $x>0$, $40-2x>0$이므로 $\quad 0<x<20$

따라서 울타리로 둘러싸인 부분의 넓이를 y라 하면

$$y=x(40-2x)=-2x^2+40x$$
$$=-2(x-10)^2+200$$

이때 $0<x<20$이므로 울타리로 둘러싸인 부분의 최대 넓이는 $x=10$일 때, 즉 세로의 길이는 10 m, 가로의 길이는 20 m일 때이다.

답 가로의 길이: 20 m, 세로의 길이: 10 m

12

| 주안점 | 주어진 조건을 만족시키는 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 조건 ㈎로부터

$$f(x)=(x-2)^2+k \ (k\text{는 실수}) \quad \cdots\cdots ①$$

조건 ㈏로부터

$(x-2)^2+k=-1$에서 $\quad x^2-4x+k+5=0$

이 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=(-4)^2-4\times1\times(k+5)=-4-4k=0$$

에서 $\quad k=-1$

$k=-1$을 ①에 대입하면

$$f(x)=(x-2)^2-1$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 좌표는

$$(x-2)^2-1=0, \quad x^2-4x+3=0$$

$(x-3)(x-1)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (1, 0), (3, 0)$

답 $(1, 0), (3, 0)$

13

| 주안점 | 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 조건을 찾을 수 있게 한다.

| 풀이 | ㄱ. $-x^2+ax+b=0$의 판별식 D가 $D>0$이므로

$$D=a^2-4\times(-1)\times b=a^2+4b>0$$

ㄴ. $a=3>0$, $b=-2<0$일 때 이차함수 $f(x)=-x^2+3x-2$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점 $(1, 0)$, $(2, 0)$에서 만난다.

ㄷ. 이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프는 직선 $x=\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이고 위로 볼록이므로 $x=0$ 또는 $x=a$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 b이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

14

| 주안점 | 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 도형의 둘레의 길이의 최댓값을 구할 수 있게 한다.

문제 이해 점 A의 좌표를 $(t, 0)$ $(0<t<3)$이라 하면

$$B(6-t, 0), \quad D(t, -t^2+6t)$$

에서 $\quad \overline{AB}=6-2t, \quad \overline{AD}=-t^2+6t$ ▶ 40 %

해결 과정 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$2(\overline{AB}+\overline{AD})=2(6-2t-t^2+6t)$$
$$=-2(t-2)^2+20$$ ▶ 30 %

답 구하기 $0<t<3$이므로 $t=2$일 때 최댓값은 20이다. 따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다. ▶ 30 %

---

11 오른쪽 그림과 같이 한쪽 벽면에 길이가 40 m인 철망으로 'ㄷ'자 모양의 울타리를 만들려고 한다. 울타리로 둘러싸인 직사각형 모양의 바닥의 넓이가 최대일 때, 울타리의 가로와 세로의 길이를 구하시오.
(단, 울타리의 가로의 길이가 세로의 길이보다 길다.)

발 전

사고력+

12 이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 좌표를 모두 구하시오.

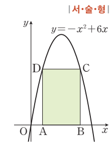
㈎ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이다.
㈏ 이차방정식 $f(x)=-1$은 중근을 갖는다.

13 이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오. (단, $a>0$)

보기
ㄱ. $a^2+4b>0$
ㄴ. $b>0$
ㄷ. x의 값의 범위가 $0\le x\le a$일 때, 이차함수 $y=f(x)$의 최솟값은 b이다.

| 서·술·형 |

14 오른쪽 그림의 직사각형 ABCD에서 두 점 A, B는 x축 위에 있고, 두 점 C, D는 이차함수 $y=-x^2+6x$의 그래프 위에 있다. 이때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



81

3 여러 가지 방정식과 부등식

01 삼차방정식과 사차방정식
02 연립이차방정식
03 연립일차부등식
04 이차부등식과 연립이차부등식

"수학 교과서를 접하자마자 **연립방정식**에 매혹되어, 수업하기도 전에 끝까지 재빨리 읽었다."

(출처: Grenthe, I., 『Nobel Lectures in Chemistry(1996－2000)』)

존 포플(Pople, J. A., 1925~2004)
영국의 이론 화학자

이 글은 1998년 노벨상 수상 연설에서 수학에 흥미를 갖고 깊이 빠졌던 12살의 어린 시절을 회상하면서 한 말인데, 그는 쓰레기 더미에서 수학책을 주워서 혼자 공부할 정도였다고 한다.

82

중단원 도입

일반적으로 이차방정식이 대수적인 방법, 즉 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 거듭제곱근을 구하는 연산을 유한히 반복하여 근의 공식을 얻을 수 있듯이, 삼차방정식과 사차방정식도 대수적인 방법으로 풀이가 가능하다는 것이 알려져 있다. 그러나 고등학교 수준에서 이와 같은 근의 공식을 이해하기는 쉽지 않으므로 여기서는 인수정리, 조립제법을 이용하여 인수분해한 다음 해결할 수 있는 특수한 경우만을 다룬다.

일반적으로 계수가 실수인 n차방정식에서 한 근이 복소수이면 그 켤레복소수도 근이며, n차방정식은 n개의 근을 갖는다는 것을 이차, 삼차, 사차방정식을 풀면서 발견할 수 있도록 지도한다. 이때 중근은 서로 같은 근이 여러 개 있는 것으로 생각하게 한다.

이 단원에서는 간단한 삼차방정식, 사차방정식의 해를 구하고, 미지수가 2개인 연립이차방정식과 미지수가 1개인 연립일차부등식의 풀이, 이차부등식과 이차함수의 관계에 대해 학습한다.

존 포플

존 포플(Pople, J. A., 1925~2004)은 영국 케임브리지 대학교에서 박사 학위를 취득하였다. 1964년에 미국 피츠버그 소재 카네기 멜론 대학교에서 화학 물리학과 교수를 지냈고, 1986년 이후부터 미국 노스 웨스턴 대학교에서 화학과 교수로 재직하였다. 그는 월터 콘(Kohn, W., 1923~2016)과 함께 분자들의 속성과 이 분자들의 화학적 과정에 대한 이론적 연구 방법을 개발한 공로와 더불어 양자화학에서 컴퓨터를 이용한 방법을 개발한 공로로 1998년에 노벨 화학상을 받았다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 삼차방정식과 사차방정식의 뜻을 알게 한다.
② 인수정리와 조립제법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.
③ 계수가 실수인 방정식의 한 허근이 $a+bi$이면 그 켤레복소수 $a-bi$도 방정식의 근임을 알게 한다.
④ 삼차방정식과 사차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다. 이때 여러 개의 해 중에서 주어진 상황에 맞는 해를 결정할 수 있어야 한다.

지도상의 유의점

① 이차방정식의 근의 공식과 같이 삼차방정식이나 사차방정식의 일반적인 해법이 있으나 너무 복잡하므로 여기서는 인수분해를 이용하여 풀 수 있는 간단한 삼차방정식과 사차방정식만 다룬다.
② 인수분해를 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀 때는 인수정리와 조립제법을 이용하는 경우가 일반적이며, 경우에 따라서는 치환 등의 방법을 이용하는 것이 편리함을 알게 한다.
③ 계수가 실수인 방정식에서 한 허근을 알 때, 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 미정계수를 정할 수 있게 하고, 켤레복소수의 성질을 활용하여 한 허근이 주어지면 그 켤레복소수도 근이 됨을 이해하게 한다.
④ 계수가 실수인 삼차방정식과 사차방정식은 계수가 주로 정수이면서 유리수 범위에서 인수분해할 수 있는 경우를 다룬다.
⑤ 구하고자 하는 것을 미지수로 놓고 문제의 조건에 적합한 방정식을 세울 수 있도록 지도한다.

준비하기

| 주안점 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 삼차식과 사차식의 인수분해를 할 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | (1) $f(x)=x^3-3x+2$라 하면 $f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.
따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^3-3x+2&=(x-1)(x^2+x-2)\\ &=(x-1)^2(x+2) \end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^4-2x^2-3x-2$라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 $x+1$, $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.
따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^4-2x^2-3x-2&=(x+1)(x^3-x^2-x-2)\\ &=(x+1)(x-2)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

답 (1) $(x-1)^2(x+2)$
(2) $(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$

삼차방정식과 사차방정식

평가 기준
상 다양한 방법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중 인수정리, 조립제법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
하 인수정리, 조립제법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

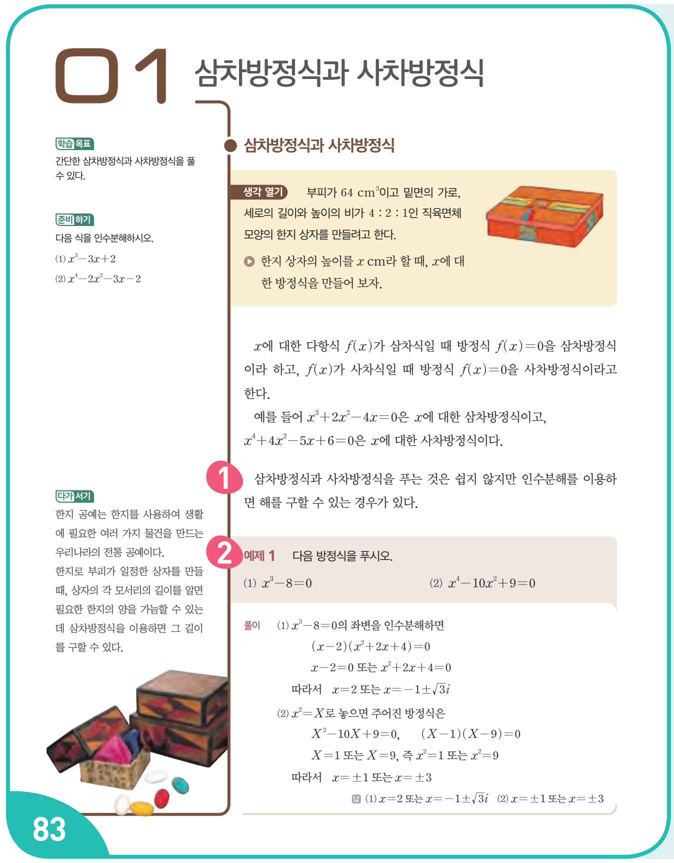
생각 열기

| 지도 방향 | 직육면체의 부피와 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이, 높이의 비를 이용하여 x에 대한 삼차방정식을 만들 수 있음을 알게 한다.

▶ 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이, 높이의 비가 $4:2:1$이고 높이가 x cm이므로 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $4x$ cm, $2x$ cm이다. 이때 한지 상자의 부피가 64 cm^3이므로 x에 대한 방정식을 만들면
$4x\times2x\times x=64$에서 $\quad x^3-8=0$

내용 연구

1 삼차방정식이 주어지면 먼저 공통인수가 있는지 확인하고 인수분해 공식을 이용하여 인수분해한다. 인수분해 공식을 이용할 수 없을 때는 인수정리를 이용하여 인수를 찾고 조립제법을 이용하여 인수분해한다.


01 삼차방정식과 사차방정식

학습 목표
간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

준비 하기
다음 식을 인수분해하시오.
(1) x^3-3x+2
(2) x^4-2x^2-3x-2

삼차방정식과 사차방정식

생각 열기 부피가 64 cm^3이고 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이의 비가 $4:2:1$인 직육면체 모양의 한지 상자를 만들려고 한다.
▶ 한지 상자의 높이를 x cm라 할 때, x에 대한 방정식을 만들어 보자.

x에 대한 다항식 $f(x)$가 삼차식일 때 방정식 $f(x)=0$을 삼차방정식이라 하고, $f(x)$가 사차식일 때 방정식 $f(x)=0$을 사차방정식이라고 한다.
예를 들어 $x^3+2x^2-4x=0$은 x에 대한 삼차방정식이고, $x^4+4x^2-5x+6=0$은 x에 대한 사차방정식이다.

1 삼차방정식과 사차방정식을 푸는 것은 쉽지 않지만 인수분해를 이용하면 해를 구할 수 있는 경우가 있다.

다가 서기
한지 공예는 한지를 사용하여 생활에 필요한 여러 가지 물건을 만드는 우리나라의 전통 공예이다.
한지로 부피가 일정한 상자를 만들 때, 상자의 각 모서리의 길이를 알면 필요한 한지의 양을 가늠할 수 있는데 삼차방정식을 이용하면 그 길이를 구할 수 있다.

2 예제 1 다음 방정식을 푸시오.
(1) $x^3-8=0$ (2) $x^4-10x^2+9=0$

풀이 (1) $x^3-8=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x-2)(x^2+2x+4)=0$
$x-2=0$ 또는 $x^2+2x+4=0$
따라서 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$
(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-10X+9=0$, $(X-1)(X-9)=0$
$X=1$ 또는 $X=9$, 즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=9$
따라서 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$
답 (1) $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$ (2) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

83

2 이차방정식이 복소수 범위에서 항상 2개의 근을 갖는 것과 같이 계수가 실수인 삼차방정식과 사차방정식은 복소수 범위에서 각각 3개, 4개의 근을 갖는다.
이때 삼차방정식은 반드시 실근이 한 개 이상 존재하지만 사차방정식은 실근이 한 개도 존재하지 않을 수도 있음을 알게 한다.

3 방정식 $f(x)=0$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$와 같이 인수분해된다.
이때 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$$\pm\frac{(f(x)\text{의 상수항의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$$

중에서 찾아보게 한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 인수분해 공식을 이용하여 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 좌변을 인수분해하면
$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

문제 1 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3+27=0$ (2) $x^4-2x^2-8=0$

3 **예제 2** 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-2x^2-5x+6=0$ (2) $x^4-x^3-2x^2+6x-4=0$

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이면 $f(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.

풀이 (1) $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면

$f(1)=1-2-5+6=0$

이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x-3)(x+2)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x-3)(x+2)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-2$

(2) $f(x)=x^4-x^3-2x^2+6x-4$라 하면

$f(1)=1-1-2+6-4=0$

$f(-2)=16+8-8-12-4=0$

이므로 $x-1$과 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -2 & 6 & -4 \\ & & 1 & 0 & -2 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 0 & -2 & 4 & \boxed{0} \\ & & -2 & 4 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+2)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(x^2-2x+2)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-2$
(2) $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

문제 2 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-7x+6=0$ (2) $2x^3+3x^2-5x-6=0$

(3) $x^4-3x^3-x^2+9x-6=0$ (4) $x^4-3x^3+2x^2+2x-4=0$

84

따라서 $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x^2=X$로 놓으면 $X^2-2X-8=0$

$(X-4)(X+2)=0$에서 $(x^2-4)(x^2+2)=0$

즉, $(x+2)(x-2)(x^2+2)=0$

따라서 $x=\pm2$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x=\pm2$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

문제 2

| 주안점 | 인수정리와 조립제법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $f(x)=x^3-7x+6$이라 하면 $f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+3)(x-2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x+3)(x-2)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=2$

(2) $f(x)=2x^3+3x^2-5x-6$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & -5 & -6 \\ & & -2 & 1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2+x-6)$

$=(x+1)(x+2)(2x-3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x+2)(2x-3)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

(3) $f(x)=x^4-3x^3-x^2+9x-6$이라 하면 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 $x-1$과 $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & -1 & 9 & -6 \\ & & 1 & -2 & -3 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -2 & -3 & 6 & \boxed{0} \\ & & 2 & 0 & -6 & \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x-2)(x^2-3)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(4) $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+2x-4$라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 $x+1$과 $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 2 & 2 & -4 \\ & & -1 & 4 & -6 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 6 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 4 & \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x+2)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+2)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm i$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=2$

(2) $x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

(3) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(4) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm i$

문제 풀이

문제 3

|주안점| 사차방정식의 한 허근을 알 때, 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 실수의 값을 정하고 나머지 세 근을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x=i$를 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$$1-ai-4-4i+b=0$$

에서 $\quad (-3+b)-(a+4)i=0$

a, b가 실수이므로 $\quad a=-4,\ b=3$

(2) (1)에서 주어진 방정식은

$$x^4-4x^3+4x^2-4x+3=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -4 & 4 & -4 & 3 \\
 & & 1 & -3 & 1 & -3 \\
\hline
3 & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
 & & 3 & 0 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-1)(x-3)(x^2+1)=0$$

이므로 $\quad x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\pm i$

따라서 나머지 세 근은 1, 3, $-i$이다.

답 (1) $a=-4,\ b=3$
(2) $1,\ 3,\ -i$

문제 4

|주안점| 삼차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| 수족관의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 x m라 하면 수족관에 채워진 물의 부피가 $75\pi\ \mathrm{m}^3$이고, 물이 채워진 부분에 해당하는 높이는 $(x-2)$ m이므로

$$\pi x^2(x-2)=75\pi$$

에서 $\quad x^3-2x^2-75=0$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
5 & 1 & -2 & 0 & -75 \\
 & & 5 & 15 & 75 \\
\hline
 & 1 & 3 & 15 & \boxed{0}
\end{array}$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-5)(x^2+3x+15)=0$$

이므로 $\quad x=5$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{51}i}{2}$

따라서 수족관의 높이는 5 m이다.

답 5 m

예제 3 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+x+b=0$의 한 근이 $2+i$일 때, 나머지 두 근을 구하시오.

풀이 $x=2+i$를 주어진 방정식에 대입하면

$$(2+i)^3+a(2+i)^2+(2+i)+b=0$$

이 식을 정리하면 $\quad (4+3a+b)+(12+4a)i=0$

a, b가 실수이므로 $\quad 4+3a+b=0,\quad 12+4a=0$

위의 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=5$

주어진 방정식은 $x^3-3x^2+x+5=0$이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -3 & 1 & 5 \\
 & & -1 & 4 & -5 \\
\hline
 & 1 & -4 & 5 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$(x+1)(x^2-4x+5)=0$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2\pm i$$

따라서 나머지 두 근은 -1과 $2-i$이다.

답 $-1,\ 2-i$

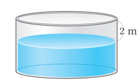
α, β가 실수일 때, $\alpha+\beta i=0$이면 $\alpha=0$이고 $\beta=0$이다.

계수가 실수인 방정식에서 한 허근이 $a+bi$이면 그 켤레복소수 $a-bi$도 이 방정식의 근이다.

문제 3 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+4x^2-4x+b=0$의 한 근이 i일 때, 다음을 구하시오.

(1) a, b의 값 (2) 나머지 세 근

문제 4 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이와 높이가 같은 원기둥 모양의 수족관에 $75\pi\ \mathrm{m}^3$의 물을 부었더니 수족관의 위에서부터 2 m를 남기고 물이 채워졌다. 이때 수족관의 높이를 구하시오. (단, 수족관의 두께는 생각하지 않는다.)



생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 오른쪽 식의 값을 구하려고 한다.

$$1+\omega^2+\omega^4 \qquad \omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}$$

활동 1 $\omega^3=1$과 $\omega^2+\omega+1=0$이 성립함을 설명해 보자.

활동 2 활동 1의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구해 보자.

85

생각 넓히기

|지도 방향| 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| ❶ ω는 $x^3-1=0$의 근이므로

$$\omega^3-1=0,\quad \omega^3=1$$

또, $x^3-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

따라서 $\quad x-1=0$ 또는 $x^2+x+1=0$

이때 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

❷ (i) $\omega^4=\omega^3\times\omega=1\times\omega=\omega$이므로

$$1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$$

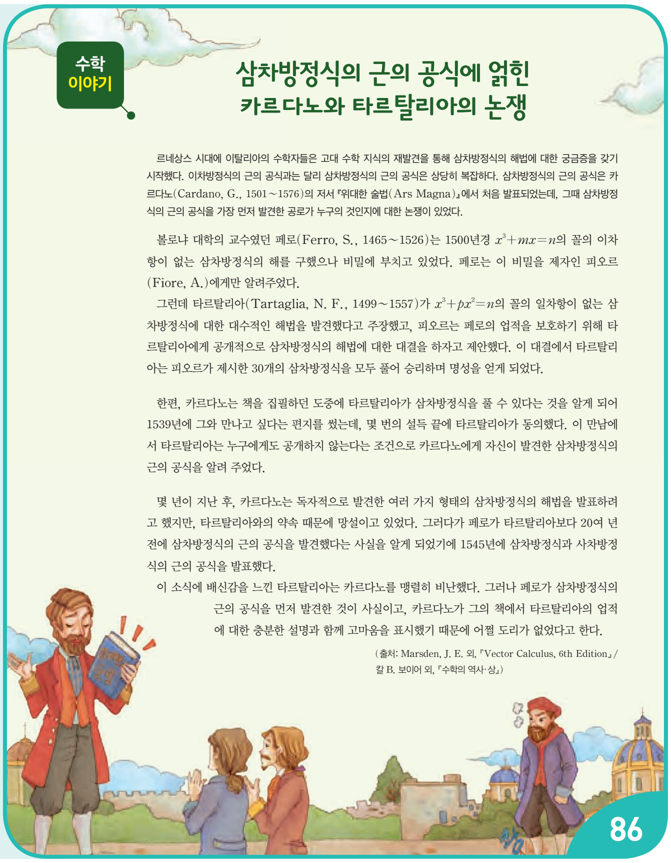
(ii) $\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\times\omega=\omega$이므로

$$\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}$$

이때 $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로

$$\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

답 ❶ 풀이 참조
❷ $1+\omega^2+\omega^4=0,\quad \omega^{100}+\dfrac{1}{\omega^{100}}=-1$


수학 이야기

삼차방정식의 근의 공식에 얽힌 카르다노와 타르탈리아의 논쟁

르네상스 시대에 이탈리아의 수학자들은 고대 수학 지식의 재발견을 통해 삼차방정식의 해법에 대한 궁금증을 갖기 시작했다. 이차방정식의 근의 공식과는 달리 삼차방정식의 근의 공식은 상당히 복잡하다. 삼차방정식의 근의 공식은 카르다노(Cardano, G., 1501∼1576)의 저서 『위대한 술법(Ars Magna)』에서 처음 발표되었는데, 그때 삼차방정식의 근의 공식을 가장 먼저 발견한 공로가 누구의 것인지에 대한 논쟁이 있었다.

볼로냐 대학의 교수였던 페로(Ferro, S., 1465∼1526)는 1500년경 $x^3+mx=n$의 꼴의 이차항이 없는 삼차방정식의 해를 구했으나 비밀에 부치고 있었다. 페로는 이 비밀을 제자인 피오르(Fiore, A.)에게만 알려주었다.

그런데 타르탈리아(Tartaglia, N. F., 1499∼1557)가 $x^3+px^2=n$의 꼴의 일차항이 없는 삼차방정식에 대한 대수적인 해법을 발견했다고 주장했고, 피오르는 페로의 업적을 보호하기 위해 타르탈리아에게 공개적으로 삼차방정식의 해법에 대한 대결을 하자고 제안했다. 이 대결에서 타르탈리아는 피오르가 제시한 30개의 삼차방정식을 모두 풀어 승리하며 명성을 얻게 되었다.

한편, 카르다노는 책을 집필하던 도중에 타르탈리아가 삼차방정식을 풀 수 있다는 것을 알게 되어 1539년에 그와 만나고 싶다는 편지를 썼는데, 몇 번의 설득 끝에 타르탈리아가 동의했다. 이 만남에서 타르탈리아는 누구에게도 공개하지 않는다는 조건으로 카르다노에게 자신이 발견한 삼차방정식의 근의 공식을 알려 주었다.

몇 년이 지난 후, 카르다노는 독자적으로 발견한 여러 가지 형태의 삼차방정식의 해법을 발표하려고 했지만, 타르탈리아와의 약속 때문에 망설이고 있었다. 그러다가 페로가 타르탈리아보다 20여 년 전에 삼차방정식의 근의 공식을 발견했다는 사실을 알게 되었기에 1545년에 삼차방정식과 사차방정식의 근의 공식을 발표했다.

이 소식에 배신감을 느낀 타르탈리아는 카르다노를 맹렬히 비난했다. 그러나 페로가 삼차방정식의 근의 공식을 먼저 발견한 것이 사실이고, 카르다노가 그의 책에서 타르탈리아의 업적에 대한 충분한 설명과 함께 고마움을 표시했기 때문에 어쩔 도리가 없었다고 한다.

(출처: Marsden, J. E. 외, 『Vector Calculus, 6th Edition』/ 칼 B. 보이어 외, 『수학의 역사·상』)

86

지도 자료

바스카라의 삼차방정식

인도의 수학자 바스카라(Bhaskara, A., 1114∼1185)는 다음과 같은 삼차방정식에 대한 문제와 풀이를 제시하였다.

> 어떤 수의 세제곱에 그 수의 12배를 더하면 그 수의 제곱의 6배에 35를 더한 수와 같다.
> 교양 있는 사람들이여, 그 수는 몇인지 말해 보아라.

위의 문제에 대한 바스카라의 풀이를 해석하여 식으로 나타내면 다음과 같다.

어떤 수를 x라 하면

$$x^3+12x=6x^2+35$$

우변의 $6x^2$을 좌변으로 이항하면

$$x^3-6x^2+12x=35$$

이 식의 양변에 -8을 더하면

$$(x-2)^3=27$$

이므로

$$x-2=3$$

따라서 구하는 해는

$$x=5$$

수학 이야기 삼차방정식의 근의 공식에 얽힌 카르다노와 타르탈리아의 논쟁

16세기 이탈리아의 수학자들이 삼차방정식과 사차방정식의 일반적인 해법을 발견한 이래 많은 수학자들이 오차방정식의 해를 구할 수 있는 일반적인 해법을 찾으려고 노력했다. 그러나 그로부터 200여년이 지난 19세기 초까지도 그 해법을 발견하지 못했다. 가우스(Gauss, K. F., 1777∼1855)는 1797년에 복소수를 계수로 하는 n차의 대수방정식이 복소수의 범위에서 반드시 근을 갖는다는 것을 보였는데 이 정리를 '대수학의 기본 정리'라고 한다.

가우스의 정리에 따르면 이차방정식 $x^2+1=0$의 근을 구하기 위해 실수에서 복소수로 수를 확장할 수 있다.

마찬가지 논리로 계수가 복소수인 n차방정식

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0 \qquad \cdots ①$$

을 풀기 위해 $f(x)$가 일차식의 곱으로 완전히 인수분해되어야 하고, 그러기 위해서는 '수의 개념을 복소수보다 더 큰 범위로 확장할 필요가 있는가?'라는 문제가 제기된다. 그런데 방정식의 근을 구하기 위해서 수의 개념을 복소수에서 더 이상 확장할 필요가 없다는 해답을 찾아낸 수학자가 바로 가우스이다. 즉, 방정식 ①이 적어도 하나의 복소수의 근을 가짐을 보인 것이다.

'방정식의 기본 정리'는 '계수가 복소수인 n차방정식의 근은 모두 복소수이고, 모든 근의 중복도(重複度)의 합은 방정식의 차수 n과 같다.'라는 내용으로 가우스의 '대수학의 기본 정리'를 이용하여 얻을 수 있다.

노르웨이의 수학자 아벨(Abel, N. H., 1802∼1829)은 19세기 초에 오차방정식의 해법을 발견했다고 생각했으나 곧 그것은 착오였음이 밝혀졌다. 그러자 그는 '과연 해법이 존재할까?'라는 의문을 가지게 되었고, 그 의문을 토대로 연구한 결과 오차 이상의 방정식의 일반적인 해법은 계수들의 사칙연산과 제곱 및 제곱근의 연산 범위 내에서는 구할 수 없다는 사실을 알아냈다.

|참고| 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&ax^3+bx^2+cx+d\\&=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\&=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a(\alpha\beta\gamma)\end{aligned}$$

이때 양변의 계수를 각각 비교하면 다음이 성립한다.

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

소단원 지도 개관

지도 목표

① 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 연립이차방정식은 적어도 하나가 인수분해되는 경우만 다루고 복잡한 연립이차방정식은 다루지 않는다.

② 연립방정식의 해를 구한 다음 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인하는 습관을 갖게 한다.

준비하기

|주안점| 연립방정식을 풀 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ① \\ 2x-y=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①+②를 하면 $3x=9$, $x=3$

$x=3$을 ①에 대입하면 $y=0$

(2) $\begin{cases} x+2y=-2 & \cdots\cdots ① \\ 3x-y=8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①+②×2를 하면 $7x=14$, $x=2$

$x=2$를 ②에 대입하면 $y=-2$

답 (1) $x=3$, $y=0$ (2) $x=2$, $y=-2$

● 미지수가 2개인 연립이차방정식

평가 기준

상	미지수가 2개인 연립이차방정식과 관련된 실생활 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
하	일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 주어진 조건을 이용하여 x, y에 대한 방정식을 만들 수 있게 한다.

▶ 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각 x m, y m이고, 둘레의 길이가 14 m이므로 $2x+2y=14$

대각선의 길이는 5 m이므로 $x^2+y^2=25$

내용 연구

❶ 이차방정식과 일차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 한 문자에 대하여 정리한 일차방정식을 이차방정식에 대입하여 해를 구할 수 있음을 알게 한다.

02 연립이차방정식

학습 목표

미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

준비하기

다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y=-2 \\ 3x-y=8 \end{cases}$

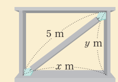
다가서기

건물 벽면에 시공하는 '진동 에너지 흡수 장치'는 지진에 의해 건물이 붕괴되는 것을 방지하기 위한 장치이다.

일정한 공간에 시공할 수 있는 이와 같은 장치를 설계하는 데에는 연립방정식이 활용된다.

● 미지수가 2개인 연립이차방정식

생각 열기 오른쪽 그림은 길이가 5 m인 '진동 에너지 흡수 장치'를 둘레의 길이가 14 m인 직사각형 모양의 대각선에 시공한 것이다.



▶ 가로와 세로의 길이를 각각 x m, y m라 할 때, x와 y에 대한 방정식을 2개 만들어 보자.

위의 **생각 열기**에서 x, y에 대한 방정식을 만들면

$$\begin{cases} 2x+2y=14 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

이다.

이와 같이 미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이것을 연립이차방정식이라고 한다.

❶ 이차방정식과 일차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 것을 이차방정식에 대입하여 풀 수 있다.

예제 1 연립방정식 $\begin{cases} x+y=7 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 를 푸시오.

풀이 ①에서 $y=7-x$ ……③

③을 ②에 대입하면

$x^2+(7-x)^2=25$, $x^2-7x+12=0$

$(x-3)(x-4)=0$, $x=3$ 또는 $x=4$

$x=3$을 ③에 대입하면 $y=4$

$x=4$를 ③에 대입하면 $y=3$

따라서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ ……답

87

❷ 두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 하나의 이차방정식을 인수분해하여 두 일차식의 곱으로 만든 다음 한 문자에 대하여 정리한 식을 나머지 이차방정식에 대입하여 해를 구할 수 있음을 알게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 이차방정식과 일차방정식으로 이루어진 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=1-x$ ……③

③을 ②에 대입하면 $x^2+(1-x)^2=13$

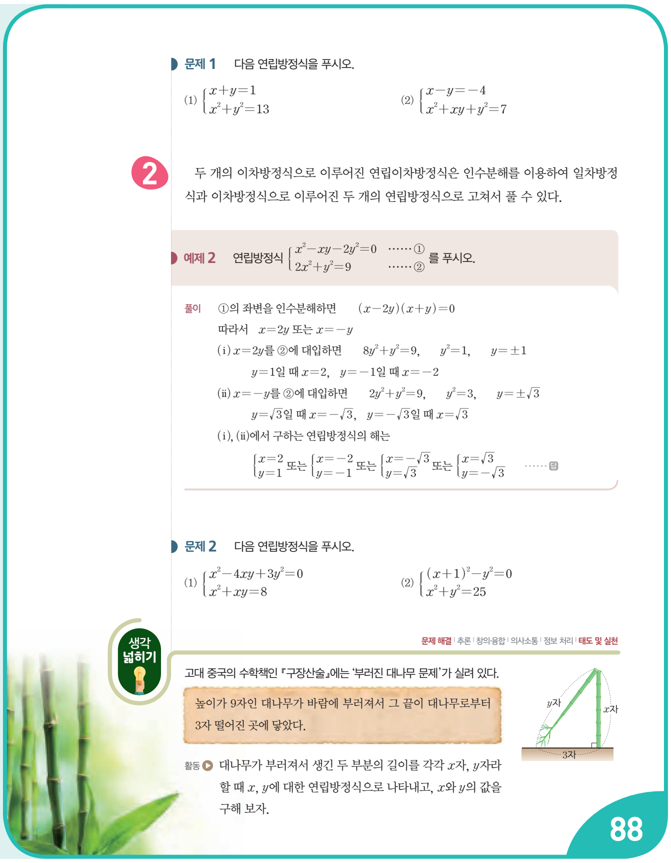
$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

즉, $x=-2$ 또는 $x=3$

$x=-2$를 ③에 대입하면 $y=3$

$x=3$을 ③에 대입하면 $y=-2$

따라서 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$



문제 1 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=-4 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

2 두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 인수분해를 이용하여 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 두 개의 연립방정식으로 고쳐서 풀 수 있다.

예제 2 연립방정식 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 를 푸시오.

풀이 ①의 좌변을 인수분해하면 $(x-2y)(x+y)=0$

따라서 $x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$를 ②에 대입하면 $8y^2+y^2=9$, $y^2=1$, $y=\pm1$

$y=1$일 때 $x=2$, $y=-1$일 때 $x=-2$

(ii) $x=-y$를 ②에 대입하면 $2y^2+y^2=9$, $y^2=3$, $y=\pm\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}$일 때 $x=-\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$일 때 $x=\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ ⋯⋯ 답

문제 2 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2+xy=8 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

고대 중국의 수학책인 『구장산술』에는 '부러진 대나무 문제'가 실려 있다.

높이가 9자인 대나무가 바람에 부러져서 그 끝이 대나무로부터 3자 떨어진 곳에 닿았다.

활동 ▶ 대나무가 부러져서 생긴 두 부분의 길이를 각각 x자, y자라 할 때 x, y에 대한 연립방정식으로 나타내고, x와 y의 값을 구해 보자.

88

(2) $\begin{cases} x-y=-4 & \cdots\cdots ① \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=x+4$ ⋯⋯ ③

③을 ②에 대입하면

$x^2+x(x+4)+(x+4)^2=7$

$x^2+4x+3=0$, $(x+3)(x+1)=0$

즉, $x=-3$ 또는 $x=-1$

$x=-3$을 ③에 대입하면 $y=1$

$x=-1$을 ③에 대입하면 $y=3$

따라서 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

답 풀이 참조

문제 2

| 주안점 | 두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+xy=8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-3y)=0$

따라서 $x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ②에 대입하면 $y^2=4$, $y=\pm2$

$y=2$일 때 $x=2$, $y=-2$일 때 $x=-2$

(ii) $x=3y$를 ②에 대입하면 $y^2=\frac{2}{3}$, $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$y=\frac{\sqrt{6}}{3}$일 때 $x=\sqrt{6}$, $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}$일 때 $x=-\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 좌변을 인수분해하면

$(x-y+1)(x+y+1)=0$

따라서 $x=y-1$ 또는 $x=-y-1$

(i) $x=y-1$을 ②에 대입하여 정리하면

$(y+3)(y-4)=0$

$y=-3$일 때 $x=-4$, $y=4$일 때 $x=3$

(ii) $x=-y-1$을 ②에 대입하여 정리하면

$(y-3)(y+4)=0$

$y=3$일 때 $x=-4$, $y=-4$일 때 $x=3$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$

답 풀이 참조

생각 넓히기

| 지도 방향 | 주어진 조건을 만족시키는 연립이차방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 대나무가 부러져 생긴 두 부분의 길이가 각각 x자, y자이고 대나무의 높이가 9자이므로 $x+y=9$

피타고라스 정리에 의하여 $x^2+9=y^2$

위의 두 식을 연립방정식으로 나타내면

$\begin{cases} x+y=9 & \cdots\cdots ① \\ -x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+9$ ⋯⋯ ③

③을 ②에 대입하면 $-x^2+(-x+9)^2=9$

$18x=72$, $x=4$

$x=4$를 ①에 대입하면 $y=5$

답 $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2+9=y^2 \end{cases}$, $x=4$, $y=5$

소단원 지도 개관

지도 목표

① 미지수가 1개인 연립일차부등식과 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 복소수에서는 대소 관계를 생각할 수 없으므로 부등식에 포함된 모든 문자는 실수의 범위에서 다룸을 알게 한다.

② 부등식을 풀 때는 부등식의 성질을 이용한다는 것을 강조한다. 이때 부등식의 양변에 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀜에 주의하게 한다.

③ 연립부등식의 해는 각 부등식의 해를 구한 다음 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾게 한다.

④ 부등식에 등호가 있는 경우와 없는 경우를 구분하여 부등식을 풀 수 있게 한다.

⑤ 각 부등식의 공통부분이 없으면 연립부등식의 해가 없음을 알 수 있게 한다.

⑥ $A<B<C$ 꼴의 연립부등식을 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$로 바꾸어서 풀게 하고, $\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$로 풀지 않게 한다.

⑦ 절댓값 기호를 포함한 일차부등식은 절대값 기호가 한 개 또는 두 개인 것만 다룬다.

용어와 기호

• 연립부등식(聯立不等式, system of inequalities / simultaneous inequalities)

준비하기

|주안점| 부등식의 성질을 이용하여 일차부등식을 풀 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) 1과 $3x$를 이항하면

$x-2x\leq-3-1,\quad -x\leq-4$

양변에 -1을 곱하면 구하는 해는 $\quad x\geq4$

(2) 괄호를 풀면 $\quad 3x+3>-x+1$

3과 $-x$를 이항하면

$3x+x>1-3,\quad 4x>-2$

양변을 4로 나누면 구하는 해는 $\quad x>-\dfrac{1}{2}$

답 (1) $x\geq4$ (2) $x>-\dfrac{1}{2}$

03 연립일차부등식

학습 목표

미지수가 1개인 연립일차부등식과 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

준비 하기

다음 부등식을 푸시오.

(1) $x+1\leq2x-3$

(2) $3(x+1)>-(x-1)$

미지수가 1개인 연립일차부등식

생각 열기 높은 건물 위로 물건을 옮기는 데 사용하는 사다리차는 한 번에 100 kg 이상의 물건을 올려놓으면 경고음이 울린다고 한다.

❶ 무게가 x kg인 물건 1개와 30 kg인 물건 1개를 동시에 올려놓았더니 경고음이 울리지 않았다. 이 상황을 부등식으로 나타내어 보자.

❷ 무게가 x kg인 물건 3개와 20 kg인 물건 1개를 동시에 올려놓았더니 경고음이 울렸다. 이 상황을 부등식으로 나타내어 보자.

부등식에서 우변에 있는 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때,

(일차식)<0, (일차식)>0,

(일차식)≤0, (일차식)≥0

중에서 어느 하나의 꼴로 나타내어지는 부등식을 일차부등식이라고 한다.

위의 생각 열기에서 구한 두 부등식

$x+30<100,\quad 3x+20\geq100$

의 공통인 해를 구하려고 할 때, 이들을 한 쌍으로 묶어서 보통

$$\begin{cases} x+30<100 \\ 3x+20\geq100 \end{cases}$$

과 같이 나타낸다.

이와 같이 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어 나타낸 것을 **연립부등식**이라 하며, 일차부등식으로 이루어진 연립부등식을 연립일차부등식이라고 한다.

다가 서기

기업에서는 이익을 극대화하기 위해 인사, 재무, 생산, 재고 등의 관리와 생산된 제품의 판매 가격과 수익 등을 고려해야 한다.

이익에 영향을 주는 이러한 요인들을 몇 개의 부등식으로 모델링한 다음 공통인 해를 구하면 이익 극대화에 가장 적합한 조건을 찾을 수 있다.

❶ 또, 연립부등식에서 각 부등식의 공통인 해를 그 연립부등식의 해라 하고, 연립부등식의 해를 구하는 것을 '연립부등식을 푼다'고 한다.

89

미지수가 1개인 연립일차부등식

평가 기준

상	연립일차부등식을 두 일차부등식으로 표현하고, 그 해를 구할 수 있다.
중	간단한 연립일차부등식을 두 일차부등식으로 표현하고, 그 해를 구할 수 있다
하	간단한 연립일차부등식을 두 일차부등식으로 표현할 수 있다.

생각 열기

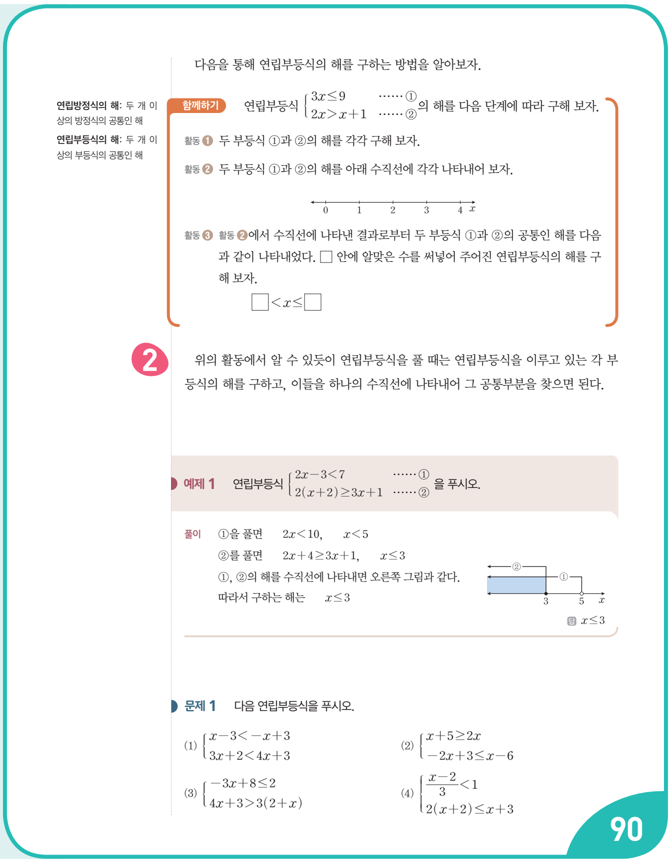
|지도 방향| 실생활에서 주어진 상황을 부등식을 이용하여 간단히 나타낼 수 있게 한다.

❶ $x+30<100$ ❷ $3x+20\geq100$

내용 연구

❶ 부등식의 풀이는 기본적으로 실수의 대소 관계에 근거하고 있으므로, 이를 이용하여 부등식을 풀 수 있게 한다.

❷ 연립부등식에서 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾을 때는 수직선을 이용하면 편리함을 알게 한다.


다음을 통해 연립부등식의 해를 구하는 방법을 알아보자.

연립방정식의 해: 두 개 이상의 방정식의 공통인 해

연립부등식의 해: 두 개 이상의 부등식의 공통인 해

함께하기 연립부등식 $\begin{cases} 3x\le 9 & \cdots\cdots ① \\ 2x>x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$의 해를 다음 단계에 따라 구해 보자.

활동 ❶ 두 부등식 ①과 ②의 해를 각각 구해 보자.

활동 ❷ 두 부등식 ①과 ②의 해를 아래 수직선에 각각 나타내어 보자.

활동 ❸ 활동 ❷에서 수직선에 나타낸 결과로부터 두 부등식 ①과 ②의 공통인 해를 다음과 같이 나타내었다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 주어진 연립부등식의 해를 구해 보자.

$\square < x \le \square$

2 위의 활동에서 알 수 있듯이 연립부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구하고, 이들을 하나의 수직선에 나타내어 그 공통부분을 찾으면 된다.

예제 1 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<7 & \cdots\cdots ① \\ 2(x+2)\ge 3x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$을 푸시오.

풀이 ①을 풀면 $2x<10$, $x<5$

②를 풀면 $2x+4\ge 3x+1$, $x\le 3$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 해는 $x\le 3$

답 $x\le 3$

문제 1 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-3<-x+3 \\ 3x+2<4x+3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+5\ge 2x \\ -2x+3\le x-6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -3x+8\le 2 \\ 4x+3>3(2+x) \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}<1 \\ 2(x+2)\le x+3 \end{cases}$

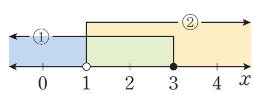
90

함께하기

| 지도 방향 | 연립부등식에서 각 부등식의 해를 구한 다음 그 공통부분을 찾아 연립부등식을 풀 수 있음을 이해하게 한다.

| 풀이 | ❶ ①을 풀면 $x\le 3$, ②를 풀면 $x>1$

❷ ①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



❸ ❷에서 수직선에 나타낸 결과로부터 주어진 연립부등식의 해는

$\boxed{1} < x \le \boxed{3}$

답 ❶ $x\le 3$, $x>1$ ❷ 풀이 참조 ❸ 1, 3

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 부등식의 성질을 이용하여 연립부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\begin{cases} x-3<-x+3 & \cdots\cdots ① \\ 3x+2<4x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$에서

①을 풀면 $2x<6$, $x<3$

②를 풀면 $x>-1$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 해는

$-1<x<3$

(2) $\begin{cases} x+5\ge 2x & \cdots\cdots ① \\ -2x+3\le x-6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$에서

①을 풀면 $x\le 5$

②를 풀면 $3x\ge 9$, $x\ge 3$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 해는

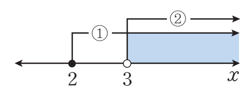
$3\le x\le 5$

(3) $\begin{cases} -3x+8\le 2 & \cdots\cdots ① \\ 4x+3>3(2+x) & \cdots\cdots ② \end{cases}$에서

①을 풀면 $3x\ge 6$, $x\ge 2$

②를 풀면 $4x+3>6+3x$, $x>3$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



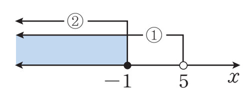
따라서 구하는 해는 $x>3$

(4) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}<1 & \cdots\cdots ① \\ 2(x+2)\le x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$에서

①을 풀면 $x-2<3$, $x<5$

②를 풀면 $2x+4\le x+3$, $x\le -1$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $x\le -1$

답 (1) $-1<x<3$ (2) $3\le x\le 5$ (3) $x>3$ (4) $x\le -1$

지도 자료

실수의 대소 관계 비교

(1) 두 실수 a, b에 대하여

① $a>b \iff a-b>0$ ② $a<b \iff a-b<0$

(2) 두 실수 a, b에 대하여 $a>b$, $b>0$일 때

① $a>b \iff a^2>b^2$ ② $a\ge b \iff \dfrac{a}{b}\ge 1$

(3) 부호가 같은 두 실수 a, b의 역수를 취하면 대소 관계가 반대로 바뀐다.

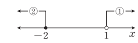
① $a>b>0 \iff \dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}>0$

② $a<b<0 \iff \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}<0$

예제 2 연립부등식 $\begin{cases} 4x+3>7 & \cdots\cdots ① \\ x+1 \geq 3x+5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 를 푸시오.

풀이 ①을 풀면 $x>1$, ②를 풀면 $x \leq -2$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 공통부분이 없다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

문제 2 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-2 \leq -3 \\ 3x-8 \geq -2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-2 \geq x+6 \\ 2x-4 > 5x+2 \end{cases}$

$A<B<C$ 꼴의 연립부등식

1 연립부등식 $A<B<C$는 두 부등식 $A<B$와 $B<C$를 하나의 식으로 나타낸 것이다. 따라서 $A<B<C$를 풀 때는 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$를 풀면 된다.

연립부등식 $A<B<C$를 $\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$로 풀어서는 안 된다.

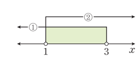
예제 3 연립부등식 $5x-4<2x+5<4x+3$을 푸시오.

풀이 주어진 부등식을 변형하면 $\begin{cases} 5x-4<2x+5 & \cdots\cdots ① \\ 2x+5<4x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $x<3$

②를 풀면 $x>1$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $1<x<3$

답 $1<x<3$

문제 3 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $-5<x-3<-x+7$ (2) $3+2(x-6) \leq -x-9 < 2x-3$

91

문제 풀이

문제 2

|주안점| 연립부등식의 해가 없는 경우를 알게 한다.

|풀이| (1) $\begin{cases} x-2 \leq -3 & \cdots\cdots ① \\ 3x-8 \geq -2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $x \leq -1$

②를 풀면 $x \geq 2$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 공통부분이 없다.

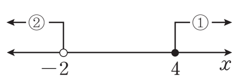
따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(2) $\begin{cases} 3x-2 \geq x+6 & \cdots\cdots ① \\ 2x-4 > 5x+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $x \geq 4$

②를 풀면 $x < -2$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 공통부분이 없다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 (1) 해는 없다. (2) 해는 없다.

● $A<B<C$ 꼴의 연립부등식

내용 연구

1 $A<B<C$ 꼴의 연립부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$로 바꾸어서 풀면 해를 구할 수 있음을 알게 한다.

문제 풀이

문제 3

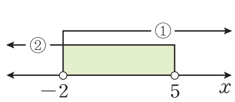
|주안점| $A<B<C$ 꼴의 연립부등식을 풀 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\begin{cases} -5<x-3 & \cdots\cdots ① \\ x-3<-x+7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $x>-2$

②를 풀면 $x<5$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는

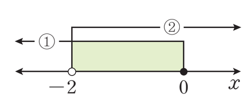
$-2<x<5$

(2) $\begin{cases} 3+2(x-6) \leq -x-9 & \cdots\cdots ① \\ -x-9<2x-3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $x \leq 0$

②를 풀면 $x>-2$

①, ②의 해를 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는

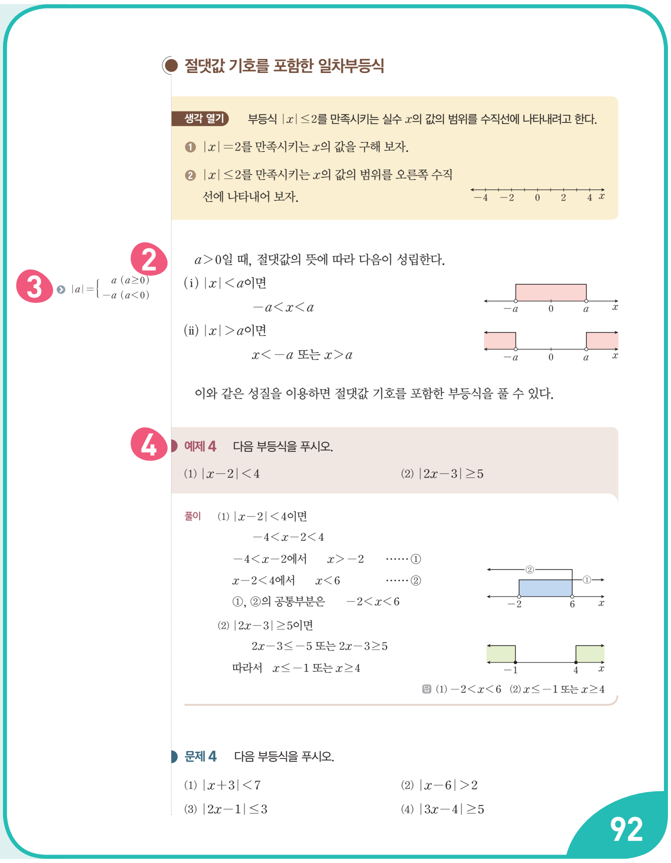
$-2<x \leq 0$

답 (1) $-2<x<5$ (2) $-2<x \leq 0$

● 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

평가 기준

상	절댓값 기호를 2개 포함한 일차부등식과 관련된 실생활 문제를 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	부등식의 성질을 이용하여 절댓값 기호를 2개 포함한 일차부등식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
하	부등식의 성질을 이용하여 절댓값 기호를 1개 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.



절댓값 기호를 포함한 일차부등식

생각 열기 부등식 $|x|\le 2$를 만족시키는 실수 x의 값의 범위를 수직선에 나타내려고 한다.

❶ $|x|=2$를 만족시키는 x의 값을 구해 보자.

❷ $|x|\le 2$를 만족시키는 x의 값의 범위를 오른쪽 수직선에 나타내어 보자.

❷ $a>0$일 때, 절댓값의 뜻에 따라 다음이 성립한다.

(i) $|x|<a$이면

$-a<x<a$

(ii) $|x|>a$이면

$x<-a$ 또는 $x>a$

❸ $|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

이와 같은 성질을 이용하면 절댓값 기호를 포함한 부등식을 풀 수 있다.

❹ 예제 4 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-2|<4$ (2) $|2x-3|\ge 5$

풀이 (1) $|x-2|<4$이면

$-4<x-2<4$

$-4<x-2$에서 $x>-2$ ……①

$x-2<4$에서 $x<6$ ……②

①, ②의 공통부분은 $-2<x<6$

(2) $|2x-3|\ge 5$이면

$2x-3\le -5$ 또는 $2x-3\ge 5$

따라서 $x\le -1$ 또는 $x\ge 4$

답 (1) $-2<x<6$ (2) $x\le -1$ 또는 $x\ge 4$

문제 4 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x+3|<7$ (2) $|x-6|>2$

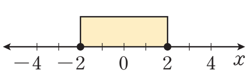
(3) $|2x-1|\le 3$ (4) $|3x-4|\ge 5$

92

생각 열기

| 지도 방향 | 절댓값의 뜻과 모든 실수는 수직선 위의 점으로 나타낼 수 있음을 이용하여 $|x|=2$와 $|x|\le 2$를 만족시키는 실수 x의 값과 그 범위를 수직선 위에 나타내어 보게 한다.

❶ 2, -2

❷ 

내용 연구

❷ 절댓값의 뜻을 이용하여 부등식을 만족시키는 실수의 범위를 수직선 위에 나타내는 방법을 알게 한다.
수직선 위의 점 P(x)에 대하여 $|x|$는 원점과 점 P 사이의 거리를 나타내므로 $|x|<a$를 만족시키는 x의 값을 수직선 위에 나타내면 원점으로부터의 거리가 a보다 작은 범위를 나타낸다. 또, $|x|>a$를 만족시키는 x의 값을 수직선 위에 나타내면 원점으로부터의 거리가 a보다 큰 범위를 나타낸다.

❸ 절댓값 기호를 포함한 식을 절댓값 기호를 포함하지 않은 식으로 바꿀 때, 부호가 바뀌거나 바뀌지 않는 이유를 이해하고 부등식의 해를 구할 수 있게 한다.

❹ 수직선 위에서 •은 그 점에 대응하는 수가 부등식의 범위에 포함되고, ◦은 그 점에 대응하는 수가 부등식의 범위에 포함되지 않음을 나타냄을 알게 한다.

문제 풀이

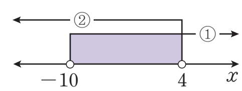
문제 4

| 주안점 | 절댓값 기호를 1개 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $|x+3|<7$이면 $-7<x+3<7$

$-7<x+3$에서 $x>-10$ ……①

$x+3<7$에서 $x<4$ ……②



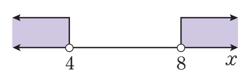
①, ②의 공통부분은 $-10<x<4$

(2) $|x-6|>2$이면

$x-6<-2$ 또는 $x-6>2$

$x-6<-2$에서 $x<4$

$x-6>2$에서 $x>8$

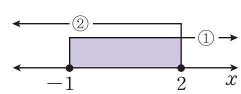


따라서 $x<4$ 또는 $x>8$

(3) $|2x-1|\le 3$이면 $-3\le 2x-1\le 3$

$-3\le 2x-1$에서 $x\ge -1$ ……①

$2x-1\le 3$에서 $x\le 2$ ……②



①, ②의 공통부분은 $-1\le x\le 2$

(4) $|3x-4|\ge 5$이면

$3x-4\le -5$ 또는 $3x-4\ge 5$

$3x-4\le -5$에서 $x\le -\frac{1}{3}$

$3x-4\ge 5$에서 $x\ge 3$

따라서 $x\le -\frac{1}{3}$ 또는 $x\ge 3$

답 (1) $-10<x<4$ (2) $x<4$ 또는 $x>8$
(3) $-1\le x\le 2$ (4) $x\le -\frac{1}{3}$ 또는 $x\ge 3$

절댓값 기호를 포함한 부등식은 미지수의 값의 범위에 따라 절댓값 기호를 포함하지 않은 식으로 고쳐서 풀 수 있다.

1 **예제 5** 부등식 $|x|+|x-3|\le 7$을 푸시오.

풀이 주어진 부등식에서

$$|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases},\quad |x-3|=\begin{cases} x-3 & (x\ge 3) \\ -(x-3) & (x<3) \end{cases}$$

이므로 x의 값의 범위를 $x<0$, $0\le x<3$, $x\ge 3$의 세 경우로 나누어서 푼다.

(i) $x<0$일 때,

$-x-(x-3)\le 7$에서 $\quad -2x+3\le 7,\quad x\ge -2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -2\le x<0 \quad \cdots\cdots$ ①

(ii) $0\le x<3$일 때,

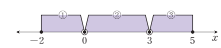
$x-(x-3)\le 7$에서 $3\le 7$이므로 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립한다.

따라서 $\quad 0\le x<3 \quad \cdots\cdots$ ②

(iii) $x\ge 3$일 때,

$x+(x-3)\le 7$에서 $\quad 2x-3\le 7,\quad x\le 5$

그런데 $x\ge 3$이므로 $\quad 3\le x\le 5 \quad \cdots\cdots$ ③



①, ②, ③에서 $\quad -2\le x\le 5$

답 $-2\le x\le 5$

문제 5 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x|+|x-2|\le 4$ (2) $|x+2|+|2x-3|>10$

나노미터(nm)는 빛의 파장같이 짧은 길이를 나타내는 단위로 1나노미터는 1미터의 10억분의 1이다.

문제 6 오른쪽 표는 금속의 불꽃 반응에서 금속이 방출하는 빛의 파장에 따른 불꽃색을 나타낸 것이다. 칼슘(Ca)이 불꽃 반응에서 방출하는 빛의 파장 a nm(나노미터)에 대하여 $|a-600|<10$일 때, 칼슘의 불꽃 반응에서 나타나는 불꽃색을 말하시오.

파장에 따른 불꽃색

파장(nm)	색
$400\le a<450$	보라
$450\le a<500$	파랑
$500\le a<570$	초록
$570\le a<590$	노랑
$590\le a<610$	주황
$610\le a<700$	빨강

93

내용 연구

1 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 기준으로 범위를 나눌 때, 다음을 이용한다.

$$|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\ge a) \\ -(x-a) & (x<a) \end{cases}$$

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | 절댓값 기호를 2개 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $|x|+|x-2|\le 4$에서

$$|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases},$$

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x\ge 2) \\ -(x-2) & (x<2) \end{cases}$$

이므로 x의 값의 범위를 다음과 같이 세 경우로 나누어서 푼다.

(i) $x<0$일 때,

$-x-(x-2)\le 4$에서

$-2x+2\le 4,\quad x\ge -1$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -1\le x<0 \quad \cdots\cdots$ ①

(ii) $0\le x<2$일 때,

$x-(x-2)\le 4$에서 $2\le 4$이므로 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립한다. 즉,

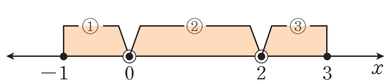
$0\le x<2 \quad \cdots\cdots$ ②

(iii) $x\ge 2$일 때,

$x+(x-2)\le 4$에서

$2x-2\le 4,\quad x\le 3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $\quad 2\le x\le 3 \quad \cdots\cdots$ ③



①, ②, ③에서 $\quad -1\le x\le 3$

(2) $|x+2|+|2x-3|>10$에서

$$|x+2|=\begin{cases} x+2 & (x\ge -2) \\ -(x+2) & (x<-2) \end{cases},$$

$$|2x-3|=\begin{cases} 2x-3 & \left(x\ge \frac{3}{2}\right) \\ -(2x-3) & \left(x<\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

이므로 x의 값의 범위를 다음과 같이 세 경우로 나누어서 푼다.

(i) $x<-2$일 때,

$-(x+2)-(2x-3)>10$에서

$-3x+1>10,\quad x<-3$

그런데 $x<-2$이므로 $\quad x<-3 \quad \cdots\cdots$ ①

(ii) $-2\le x<\frac{3}{2}$일 때,

$(x+2)-(2x-3)>10$에서 $\quad x<-5$

그런데 $-2\le x<\frac{3}{2}$이므로 해는 없다.

(iii) $x\ge \frac{3}{2}$일 때,

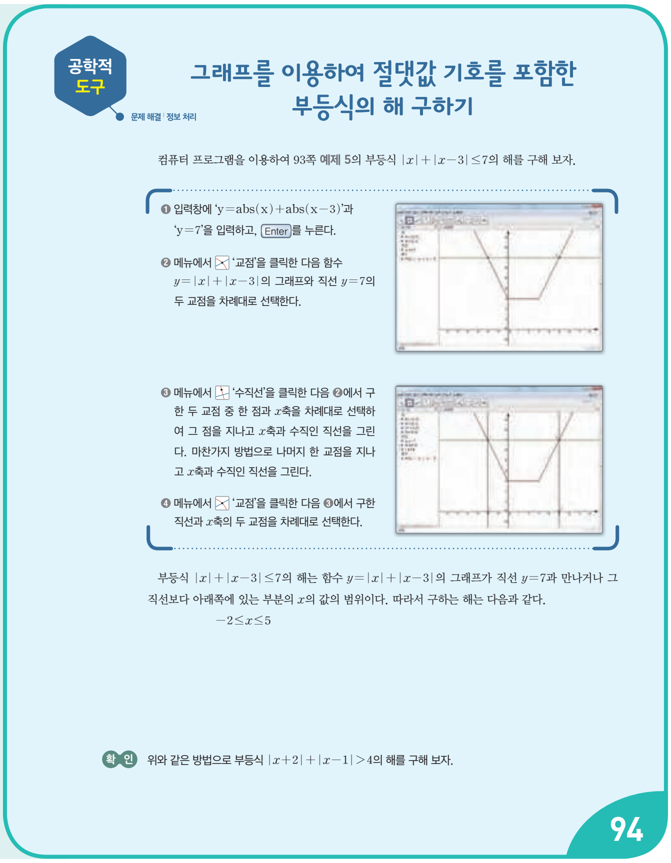
$(x+2)+(2x-3)>10$에서

$3x-1>10,\quad x>\frac{11}{3}$

그런데 $x\ge \frac{3}{2}$이므로 $\quad x>\frac{11}{3} \quad \cdots\cdots$ ②

①, ②에서 $\quad x<-3$ 또는 $x>\frac{11}{3}$

답 (1) $-1\le x\le 3$ (2) $x<-3$ 또는 $x>\frac{11}{3}$



공학적 도구

문제 해결 | 정보 처리

그래프를 이용하여 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해 구하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 93쪽 예제 5의 부등식 $|x|+|x-3|\le 7$의 해를 구해 보자.

❶ 입력창에 'y=abs(x)+abs(x−3)'과 'y=7'을 입력하고, Enter를 누른다.

❷ 메뉴에서 '교점'을 클릭한 다음 함수 $y=|x|+|x-3|$의 그래프와 직선 $y=7$의 두 교점을 차례대로 선택한다.

❸ 메뉴에서 '수직선'을 클릭한 다음 ❷에서 구한 두 교점 중 한 점과 x축을 차례대로 선택하여 그 점을 지나고 x축과 수직인 직선을 그린다. 마찬가지 방법으로 나머지 한 교점을 지나고 x축과 수직인 직선을 그린다.

❹ 메뉴에서 '교점'을 클릭한 다음 ❸에서 구한 직선과 x축의 두 교점을 차례대로 선택한다.

부등식 $|x|+|x-3|\le 7$의 해는 함수 $y=|x|+|x-3|$의 그래프가 직선 $y=7$과 만나거나 그 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다. 따라서 구하는 해는 다음과 같다.

$-2\le x\le 5$

확인 위와 같은 방법으로 부등식 $|x+2|+|x-1|>4$의 해를 구해 보자.

94

문제 6

| 주안점 | 절댓값 기호를 포함한 일차부등식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | $|a-600|<10$이면

$-10<a-600<10$

$-10<a-600$에서 $\quad a>590$

$a-600<10$에서 $\quad a<610$

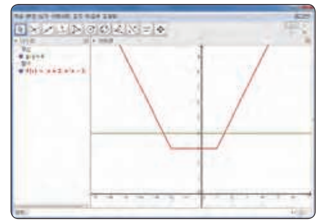
즉, $590<a<610$이므로 불꽃색은 주황이다.

답 주황

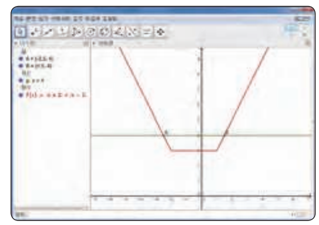
공학적 도구 그래프를 이용하여 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해 구하기

| 지도 방향 | 컴퓨터 프로그램을 이용하여 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | ❶ 입력창에 'y=abs(x+2)+abs(x−1)'과 'y=4'를 입력하고, Enter를 누른다.

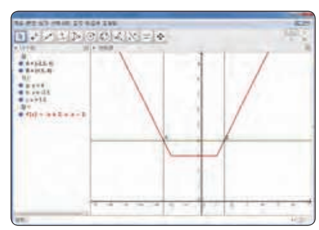


❷ 메뉴에서 '교점'을 클릭한 다음 함수 $y=|x+2|+|x-1|$의 그래프와 직선 $y=4$의 두 교점을 차례대로 선택한다.

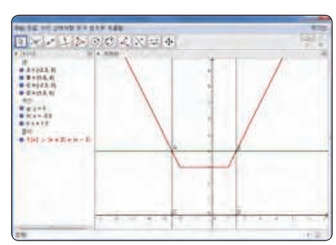


❸ 메뉴에서 '수직선'을 클릭한 다음 ❷에서 구한 두 교점 중 한 점과 x축을 차례대로 선택하여 그 점을 지나고 x축과 수직인 직선을 그린다.

마찬가지 방법으로 나머지 한 교점을 지나고 x축과 수직인 직선을 그린다.



❹ 메뉴에서 '교점'을 클릭한 다음 ❸에서 구한 직선과 x축의 두 교점을 차례대로 선택한다.



부등식 $|x+2|+|x-1|>4$의 해는 함수 $y=|x+2|+|x-1|$의 그래프가 직선 $y=4$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

따라서 구하는 해는 $\quad x<-\frac{5}{2}$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

답 $x<-\frac{5}{2}$ 또는 $x>\frac{3}{2}$

소단원 지도 개관

지도 목표

① 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하게 한다.
② 이차부등식을 풀 수 있게 한다.
③ 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.
④ 연립이차부등식의 활용 문제를 해결할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 이차부등식의 개념을 정확하게 이해할 수 있게 한다.
② 이차부등식의 해는 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계에 따라 달라짐을 강조한다.
③ 이차부등식의 해가 없는 경우와 해가 모든 실수인 경우를 이차함수의 그래프를 이용하여 이해하게 한다.
④ 연립이차부등식의 개념을 정확하게 이해할 수 있게 한다.
⑤ 두 개 이상의 부등식을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 수직선을 이용하여 구할 수 있게 한다.

준비하기

|주안점| 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 조사할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 판별식 D가

$$D=1^2-4\times1\times(-2)=9>0$$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $-x^2+2x-1=0$의 판별식 D가

$$D=2^2-4\times(-1)\times(-1)=0$$

이므로 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) 이차방정식 $x^2+3x+7=0$의 판별식 D가

$$D=3^2-4\times1\times7=-19<0$$

이므로 만나지 않는다.

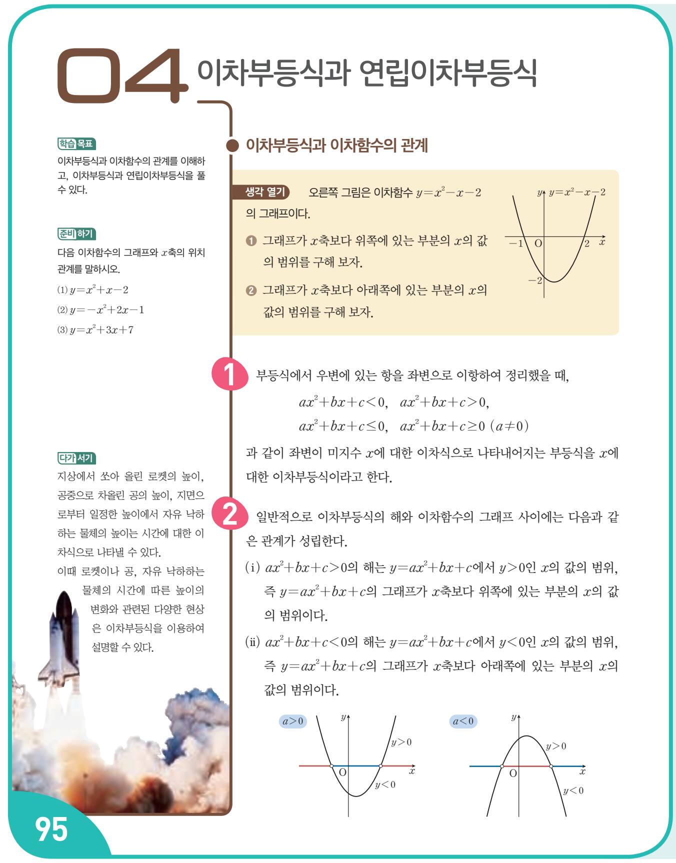
답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 만나지 않는다.

● 이차부등식과 이차함수의 관계

생각 열기

|지도 방향| 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 이차부등식과 이차함수의 관계에 대해 이해하게 한다.

❶ $x<-1$ 또는 $x>2$ ❷ $-1<x<2$



04 이차부등식과 연립이차부등식

학습 목표
이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.

준비하기
다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하시오.
(1) $y=x^2+x-2$
(2) $y=-x^2+2x-1$
(3) $y=x^2+3x+7$

다가서기
지상에서 쏘아 올린 로켓의 높이, 공중으로 차올린 공의 높이, 지면으로부터 일정한 높이에서 자유 낙하하는 물체의 높이는 시간에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.
이때 로켓이나 공, 자유 낙하하는 물체의 시간에 따른 높이의 변화와 관련된 다양한 현상은 이차부등식을 이용하여 설명할 수 있다.

● 이차부등식과 이차함수의 관계

생각 열기 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프이다.
❶ 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구해 보자.
❷ 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구해 보자.

1 부등식에서 우변에 있는 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때,

$$ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c>0,$$
$$ax^2+bx+c\le0,\quad ax^2+bx+c\ge0\ (a\ne0)$$

과 같이 좌변이 미지수 x에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식을 x에 대한 이차부등식이라고 한다.

2 일반적으로 이차부등식의 해와 이차함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.
(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는 $y=ax^2+bx+c$에서 $y>0$인 x의 값의 범위, 즉 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.
(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는 $y=ax^2+bx+c$에서 $y<0$인 x의 값의 범위, 즉 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

95

내용 연구

❶ 이차부등식의 해를 구하는 것을 이차부등식을 푼다라고 하는 것을 알게 한다.

❷ 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해의 관계를 그래프를 이용하여 간단히 언급한다. 예를 들어 **생각 열기**의 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위인 $x<-1$ 또는 $x>2$는 이차부등식 $x^2-x-2>0$의 해이다.
마찬가지로 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위인 $-1<x<2$는 이차부등식 $x^2-x-2<0$의 해이다.

● 이차부등식의 해

평가 기준

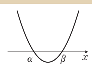
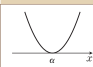
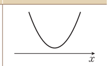
상	이차함수와 이차부등식의 관계를 활용하여 이차부등식과 관련된 실생활 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	이차함수와 이차부등식의 관계를 이용하여 이차부등식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
하	이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있다.

이차부등식의 해

3 이차부등식의 해는 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계로 구할 수 있다.
이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때, 이차부등식의 해는 다음과 같다.

α, β는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해이다.

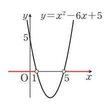
이차부등식의 해 ($a>0$인 경우)

$ax^2+bx+c=0$의 판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq0$의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\leq0$의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

4 한편, $a<0$일 때는 이차부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수를 양수로 바꾸어서 풀면 된다.

5 **예제 1** 이차부등식 $x^2-6x+5>0$을 푸시오.

풀이 이차함수 $y=x^2-6x+5$에서
$y=(x-1)(x-5)$
이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 해는
$x<1$ 또는 $x>5$



답 $x<1$ 또는 $x>5$

문제 1 다음 이차부등식을 푸시오.

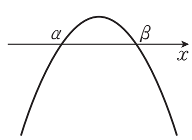
(1) $x^2-x-6<0$　(2) $x^2+2x-15\geq0$
(3) $-3x^2+5x+2<0$　(4) $-2x^2+3x+5\geq0$

96

내용 연구

3 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 이차부등식의 해를 구할 때, 이차방정식의 근을 판별하고 해를 구해야 하므로 먼저 이차방정식의 판별식, 근의 공식, 인수분해를 이용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있는지 확인한다.

4 $a<0$일 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차부등식의 해는 다음과 같다.



(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는　$\alpha<x<\beta$
(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는　$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
(iii) $ax^2+bx+c\geq0$의 해는　$\alpha\leq x\leq\beta$
(iv) $ax^2+bx+c\leq0$의 해는　$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$

따라서 $a<0$일 때도 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 해를 구할 수 있다.

|오개념 바로잡기| $a<0$일 때, 이차부등식의 양변에 -1을 곱하면 부등호의 방향이 반대로 바뀜을 주의한다.

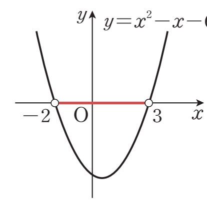
5 이차부등식의 해는 이차방정식의 해와 마찬가지로 인수분해를 이용하여 구한다. 이때 이차식을 인수분해하고 인수의 부호를 조사하여 이차부등식의 해를 구한다.

문제 풀이

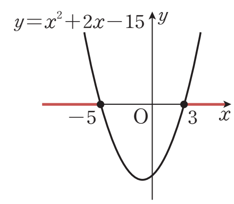
문제 1

|주안점| 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

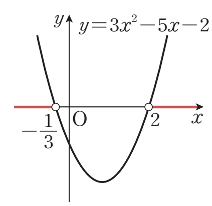
|풀이| (1) 이차함수 $y=x^2-x-6$에서　$y=(x+2)(x-3)$
이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 해는
$-2<x<3$



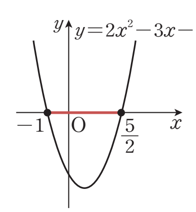
(2) 이차함수 $y=x^2+2x-15$에서　$y=(x+5)(x-3)$
이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 해는
$x\leq-5$ 또는 $x\geq3$



(3) 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하면　$3x^2-5x-2>0$
이차함수 $y=3x^2-5x-2$에서
$y=(3x+1)(x-2)$
이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 해는
$x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>2$



(4) 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하면　$2x^2-3x-5\leq0$
이차함수 $y=2x^2-3x-5\leq0$에서　$y=(2x-5)(x+1)$
이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 해는
$-1\leq x\leq\frac{5}{2}$



답 풀이 참조

문제 풀이

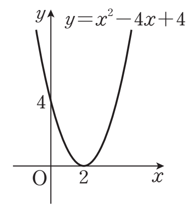
문제 2

| 주안점 | 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 이차함수

$$y=x^2-4x+4=(x-2)^2$$

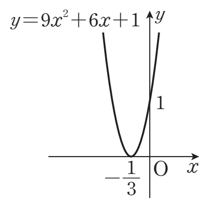
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 $x\neq2$인 모든 실수이다.



(2) 이차함수

$$y=9x^2+6x+1=(3x+1)^2$$

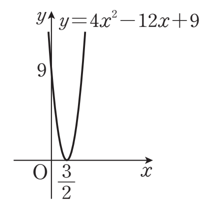
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 $x=-\dfrac{1}{3}$



(3) 이차함수

$$y=4x^2-12x+9$$
$$=(2x-3)^2$$

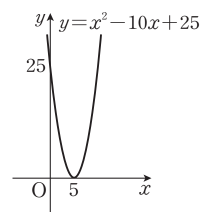
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 모든 실수이다.



(4) 이차함수

$$y=x^2-10+25$$
$$=(x-5)^2$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 없다.



답 (1) $x\neq2$인 모든 실수 (2) $x=-\dfrac{1}{3}$ (3) 모든 실수 (4) 해는 없다.

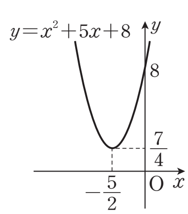
문제 3

| 주안점 | 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 이차함수

$$y=x^2+5x+8$$
$$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

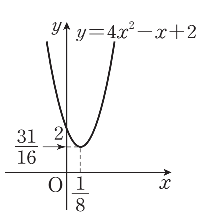
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 모든 실수이다.



(2) 이차함수

$$y=4x^2-x+2$$
$$=4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{31}{16}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 모든 실수이다.




예제 2 이차부등식 $x^2+1<2x$를 푸시오.

풀이 우변을 이항하면 $x^2-2x+1<0$
이차함수 $y=x^2-2x+1$에서
$y=(x-1)^2$
이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 주어진 이차부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

문제 2 다음 이차부등식을 푸시오.
(1) $x^2+4>4x$ (2) $9x^2+6x+1\leq0$
(3) $-4x^2+12x-9\leq0$ (4) $-x^2+10x>25$

예제 3 이차부등식 $x^2+2x+2>0$을 푸시오.

풀이 이차함수 $y=x^2+2x+2$에서
$y=(x+1)^2+1$
이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 주어진 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

답 모든 실수

문제 3 다음 이차부등식을 푸시오.
(1) $x^2+5x+8>0$ (2) $-4x^2+x-2\leq0$
(3) $2x^2+3x+7<0$ (4) $-x^2+2x-2\geq0$

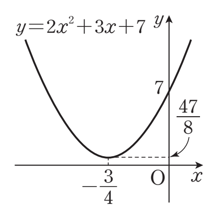
탐구 문제 4 이차부등식 $x^2+2(k+3)x+k+5>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

97

(3) 이차함수

$$y=2x^2+3x+7$$
$$=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{8}$$

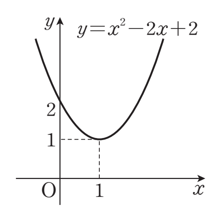
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 없다.



(4) 이차함수

$$y=x^2-2x+2$$
$$=(x-1)^2+1$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 없다.



답 (1) 모든 실수 (2) 모든 실수 (3) 해는 없다. (4) 해는 없다.

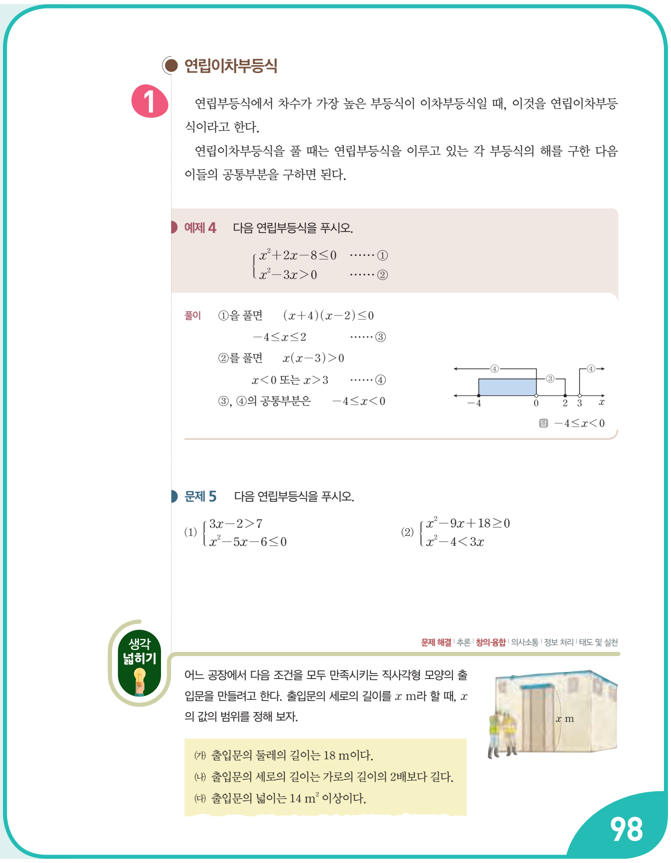
문제 4

| 주안점 | 이차부등식이 모든 실수에 대하여 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 정할 수 있게 한다.

| 풀이 | 이차함수

$$y=x^2+2(k+3)x+k+5$$
$$=\{x+(k+3)\}^2-k^2-5k-4$$

의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 $-k^2-5k-4$이다.


연립이차부등식

1 연립부등식에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이것을 연립이차부등식이라고 한다.

연립이차부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구한 다음 이들의 공통부분을 구하면 된다.

예제 4 다음 연립부등식을 푸시오.

$$\begin{cases} x^2+2x-8\le 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3x>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①을 풀면 $(x+4)(x-2)\le 0$

$-4\le x\le 2$ ······ ③

②를 풀면 $x(x-3)>0$

$x<0$ 또는 $x>3$ ······ ④

③, ④의 공통부분은 $-4\le x<0$

답 $-4\le x<0$

문제 5 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x-2>7 \\ x^2-5x-6\le 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-9x+18\ge 0 \\ x^2-4<3x \end{cases}$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

어느 공장에서 다음 조건을 모두 만족시키는 직사각형 모양의 출입문을 만들려고 한다. 출입문의 세로의 길이를 x m라 할 때, x의 값의 범위를 정해 보자.

(가) 출입문의 둘레의 길이는 18 m이다.
(나) 출입문의 세로의 길이는 가로의 길이의 2배보다 길다.
(다) 출입문의 넓이는 14 m^2 이상이다.

98

따라서 주어진 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$-k^2-5k-4>0,\quad (k+1)(k+4)<0$

이어야 하므로 구하는 k의 값의 범위는

$-4<k<-1$

답 $-4<k<-1$

연립이차부등식

평가 기준

상	연립이차부등식을 활용한 실생활 관련 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	연립이차부등식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
하	연립이차부등식을 풀 수 있다.

내용 연구

1 연립이차부등식은

$\begin{cases} \text{일차부등식} \\ \text{이차부등식} \end{cases},\ \begin{cases} \text{이차부등식} \\ \text{이차부등식} \end{cases}$

중 하나의 꼴임을 알게 한다.

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | 일차부등식과 이차부등식으로 이루어진 연립부등식, 이차부등식과 이차부등식으로 이루어진 연립부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\begin{cases} 3x-2>7 & \cdots\cdots ① \\ x^2-5x-6\le 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

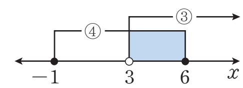
①을 풀면 $3x>9,\quad x>3$ ······ ③

②를 풀면 $(x+1)(x-6)\le 0$

따라서 $-1\le x\le 6$ ······ ④

③, ④의 공통부분은

$3<x\le 6$



(2) $\begin{cases} x^2-9x+18\ge 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-4<3x & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $(x-3)(x-6)\ge 0$

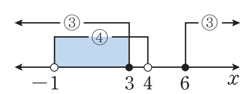
따라서 $x\le 3$ 또는 $x\ge 6$ ······ ③

②를 풀면 $(x+1)(x-4)<0$

따라서 $-1<x<4$ ······ ④

③, ④의 공통부분은

$-1<x\le 3$



답 (1) $3<x\le 6$ (2) $-1<x\le 3$

생각 넓히기

| 지도 방향 | 주어진 조건을 만족시키는 연립이차부등식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 출입문의 세로의 길이는 x m, 둘레의 길이는 18 m이므로 출입문의 가로의 길이는

$\dfrac{18-2x}{2}=9-x\ (\text{m})$

조건 (나)로부터 $x>2(9-x)$ (단, $0<x<9$)

조건 (다)로부터 $x(9-x)\ge 14$

연립이차부등식으로 나타내면

$\begin{cases} x>2(9-x) & \cdots\cdots ① \\ x(9-x)\ge 14 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

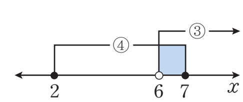
①을 풀면 $3x>18,\quad x>6$ ······ ③

②를 풀면 $(x-2)(x-7)\le 0$

따라서 $2\le x\le 7$ ······ ④

③, ④의 공통부분은

$6<x\le 7$



답 $6<x\le 7$

중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $f(x)=x^3-5x^2-x+5$

라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ & & 1 & -4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-5)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-1)(x-5)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

(2) $x^2=X$로 놓으면 $X^2-3X-4=0$

$(X-4)(X+1)=0$에서

$(x^2-4)(x^2+1)=0,$

$(x+2)(x-2)(x^2+1)=0$

따라서 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm i$

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$
(2) $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm i$

02

| 주안점 | 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ① \\ x^2+xy-y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=3-x$ ...... ③

③을 ②에 대입하면 $(x-2)(x-7)=0$

따라서 $x=2$ 또는 $x=7$

$x=2$를 ③에 대입하면 $y=1$

$x=7$을 ③에 대입하면 $y=-4$

따라서 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=-4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 좌변을 인수분해하면 $(x+2y)(2x-y)=0$

따라서 $x=-2y$ 또는 $y=2x$

(i) $x=-2y$를 ②에 대입하면 $y^2=1,\ y=\pm 1$

$y=-1$일 때 $x=2$, $y=1$일 때 $x=-2$

(ii) $y=2x$를 ②에 대입하면 $x^2=1,\ x=\pm 1$

$x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

답 풀이 참조

II-3. 여러 가지 방정식과 부등식

중단원 마무리하기

삼차방정식과 사차방정식

(1) 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해한 후 방정식의 해를 구한다.

(2) 공통부분이 있으면 그것을 하나의 문자로 치환하여 인수분해한 후 방정식의 해를 구한다.

연립이차방정식

미지수가 2개인 연립이차방정식은 인수분해 등을 이용하여 미지수가 1개인 이차방정식으로 고쳐서 푼다.

연립부등식

(1) 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 **연립부등식**이라 하며, 일차부등식으로 이루어진 연립부등식을 연립일차부등식이라고 한다.

(2) 연립부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구하고, 이들을 한 수직선에 나타내어 그 공통부분을 찾는다.

절댓값 기호를 포함한 일차부등식

$a>0$일 때,

(i) $|x|<a$이면 $-a<x<a$

(ii) $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$

이차부등식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$이

❶ 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$를 가질 때,

(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이다.

(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다.

❷ 중근 α를 가질 때,

(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x\neq\alpha$인 모든 실수이다.

(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

❸ 서로 다른 두 허근을 가질 때,

(i) $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수이다.

(ii) $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

연립이차부등식

연립이차부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구한 다음 이들의 공통부분을 구한다.

99

기본

01 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-5x^2-x+5=0$

(2) $x^4-3x^2-4=0$

02 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+xy-y^2=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

03 다음 연립부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} 3x-4<8 \\ 2x+5\le 3(2x+3) \end{cases}$

(2) $2x-4\le x+1<3x-5$

04 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|3x+1|>5$

(2) $|x-1|+|x-4|\le 6$

05 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2+6x-7<0$

(2) $-2x^2-3x+2\le 0$

06 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x-4\ge 0 \\ 2x^2-13x+11<0 \end{cases}$을 푸시오.

03

| 주안점 | 연립부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $3x-4<8$을 풀면 $x<4$

$2x+5\le 3(2x+3)$을 풀면 $x\ge -1$

따라서 구하는 해는 $-1\le x<4$

(2) $2x-4\le x+1$을 풀면 $x\le 5$

$x+1<3x-5$를 풀면 $x>3$

따라서 구하는 해는 $3<x\le 5$

답 (1) $-1\le x<4$ (2) $3<x\le 5$

04

| 주안점 | 절댓값 기호를 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $|3x+1|>5$이면 $3x+1<-5$ 또는 $3x+1>5$

이므로 $x<-2$ 또는 $x>\dfrac{4}{3}$

(2) $|x-1|+|x-4|\le 6$에서

(i) $x<1$일 때,

$-(x-1)-(x-4)\le 6$에서 $x\ge -\dfrac{1}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $-\dfrac{1}{2}\le x<1$ ...... ①

표 준

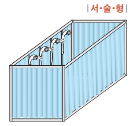
07 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-4=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값과 나머지 두 근을 구하시오.

08 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+x^3+ax^2-9x+b=0$의 두 근이 2, -1일 때, 나머지 두 근 α, β에 대하여 $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

09 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 2ω가 되도록 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

10 어느 해수욕장에서 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이와 높이가 같은 직육면체 모양의 간이 샤워실을 만들려고 한다. 직육면체의 모서리에 사용될 쇠막대의 길이의 합은 56 m이고, 옆의 네 면에 사용될 천의 넓이의 합은 66 m^2일 때, 간이 샤워실의 가로와 세로의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



11 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x+y=-3 \end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y가 연립방정식 $\begin{cases} ay+bx=1 \\ xy=-4 \end{cases}$를 만족시킬 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b+x+y$의 값을 구하시오. (단, $a>b$)

100

(ii) $1\le x<4$일 때,

$(x-1)-(x-4)\le 6$에서 $3\le 6$이므로 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립한다. 즉,

$1\le x<4$ ...... ②

(iii) $x\ge 4$일 때,

$(x-1)+(x-4)\le 6$에서 $\quad x\le \dfrac{11}{2}$

그런데 $x\ge 4$이므로 $\quad 4\le x\le \dfrac{11}{2}$ ...... ③

①, ②, ③에서 $\quad -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{11}{2}$

답 (1) $x<-2$ 또는 $x>\dfrac{4}{3}$ (2) $-\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{11}{2}$

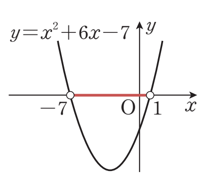
05

| 주안점 | 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 이차함수

$y=x^2+6x-7$
$=(x+7)(x-1)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는

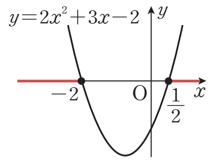


$-7<x<1$

(2) 이차함수

$y=2x^2+3x-2$
$=(2x-1)(x+2)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는



$x\le -2$ 또는 $x\ge \dfrac{1}{2}$

답 (1) $-7<x<1$ (2) $x\le -2$ 또는 $x\ge \dfrac{1}{2}$

06

| 주안점 | 연립부등식을 풀 수 있게 한다.

| 풀이 | $x^2-3x-4\ge 0$을 풀면 $\quad (x-4)(x+1)\ge 0$

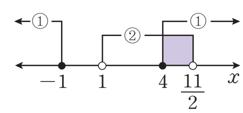
따라서 $\quad x\le -1$ 또는 $x\ge 4$ ...... ①

$2x^2-13x+11<0$을 풀면 $\quad (2x-11)(x-1)<0$

따라서 $\quad 1<x<\dfrac{11}{2}$ ...... ②

①, ②의 공통부분은

$4\le x<\dfrac{11}{2}$



답 $4\le x<\dfrac{11}{2}$

07

| 주안점 | 삼차방정식의 한 허근을 알 때, 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 실수의 값을 정하고 나머지 두 근을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $x=1+i$를 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$(-6+b)+(2+2a+b)i=0$

따라서 $a=-4$, $b=6$이므로

$x^3-4x^2+6x-4=0$

조립제법을 이용하여 위의 식의 좌변을 인수분해하면

2	1	-4	6	-4
		2	-4	4
	1	-2	2	0

$(x-2)(x^2-2x+2)=0$

$x=2$ 또는 $x=1\pm i$이므로 나머지 두 근은 $\quad 2,\ 1-i$

답 $a=-4$, $b=6$, 나머지 두 근: 2, $1-i$

08

| 주안점 | 사차방정식의 두 실근이 주어졌을 때, 미정계수를 정하고 나머지 두 근을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $x=2$, $x=-1$을 주어진 방정식에 각각 대입하면

$4a+b=-6,\quad a+b=-9$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=-10$

따라서 $\quad x^4+x^3+x^2-9x-10=0$

조립제법을 이용하여 위의 식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 & -9 & -10 \\ & & 2 & 6 & 14 & 10 \\ \hline -1 & 1 & 3 & 7 & 5 & 0 \\ & & -1 & -2 & -5 & \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 & \end{array}$$

$(x-2)(x+1)(x^2+2x+5)=0$

나머지 두 근 α, β는 $x^2+2x+5=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=5$

따라서 구하는 값은

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-6$ 답 -6

09

| 주안점 | 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $x^3-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 해이므로 $\omega^2+\omega+1=0$, 즉

$\omega^2=-\omega-1$ …… ①

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 2ω이므로

$(2\omega)^2-a(2\omega)+b=0$, $4\omega^2-2a\omega+b=0$

①을 위의 식에 대입하면

$4(-\omega-1)-2a\omega+b=0$

즉, $2(a+2)\omega+4-b=0$

ω는 허수이므로 $a=-2$, $b=4$

따라서 구하는 값은 $a+b=2$ 답 2

10

| 주안점 | 주어진 조건을 만족시키는 연립방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

문제 이해 가로와 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$\begin{cases} 8x+4y=56 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2+2xy=66 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ ▶ 20 %

해결 과정 ①에서 $y=14-2x$ …… ③

③을 ②에 대입하면

$x^2-14x+33=0$, $(x-3)(x-11)=0$

따라서 $x=3$ 또는 $x=11$

$x=3$을 ③에 대입하면 $y=8$

$x=11$을 ③에 대입하면 $y=-8$ ▶ 60 %

답 구하기 $y>0$이므로 $x=3$, $y=8$

즉, 가로의 길이는 3 m, 세로의 길이는 8 m이다. ▶ 20 %

12 어느 문화 센터에서 한 달 수강료를 x % 인상하면 회원 수는 $0.5x$ % 감소한다고 한다. 이 문화 센터의 한 달 수입이 8 % 이상 증가하도록 하는 x의 최솟값을 구하시오.

| 서·술·형 |

13 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x-3\le 0 \\ (x-a)(x-2)>0 \end{cases}$의 해가 $2<x\le 3$이 되도록 실수 a의 값의 범위를 정하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발 전

14 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 -1이고, 나머지 두 근의 제곱의 합이 6일 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

15 연립방정식 $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2+3xy+2y^2=5 \end{cases}$를 만족시키는 x, y에 대하여 xy의 최댓값을 구하시오.

사고력

16 실수 x, $x+1$, $x+2$가 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되도록 x의 값의 범위를 정하시오.

101

11

| 주안점 | 연립이차방정식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 주어진 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+y=-3 & \cdots\cdots ① \\ xy=-4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$의 해와 같다.

①에서 $y=-x-3$ …… ③

③을 ②에 대입하면

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

따라서 $x=-4$ 또는 $x=1$

$x=-4$와 $x=1$을 ③에 각각 대입하면

$\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

즉, $a=x^2+y^2=17$

$a=17$을 $ay+bx=1$에 대입하면 $17y+bx=1$

(i) $x=-4$, $y=1$일 때, $b=4$

(ii) $x=1$, $y=-4$일 때, $b=69$

이때 $a>b$이므로 $a=17$, $b=4$

(i)이 주어진 조건을 만족시키는 경우이므로 구하는 값은

$a+b+x+y=18$ 답 18

12

| 주안점 | 이차부등식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 한 달 수강료를 a원, 회원수를 b명이라 하면 현재 수입은 ab원이므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)b\left(1-\frac{x}{200}\right)\geq ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$$

위의 식을 전개하여 정리하면

$$x^2-100x+1600\leq 0$$

$(x-20)(x-80)\leq 0$에서

$$20\leq x\leq 80$$

따라서 x의 최솟값은 20이다. 답 20

13

| 주안점 | 주어진 연립부등식의 해를 이용하여 실수 a의 값의 범위를 정할 수 있게 한다.

해결 과정 $\begin{cases} x^2-2x-3\leq 0 & \cdots\cdots ① \\ (x-a)(x-2)>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 $(x+1)(x-3)\leq 0$

즉, $-1\leq x\leq 3$ ▶ 20 %

$-1\leq x\leq 3$일 때 부등식 ②의 해는 다음과 같다.

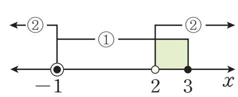
(i) $a>2$일 때,

$x<2$ 또는 $x>a$

이므로 연립부등식의 해가 $2<x\leq 3$이 될 수 없다.

(ii) $a<2$일 때,

$x<a$ 또는 $x>2$



▶ 50 %

답 구하기 따라서 연립부등식의 해가 $2<x\leq 3$이 되도록 하려면 $a\leq -1$이어야 한다. ▶ 30 %

14

| 주안점 | 삼차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 미정계수를 정하고 나머지 두 근을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $x=-1$을 $x^3+ax^2+bx-3=0$에 대입하면

$-1+a-b-3=0,\quad b=a-4 \quad \cdots\cdots ①$

①을 주어진 삼차방정식에 대입하면

$$\begin{aligned} & x^3+ax^2+bx-3 \\ &= x^3+ax^2+(a-4)x-3 \\ &= (x+1)\{x^2+(a-1)x-3\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

나머지 두 근을 각각 α, β라 하면 근과 계수의 관계로부터

$$\alpha+\beta=-(a-1),\quad \alpha\beta=-3$$

두 근의 제곱의 합이 6이므로

$$\begin{aligned} 6 &= \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= (a-1)^2+6 \end{aligned}$$

따라서 $(a-1)^2=0,\quad a=1$

$a=1$을 ①에 대입하면 $b=-3$이므로 구하는 값은

$$a^2+b^2=10$$

답 10

15

| 주안점 | 연립이차방정식을 풀고, 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+3xy+2y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-3y)=0$

따라서 $x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ②에 대입하면

$$y^2+3y^2+2y^2=5,\quad y^2=\frac{5}{6}$$

이때 $xy=y^2=\dfrac{5}{6}$

(ii) $x=3y$를 ②에 대입하면

$$9y^2+9y^2+2y^2=5,\quad y^2=\frac{1}{4}$$

이때 $xy=3y^2=\dfrac{3}{4}$

(i), (ii)에서 xy의 최댓값은 $\dfrac{5}{6}$ 답 $\dfrac{5}{6}$

16

| 주안점 | 연립부등식을 활용하여 삼각형의 세 변의 길이와 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 세 실수 x, $x+1$, $x+2$가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면

$x+(x+1)>x+2$에서

$x>1 \quad \cdots\cdots ①$

이 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하려면

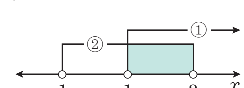
$x^2+(x+1)^2<(x+2)^2$에서

$(x+1)(x-3)<0$

따라서 $-1<x<3 \quad \cdots\cdots ②$

①, ②의 공통부분은

$1<x<3$



답 $1<x<3$

대단원 평가하기

01

| 평가 목표 | 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $(2x-y)+(-3x+y)i=5-2i$에서

$$2x-y=5,\ -3x+y=-2$$

위의 식을 연립하여 풀면 $\quad x=-3,\ y=-11$

따라서 구하는 값은 $\quad xy=33$ 　　답 33

02

| 평가 목표 | 복소수와 켤레복소수의 사칙연산을 할 수 있다.

| 풀이 | $zw=(3-2i)(4+i)=14-5i$

$$\bar{z}w=(3+2i)(4+i)=10+11i$$

$$z\bar{w}=(3-2i)(4-i)=10-11i$$

$$\bar{z}\,\bar{w}=\overline{zw}=\overline{14-5i}=14+5i$$

따라서 $\quad zw+\bar{z}w+z\bar{w}+\bar{z}\,\bar{w}=48$ 　　답 ③

03

| 평가 목표 | 복소수와 켤레복소수의 사칙연산을 할 수 있다.

| 풀이 | $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3+i}=\dfrac{3-i}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{10}i$

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{3-i}=\frac{3+i}{(3-i)(3+i)}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

따라서 $\quad \left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}\right)^2=\left(-\dfrac{1}{5}i\right)^2=-\dfrac{1}{25}$ 　　답 $-\dfrac{1}{25}$

04

| 평가 목표 | 복소수의 제곱이 음의 실수가 되는 조건을 만족시키는 실수 x의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | z^2이 음의 실수이려면 z의 실수부분이 0이어야 하므로 $z=(x-3)+(x-2)i$에서

$$x-3=0,\quad x=3$$

답 3

05

| 평가 목표 | 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | 주어진 이차방정식의 판별식 D가 $D>0$이어야 하므로

$$D=\{2(k-1)\}^2-4\times1\times(k^2-20)$$

$$=-8k+84>0$$

즉, $k<\dfrac{21}{2}$이므로 자연수 k의 개수는 10이다. 　　답 ③

II 대단원 평가하기

하 중 상

01
등식 $(2-3i)x-(1-i)y=5-2i$를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

02
두 복소수 $z=3-2i$, $w=4+i$에 대하여
$zw+\bar{z}w+z\bar{w}+\bar{z}\,\bar{w}$의 값은?
(단, $\bar{z}$, $\bar{w}$는 각각 z, w의 켤레복소수이다.)

① 36 　② 42 　③ 48
④ 54 　⑤ 60

03
복소수 $z=3+i$에 대하여 $\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}\right)^2$의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

04
복소수 $z=(1+i)x-(3+2i)$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하시오.

05
x에 대한 이차방정식
$x^2+2(k-1)x+k^2-20=0$
이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 6 　② 8 　③ 10
④ 12 　⑤ 14

06
x에 대한 이차방정식
$x^2-2(m+a)x+m^2-2m+a^2=0$
이 실수 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 구하시오.

07
x에 대한 이차방정식
$x^2+2(a+c)x+(b+c)^2=0$
이 중근을 가질 때, 실수 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

102

06

| 평가 목표 | 이차방정식이 중근을 가질 조건과 항등식의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | 주어진 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=\{-2(m+a)\}^2-4\times1\times(m^2-2m+a^2)$$

$$=8m(a+1)=0$$

따라서 $\quad a=-1$ 　　답 -1

07

| 평가 목표 | 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | 주어진 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=\{2(a+c)\}^2-4\times1\times(b+c)^2$$

$$=4\{a^2-b^2+2c(a-b)\}$$

$$=4\{(a-b)(a+b+2c)\}=0$$

그런데 $a+b+2c>0$이므로 $\quad a=b$

따라서 실수 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다. 　　답 $a=b$인 이등변삼각형

08

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $2+i$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

09

이차방정식 $x^2-2x-7=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{14}$의 값을 구하시오.

10

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 -1, 3일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

11

이차함수 $y=kx^2-x+k-1$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

12

이차함수 $y=x^2+2ax+b$의 그래프가 x축과 직선 $y=2x+1$에 동시에 접할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

13

$1\le x\le 3$일 때, 이차함수 $y=ax^2-8ax-b$의 최댓값이 2, 최솟값이 -6이다. 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오. (단, $a<0$)

14

삼차방정식 $x^3+x^2+ax=0$의 0이 아닌 두 근 α, β에 대하여 $\alpha-\beta=5$일 때, 실수 a의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

103

08

| 평가 목표 | 이차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 미정계수를 정하고 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 1 | $x=2+i$를 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$$(3-2a+b)+(4-a)i=0$$

따라서 $a=4$, $b=5$이므로 $\quad a+b=9$ 답 ①

| 풀이 2 | 주어진 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $2-i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$a=(2+i)+(2-i)=4,\quad b=(2+i)(2-i)=5$$

따라서 구하는 값은 $\quad a+b=9$

09

| 평가 목표 | 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | 근과 계수의 관계로부터

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-7$이므로 구하는 값은

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{14}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{14}$$
$$=-\frac{2}{7}-1=-\frac{9}{7}$$

답 $-\frac{9}{7}$

10

| 평가 목표 | 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 이차방정식의 실근과 같음을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 3이므로 $x=-1$, $x=3$을 위의 방정식에 각각 대입하여 정리하면

$$a-b=2,\quad 3a+b=-18$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-4$, $b=-6$

따라서 구하는 값은 $\quad ab=24$ 답 24

11

| 평가 목표 | 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.

| 풀이 | $kx^2-2x+k-2=0 \quad \cdots\cdots$ ①

이차방정식 ①의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=(-2)^2-4\times k\times(k-2)$$
$$=-4k^2+8k+4=0$$

근과 계수의 관계로부터 모든 k의 값의 합은 2이다. 답 2

12

| 평가 목표 | 이차함수의 그래프와 x축 및 직선의 위치 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $x^2+2ax+b=0$의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로 $D=4a^2-4b=0$에서 $\quad b=a^2 \quad \cdots\cdots$ ①

또, $x^2+2(a-1)x+b-1=0$의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=\{2(a-1)\}^2-4\times1\times(b-1)$$
$$=4a^2-8a-4b+8=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①을 ②에 대입하면 $\quad -8a+8=0$, $\quad a=1$

$a=1$, $b=1$이므로 $\quad a+b=2$ 답 2

13

| 평가 목표 | x의 값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $y=ax^2-8ax-b$

$$=a(x-4)^2-16a-b$$

$a<0$에서 $x=1$일 때 최솟값 -6을 갖고, $x=3$일 때 최댓값 2를 가지므로

$$-7a-b=-6,\quad -15a-b=2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1$, $b=13$

따라서 구하는 값은 $\quad b-a=14$ 답 14

14

|평가 목표| 삼차방정식의 근이 만족시키는 조건을 이용하여 실수 a의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $x^3+x^2+ax=x(x^2+x+a)=0$에서

$x^2+x+a=0$의 두 근이 α, β이므로

$$\alpha+\beta=-1, \quad \alpha\beta=a$$

따라서 $\quad (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4a$

이때 $\alpha-\beta=5$이므로

$$25=1-4a, \quad a=-6$$

답 ③

15

|평가 목표| 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 할 수 있다.

|풀이| $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\omega^3+3\omega^2+\omega=\omega(\omega^2+\omega+1)+2\omega^2=2\omega^2$$

따라서 $\quad \dfrac{2}{\omega^3+3\omega^2+\omega}=\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega}{\omega^3}=\omega$

답 ②

16

|평가 목표| 사차방정식의 두 근이 주어졌을 때, 나머지 두 근의 합을 구할 수 있다.

|풀이| $x=-1$과 $x=1$을 주어진 방정식에 각각 대입하면

$b-10=0$에서 $\quad b=10$

$2a+b+12=2a+22=0$에서 $\quad a=-11$

따라서 $f(x)=x^4-11x^3-11x^2+11x+10$이라 하면

$x-1$, $x+1$은 $f(x)$의 인수이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -11 & -11 & 11 & 10 \\
 & & 1 & -10 & -21 & -10 \\
\hline
-1 & 1 & -10 & -21 & -10 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 11 & 10 & \\
\hline
 & 1 & -11 & -10 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-11x-10)$$

따라서 나머지 두 근은 $x^2-11x-10=0$의 근이므로 근과 계수의 관계로부터 두 근의 합은 11이다.

답 11

17

|평가 목표| 연립방정식의 해가 만족시키는 조건을 이용하여 실수 a의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $\begin{cases} x-2y=3 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=a & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 $\quad x=2y+3 \quad \cdots\cdots ③$

II 대단원 평가하기

15 ●●●

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\dfrac{2}{\omega^3+3\omega^2+\omega}$를 간단히 하면?

① 1 ② ω ③ $-\omega$

④ $\dfrac{1}{\omega}$ ⑤ $-\dfrac{1}{\omega}$

16 ●●●

사차방정식

$$x^4+ax^3+ax^2+11x+b=0$$

의 두 근이 -1, 1일 때, 나머지 두 근의 합을 구하시오.

17 ●●●

다음 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 실수 a의 값은?

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

① $\dfrac{2}{5}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{7}{5}$

④ $\dfrac{9}{5}$ ⑤ $\dfrac{11}{5}$

18 ●●●

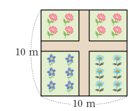
부등식 $2|x+1|-3|x-2|\ge1$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

19 ●●●

이차부등식 $ax^2+2x+a-4>0$의 해가 없도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오.

20 ●●●

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 10 m인 정사각형 모양의 땅에 일정한 폭의 길을 만들었다. 꽃밭의 넓이가 64 m^2 이상이 되도록 할 때, 길의 폭의 범위를 정하시오.



21 ●●●

다음 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

$$\begin{cases} |2x-1|>1 \\ 2x^2-11x+5\le0 \end{cases}$$

104

③을 ②에 대입하여 정리하면

$$5y^2+12y+9-a=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$D=12^2-4\times5\times(9-a)=-36+20a=0$$

따라서 $\quad a=\dfrac{9}{5}$

답 ④

18

|평가 목표| 절댓값 기호를 2개 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

|풀이| $2|x+1|-3|x-2|\ge1$에서

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & (x\ge-1) \\ -(x+1) & (x<-1) \end{cases},$$

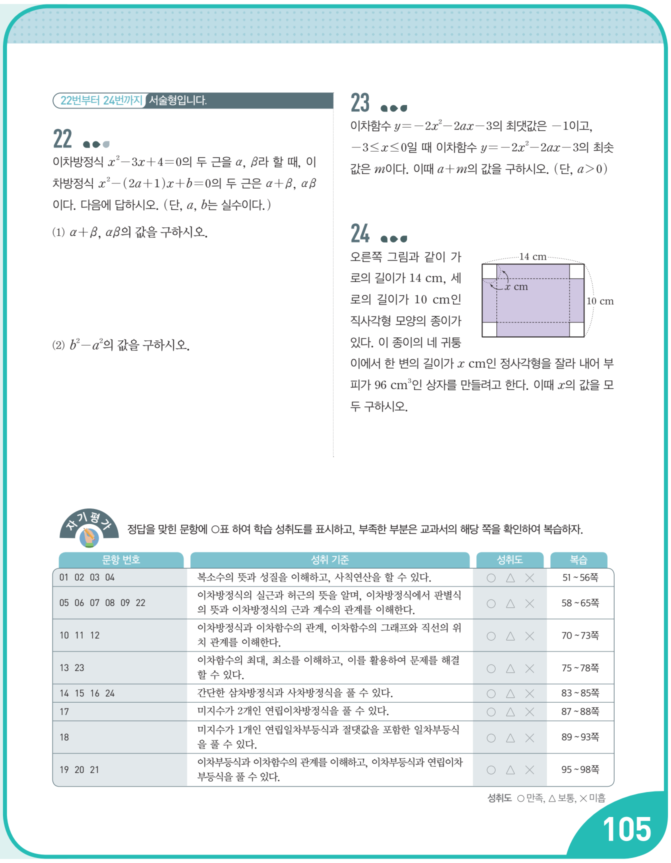
$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x\ge2) \\ -(x-2) & (x<2) \end{cases}$$

이므로 x의 값의 범위를 다음과 같이 세 경우로 나누어서 푼다.

(i) $x<-1$일 때,

$-2(x+1)+3(x-2)\ge1$에서 $\quad x\ge9$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다. $\quad \cdots\cdots ①$



22번부터 24번까지 서술형입니다.

22

이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차방정식 $x^2-(2a+1)x+b=0$의 두 근은 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이다. 다음에 답하시오. (단, a, b는 실수이다.)

(1) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

(2) b^2-a^2의 값을 구하시오.

23

이차함수 $y=-2x^2-2ax-3$의 최댓값은 -1이고, $-3\le x\le 0$일 때 이차함수 $y=-2x^2-2ax-3$의 최솟값은 m이다. 이때 $a+m$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

24

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 14 cm, 세로의 길이가 10 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 x cm인 정사각형을 잘라 내어 부피가 96 cm^{3}인 상자를 만들려고 한다. 이때 x의 값을 모두 구하시오.

자기평가 정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02 03 04	복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙연산을 할 수 있다.	○ △ ×	51~56쪽
05 06 07 08 09 22	이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알며, 이차방정식에서 판별식의 뜻과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.	○ △ ×	58~65쪽
10 11 12	이차방정식과 이차함수의 관계, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.	○ △ ×	70~73쪽
13 23	이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	75~78쪽
14 15 16 24	간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.	○ △ ×	83~85쪽
17	미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.	○ △ ×	87~88쪽
18	미지수가 1개인 연립일차부등식과 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.	○ △ ×	89~93쪽
19 20 21	이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.	○ △ ×	95~98쪽

성취도 ○만족, △보통, ×미흡

105

(ii) $-1\le x<2$일 때,

$2(x+1)+3(x-2)\ge 1$에서 $\quad x\ge 1$

그런데 $-1\le x<2$이므로

$1\le x<2 \quad \cdots\cdots$ ②

(iii) $x\ge 2$일 때,

$2(x+1)-3(x-2)\ge 1$에서 $\quad x\le 7$

그런데 $x\ge 2$이므로

$2\le x\le 7 \quad \cdots\cdots$ ③

①, ②, ③에서 $1\le x\le 7$이므로 정수 x의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7이다. 답 7

19

|평가 목표| 주어진 이차부등식의 해의 조건을 이용하여 실수 a의 값의 범위를 정할 수 있다.

|풀이| 이차방정식 $ax^2+2x+a-4=0$의 판별식 D가 $D\le 0$이어야 하므로

$$D=2^2-4\times a\times(a-4)=-4a^2+16a+4\le 0$$

따라서 $\quad a\le 2-\sqrt{5}$ 또는 $a\ge 2+\sqrt{5}$

이때 $a<0$이어야 하므로

$a\le 2-\sqrt{5}$ 답 $a\le 2-\sqrt{5}$

20

|평가 목표| 연립부등식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

|풀이| 길의 폭을 x m라 하면 꽃밭의 넓이는

$(10^2-10\times x\times 2+x^2)$ m^2

꽃밭의 넓이가 64 m^2 이상이어야 하므로

$10^2-10\times x\times 2+x^2\ge 64$

에서 $\quad x^2-20x+36=(x-2)(x-18)\ge 0$

따라서 $\quad x\le 2$ 또는 $x\ge 18$

그런데 $0<x<10$이어야 하므로

$0<x\le 2$

즉, 길의 폭은 0 m 초과 2 m 이하이어야 한다.

답 0 m 초과 2 m 이하

21

|평가 목표| 연립부등식의 해를 구하고, 문제를 해결할 수 있다.

|풀이| $|2x-1|>1$이면

$2x-1<-1$ 또는 $2x-1>1$

따라서 $\quad x<0$ 또는 $x>1 \quad \cdots\cdots$ ①

$2x^2-11x+5\le 0$에서

$(2x-1)(x-5)\le 0,\ \frac{1}{2}\le x\le 5 \quad \cdots\cdots$ ②

①, ②의 공통부분은 $\quad 1<x\le 5$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$2+3+4+5=14$

답 14

22

|평가 목표| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

|풀이| (1) 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계로부터

$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=4$ ▶ 30 %

(2) 이차방정식 $x^2-(2a+1)x+b=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계로부터

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=2a+1$에서

$2a+1=7,\quad a=3$

$(\alpha+\beta)\alpha\beta=b$에서

$b=12$ ▶ 40 %

따라서 구하는 값은

$b^2-a^2=135$ ▶ 30 %

23

| 평가 목표 | x의 값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

해결 과정 $y=-2x^2-2ax-3$

$$=-2\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}-3$$

$x=-\frac{a}{2}$일 때, 최댓값은 $\frac{a^2}{2}-3$이므로

$\frac{a^2}{2}-3=-1$에서 $\quad a^2=4$

따라서 $\quad a=\pm 2$

그런데 $a>0$이므로

$a=2$ ▶ 50 %

$a=2$를 주어진 이차함수의 식에 대입하면

$$y=-2x^2-4x-3$$
$$=-2(x+1)^2-1$$

$-3\le x\le 0$에서 $x=-3$일 때, 최솟값은 -9이므로

$m=-9$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 값은

$a+m=-7$ ▶ 20 %

24

| 평가 목표 | 삼차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | 문제 이해 네 귀퉁이를 잘라 내어 만든 상자의 부피가 96 cm^3이므로

$$x(14-2x)(10-2x)=96$$

에서 $\quad x^3-12x^2+35x-24=0\ (0<x<5)$ ▶ 30 %

해결 과정 $f(x)=x^3-12x^2+35x-24$라 하면

$f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -12 & 35 & -24 \\ & & 1 & -11 & 24 \\ \hline & 1 & -11 & 24 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2-11x+24)$$
$$=(x-1)(x-3)(x-8)$$ ▶ 50 %

답 구하기 따라서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=8$

그런데 $0<x<5$이므로

$x=1$ 또는 $x=3$ ▶ 20 %

수학 이야기

이차방정식의 역사

옛날 사람들이 이차방정식을 언제부터 알고 있었으며 어떻게 풀었는지에 대한 정확한 기록은 남아 있지 않지만, 기원전 1800년을 전후해서 이미 간단한 이차방정식을 풀 수 있었던 것으로 짐작된다.

이 무렵 고대 바빌로니아 사람들은 이미 $x^2=2$와 같은 이차방정식을 풀어서

$$\sqrt{2}=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.41421296\cdots$$

과 같이 계산했으며, $c>0$인 경우에 $x^2+bx=c$의 근을

$$x=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$$

와 같이 구했다고 한다.

지금과 같이 완전히 일반적인 경우는 아니지만 이차방정식의 근의 공식을 처음으로 발견한 사람은 인도의 수학자인 브라마굽타(Brahmagupta, 598~665?)인데, 628년에 그가 쓴 『우주의 원리에 의해 계시된 올바른 천문학』이라는 책에서 $ax^2+bx=c$의 근을

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

와 같이 나타내었다.

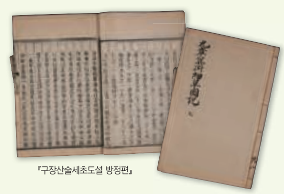
지금과 같은 완전한 근의 공식은 12세기 인도 최고의 수학자였던 바스카라(Bhaskara, A., 1114~1185)에 의하여 완성되었다.

이차방정식의 근의 공식이 서양에 처음 소개된 것은 『측정과 계산에 관하여』라는 책을 통해서였다. 스페인의 유대계 수학자인 사바소르다(Savasorda, 1070~1136?)가 쓴 이 책은 그의 사후인 1145년에 출간되었다.

이와 같이 이차방정식의 근을 구하는 방법은 알고 있었지만, '방정식(方程式, equation)'이라는 용어는 훨씬 후에 등장했는데, 유럽에서는 16세기에 이르러서야 'equation'이라는 용어를 사용했다고 한다.

한편, 중국에서는 기원전 200년경에 제작된 수학책인 『구장산술(九章算術)』에서 이미 '방정(方程)'이라는 용어를 사용했다.

(출처: Katz, V. J., 『A History of Mathematics』)



『구장산술세초도설 방정편』

106

수학 이야기 ▸ 이차방정식의 역사

방정식의 역사가 오래된 만큼 방정식의 형태도 매우 다양하다. 중, 고등학교 교육과정에서 다루는 방정식은 방정식의 개수와 미지수의 개수가 같은 경우이지만 방정식의 개수보다 미지수의 개수가 많은 방정식도 있다.

이와 같은 방정식을 부정방정식이라 하는데, 일반적으로 부정방정식은 수의 범위에 따라 여러 개의 해가 존재할 가능성이 있다. 예를 들어 방정식

$x+y=3 \quad \cdots\cdots$ ①

에 대하여 x와 y가 모두 자연수인 경우, 방정식 ①의 해를 순서쌍으로 나타내면 (x, y)는

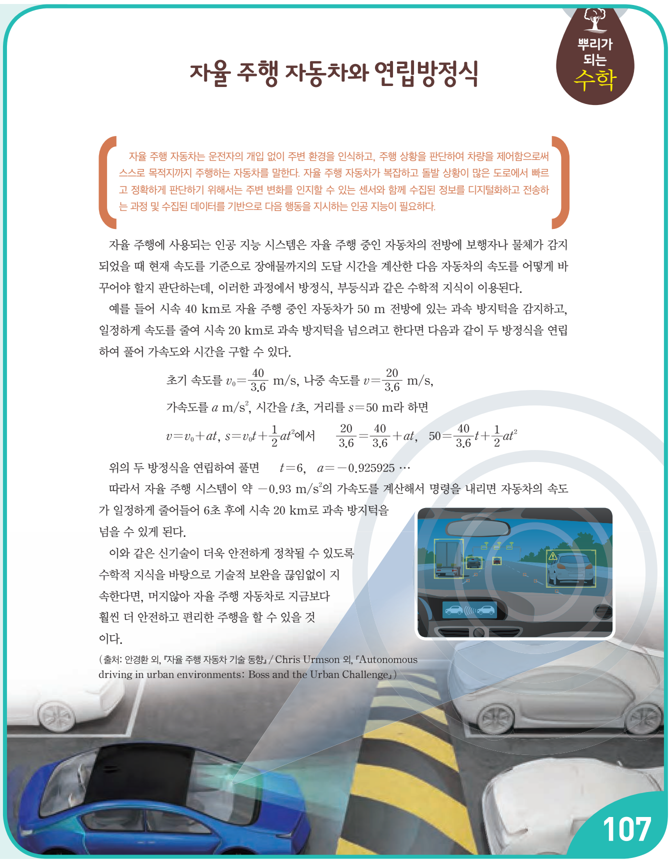
$(1, 2)$ 또는 $(2, 1)$

의 두 개이지만 x와 y가 실수인 경우, 방정식 ①의 해는 좌표평면에 직선으로 나타낼 수 있을 만큼 무수히 많다.

한편, 이차부정방정식의 대표적인 예로 들 수 있는

$x^2+y^2=z^2 \quad \cdots\cdots$ ②

의 경우, 방정식은 오직 하나인데 미지수는 3개이다. 이와 같은 방정식의 해를 나타내는 순서쌍 (x, y, z)를 '피타고라스의 수'라고 한다. 직각삼각형의 세 변의 길이를 각각 x, y, z라 하면 이 세 수는 이차부정방정식 ②를 만



뿌리가 되는 수학

자율 주행 자동차와 연립방정식

자율 주행 자동차는 운전자의 개입 없이 주변 환경을 인식하고, 주행 상황을 판단하여 차량을 제어함으로써 스스로 목적지까지 주행하는 자동차를 말한다. 자율 주행 자동차가 복잡하고 돌발 상황이 많은 도로에서 빠르고 정확하게 판단하기 위해서는 주변 변화를 인지할 수 있는 센서와 함께 수집된 정보를 디지털화하고 전송하는 과정 및 수집된 데이터를 기반으로 다음 행동을 지시하는 인공 지능이 필요하다.

자율 주행에 사용되는 인공 지능 시스템은 자율 주행 중인 자동차의 전방에 보행자나 물체가 감지되었을 때 현재 속도를 기준으로 장애물까지의 도달 시간을 계산한 다음 자동차의 속도를 어떻게 바꾸어야 할지 판단하는데, 이러한 과정에서 방정식, 부등식과 같은 수학적 지식이 이용된다.

예를 들어 시속 40 km로 자율 주행 중인 자동차가 50 m 전방에 있는 과속 방지턱을 감지하고, 일정하게 속도를 줄여 시속 20 km로 과속 방지턱을 넘으려고 한다면 다음과 같이 두 방정식을 연립하여 풀어 가속도와 시간을 구할 수 있다.

초기 속도를 $v_0=\frac{40}{3.6}$ m/s, 나중 속도를 $v=\frac{20}{3.6}$ m/s,

가속도를 a m/s^2, 시간을 t초, 거리를 $s=50$ m라 하면

$v=v_0+at$, $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$에서 $\quad \frac{20}{3.6}=\frac{40}{3.6}+at$, $\quad 50=\frac{40}{3.6}t+\frac{1}{2}at^2$

위의 두 방정식을 연립하여 풀면 $\quad t=6$, $\quad a=-0.925925\cdots$

따라서 자율 주행 시스템이 약 -0.93 m/s^{2}의 가속도를 계산해서 명령을 내리면 자동차의 속도가 일정하게 줄어들어 6초 후에 시속 20 km로 과속 방지턱을 넘을 수 있게 된다.

이와 같은 신기술이 더욱 안전하게 정착될 수 있도록 수학적 지식을 바탕으로 기술적 보완을 끊임없이 지속한다면, 머지않아 자율 주행 자동차로 지금보다 훨씬 더 안전하고 편리한 주행을 할 수 있을 것이다.

(출처: 안경환 외, 『자율 주행 자동차 기술 동향』 / Chris Urmson 외, 「Autonomous driving in urban environments: Boss and the Urban Challenge」)

107

족시키기 때문이다.

다른 이차부정방정식의 예로 영국의 수학자 펠(Pell, J., 1611～1685)의 이름을 붙인 '펠 방정식'을 들 수 있는데, 이는

두 정수 $d\,(d\neq0)$, N에 대하여

$$x^2-dy^2=N \qquad \cdots\cdots ③$$

의 꼴로 나타내어지는 부정방정식이다.

펠 방정식에서 $d<0$인 경우, 이 방정식의 정수해는 유한 개뿐이거나 없다는 것이 알려져 있다. 한편 d가 완전제곱꼴인 경우, $d=a^2$이라 하면 펠 방정식은 $(x+ay)(x-ay)=N$으로 나타내어지고 이 경우에도 방정식 ③의 정수해는 유한 개뿐이거나 없다고 한다.

일반적으로 n차 부정방정식의 대표적인 예로는

$$x^n+y^n=z^n$$

을 들 수 있다. 페르마(Fermat, P., 1601～1665)는 1637년경 $n\geq3$인 자연수 n에 대하여 이 방정식을 만족시키는 세 자연수 x, y, z는 존재하지 않는다고 주장하였는데, 350여 년 간 수많은 수학자들의 노력 끝에 1993년에 이르러서야 영국의 수학자 와일스(Wiles, A., 1953～)에 의해 이 사실이 증명되었다.

뿌리가 되는 수학 ### 자율 주행 자동차와 연립방정식

스스로 도로 상황에 대한 판단과 제어가 가능한 자율 주행 자동차는 운전자에게는 이동하는 시간 동안 다른 일을 할 수 있는 여유를 주고, 도로 위의 각종 사고 발생율을 감소시키는 동시에 연료의 절감과 오염물질의 배출을 감소시키는 등의 장점을 갖고 있다. 그렇다면 현 시점에서 자율 주행 자동차 기술은 얼마만큼 발전해 있을까?

미국 도로교통안전국(NHTSA, National Highway Traffic Safety Agency)의 차량 자율화 수준 구분에 따르면 현재 자율 주행 자동차의 기술 수준은 2～3단계로, 아직까지 '완전 자율 주행 자동차 수준'인 4단계에 도달하지는 못한 것으로 알려져 있다.

자율 주행 자동차 기술 단계

0단계	No-automation	중요한 차량 제어를 모두 운전자가 담당
1단계	Function-specific Automation	전자식 안전 제어 등의 특정 제어 기능 탑재
2단계	Combined Function Automation	최소 2개 이상의 자율화된 주요 제어 기능 탑재
3단계	Limited Self-Driving Automation	모든 주행 환경에서 차량 내 안전과 관련된 모든 기능이 자율화되고, 운전자는 해당 기능의 사용에 대한 선택권을 가짐 자율 기능을 사용 중에도 운전자는 직접 제어에 관여할 수 있고, 자율 기능에서 운전 모드로의 전환은 충분히 시간적으로 여유로움
4단계	Full Self-Driving Automation	모든 주행 환경에서 차량이 직접 도로 조건을 감시하고, 안전과 관련된 주행 기능을 제어함 운전자는 목적지 등 주행에 필요한 최소의 정보를 제공하는 역할만을 수행하고, 주행 중 제어와 관련된 일체의 역할은 없음

또한, 앞으로 이러한 기술적 발전과 더불어 자율 주행 자동차 시대에 특화된 교통 인프라의 구축, 사고 발생 시 책임 관련 등의 법적 문제, 운전자의 정보를 수집하는 것에 따른 개인 사생활 보호 등의 제도적 뒷받침도 필요하다.

III 도형의 방정식

1. 평면좌표
2. 직선의 방정식
3. 원의 방정식
4. 도형의 이동

이 단원에서는

좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 구해 보고,
선분의 내분과 외분을 이해하며, 직선과 원의 방정식,
평행이동과 대칭이동을 알아본다.

1 단원의 개관

지도 목표

1. 평면좌표

- 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.
- 선분의 내분과 외분을 이해하게 하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

2. 직선의 방정식

- 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
- 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해하게 한다.
- 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

3. 원의 방정식

- 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.
- 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.

4. 도형의 이동

- 평행이동의 뜻을 이해하게 한다.
- 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 뜻을 이해하게 한다.

지도상의 유의점

1. 평면좌표

- 두 점 사이의 거리를 구할 때는 수직선 위에서의 두 점 사이의 거리와 피타고라스 정리를 활용한다.
- 좌표평면에서 선분의 내분점과 외분점을 구하는 원리는 수직선 위에서와 같음을 알게 한다.

2. 직선의 방정식

- 직선의 방정식은 중학교에서 학습한 내용과 연계하여 다룬다.
- 두 직선의 평행과 수직을 두 직선의 기울기 사이의 관계로 나타낼 수 있음을 알게 한다.
- 점과 직선 사이의 거리는 그 점에서 직선에 내린 수선의 발까지의 거리임을 이해하게 한다.

3. 원의 방정식

- 원의 방정식은 중학교에서 학습한 내용과 연계하여 다룬다.
- 원과 직선의 위치 관계는 이차방정식의 판별식 또는 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 구할 수 있게 한다.

4. 도형의 이동

- 도형의 평행이동은 이동한 도형의 방정식을 이해하는 수준에서만 다루고, 좌표축의 평행이동은 다루지 않는다.
- 도형의 대칭이동은 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 경우만 다룬다.

학습 계통도

배운 내용

[중학교 수학 1]
- 좌표평면과 그래프
- 기본 도형

[중학교 수학 2]
- 일차함수와 그래프
- 피타고라스 정리

[중학교 수학 3]
- 이차함수와 그래프

이 단원의 내용

1. 평면좌표
- 01 두 점 사이의 거리
- 02 선분의 내분점과 외분점

2. 직선의 방정식
- 01 직선의 방정식
- 02 두 직선의 위치 관계
- 03 점과 직선 사이의 거리

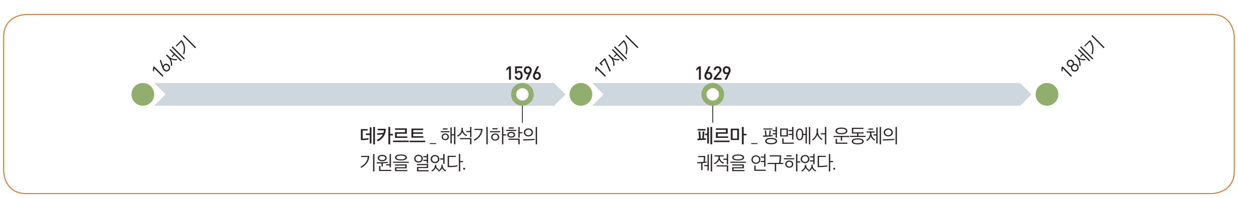
3. 원의 방정식
- 01 원의 방정식
- 02 원과 직선의 위치 관계

4. 도형의 이동
- 01 평행이동
- 02 대칭이동

배울 내용

[기하]
- 이차곡선
- 평면벡터의 성분과 내적
- 공간도형
- 공간좌표

2 단원의 이론적 배경



1 기하학의 발전

고대 이집트(B.C. 2500년경)에서 나일강의 잦은 범람 후 토지를 적절하게 재분배하기 위하여 측량이 필요하였고, 이에 따른 토지 측량에 의한 도형의 연구를 기하학의 기원으로 보고 있다. 오늘날 기하학을 뜻하는 'geometry'라 하는 것은 토지를 뜻하는 'geo'와 측량을 뜻하는 'metry'를 그 어원으로 하고 있다.

(1) 고대 그리스의 논증기하학

이집트인들의 기하학적 지식은 지중해를 건너 그리스로 전파되면서 학문적으로 체계를 갖추게 되었다. 그리스인들은 도형의 성질을 엄밀하게 연역적으로 논하였으며, 탈레스(Thales, B.C. 624?~B.C. 546?), 피타고라스(Pythagoras, B.C. 569?~B.C. 475?)로 이어지면서 고대 이집트인들의 실용기하학을 이론기하, 논증기하학으로 발전시켰다. 특

히, 피타고라스와 그의 학파에서는 피타고라스 정리를 증명하였으며, 이차방정식의 기하학적 해법, 정다면체의 이론 등을 논증하는 방법으로 기하학과 산술의 접목을 시도하였다.

⑵ 유클리드 기하학


유클리드

유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)는 그리스 기하학에 플라톤(Platon, B.C. 427?~B.C. 347?)의 철학 이데아론을 반영하여 기하학의 논리적 체계와 학문의 기초를 다졌으며, 23개의 정의(定義, definition), 5개의 공준(公準, postulate), 5개의 공통개념(common notion)을 기초로 하여 465개의 기하학의 명제들을 연역적 추론에 의해 증명해 나가는 논리적 체계로 집대성한 13권의 『원론(Elements)』이라는 책을 저술하였다. 『원론』은 전개되어 있는 이론의 논리가 매우 정연하고 엄밀하여 19세기까지 약 2000년 동안 기하학의 교과서로서 읽혀진 책으로, 이 책에 따라 발달해 온 기하학을 '유클리드 기하학'이라고 한다.

유클리드가 이 책에서 제시한 5가지의 공준 가운데 수많은 수학자들에 의해 논란을 겪은 '제5공준'은 문장이 간결하고 평행선에 관한 여러 성질을 보다 더 쉽게 증명할 수 있는 '평행선 공리'로 변형하여 사용하였다.

2 해석기하학의 탄생

좌표(座標, coordinate)를 이용하여 도형을 연구하는 해석기하학(解析幾何學, analytic geometry)은 17세기에 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)와 페르마(Fermat, P., 1601~1665)에 의하여 탄생하게 되었다.

해석기하학의 본질은 단순한 좌표의 사용이나 그래프가 아니라 기하학적 문제를 대수적이나 해석적인 문제로 바꾸어 고찰하는 데 있다.

⑴ 데카르트의 해석기하학


데카르트

프랑스의 철학자이자 수학자인 데카르트는 당시 위그노의 본거지였던 포아티에(Poitiers)에서 1616년에 법학으로 학위를 받았다. 그는 잠시 군대에 입대했다가 북서 유럽을 여행하면서 모든 과학에 적용할 수 있는 연역적 추론 방법을 연구했다고 한다.

1623년에 프랑스에 와서 메르센(Mersenne, M., 1588~1648)과 교류한 것이 수년간 자연 과학을 접하게 되는 좋은 계기가 되었다. 그가 미완성 논문인 「정신지도의 규칙」을 쓴 것도 이 기간 동안이었다.

그는 1637년 유명한 『방법서설(方法序說, Discours de la méthode)』을 출판하였다. '이성의 올바른 사용과 과학적 진리의 발견을 위하여'라는 부제를 달고 있는 이 책은 절대적으로 확실한 진리의 가능성을 인간 이성의 능력 속에서 찾음으로써 합리론 철학의 전형을 보여주는 책으로 평가된다. 이 책은 부록으로 굴절광학(屈折光學, La Dioptrique), 기상학(氣象學, Les Météores), 기하학(幾何學, La Géométrie)을 싣고 있는데, 기하학만 하더라도 3권으로 되어 100쪽 분량이나 된다.

데카르트의 기하학은 대수적 기하학의 이론과 곡선의 분류, 곡선의 접선을 작도하는 방법, 이차 이상의 방정식의 해법에 관한 것들을 담고 있는데, 그는 여기에서 점은 두 개의 좌표를 써서 나타내고, 직선과 곡선은 방정식을 써서 나타냄으로써 해석기하학이라는 기하학의 신기원을 열었다.

(2) 페르마의 해석기하학

페르마

페르마는 프랑스의 수학자이면서 정치가였다. 그가 수학을 공부한 것은 법학을 공부하기 전으로 알려져 있다. 취미 생활의 일환으로 수학을 공부하여 공식적으로 발표한 연구는 거의 없지만 당대의 수많은 수학자들과 지적 교류를 통해 상당한 영향을 끼쳤다고 한다.

그는 1629년부터 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C.190?)가 연구하던 「평면에서의 궤적(軌跡, locus)」을 연구했는데, 이 연구가 그의 사후인 1679년 『평면과 입체의 궤적 입문』으로 발간되면서 그는 데카르트와 함께 해석기하학의 창시자로 불리게 된다.

좌표를 구상하고, 직선과 곡선을 방정식을 만족시키는 점들의 모임으로 보는 부분에서는 데카르트와 같다. 하지만 데카르트는 역학적 운동으로서의 곡선의 방정식을 찾으려 한 반면에, 페르마는 대수적 방정식을 만족시키는 매우 다양한 곡선을 찾았다. 페르마는 곡선의 해석적 성질인 극대(極大, local maximum)와 극소(極小, local minimum)를 찾는 방법, 접선(接線, tangent line)을 구하는 방법 등을 주로 연구하였다. 또, 그는 이차식으로 표현되는 곡선이 원뿔곡선임을 밝혀냈다.

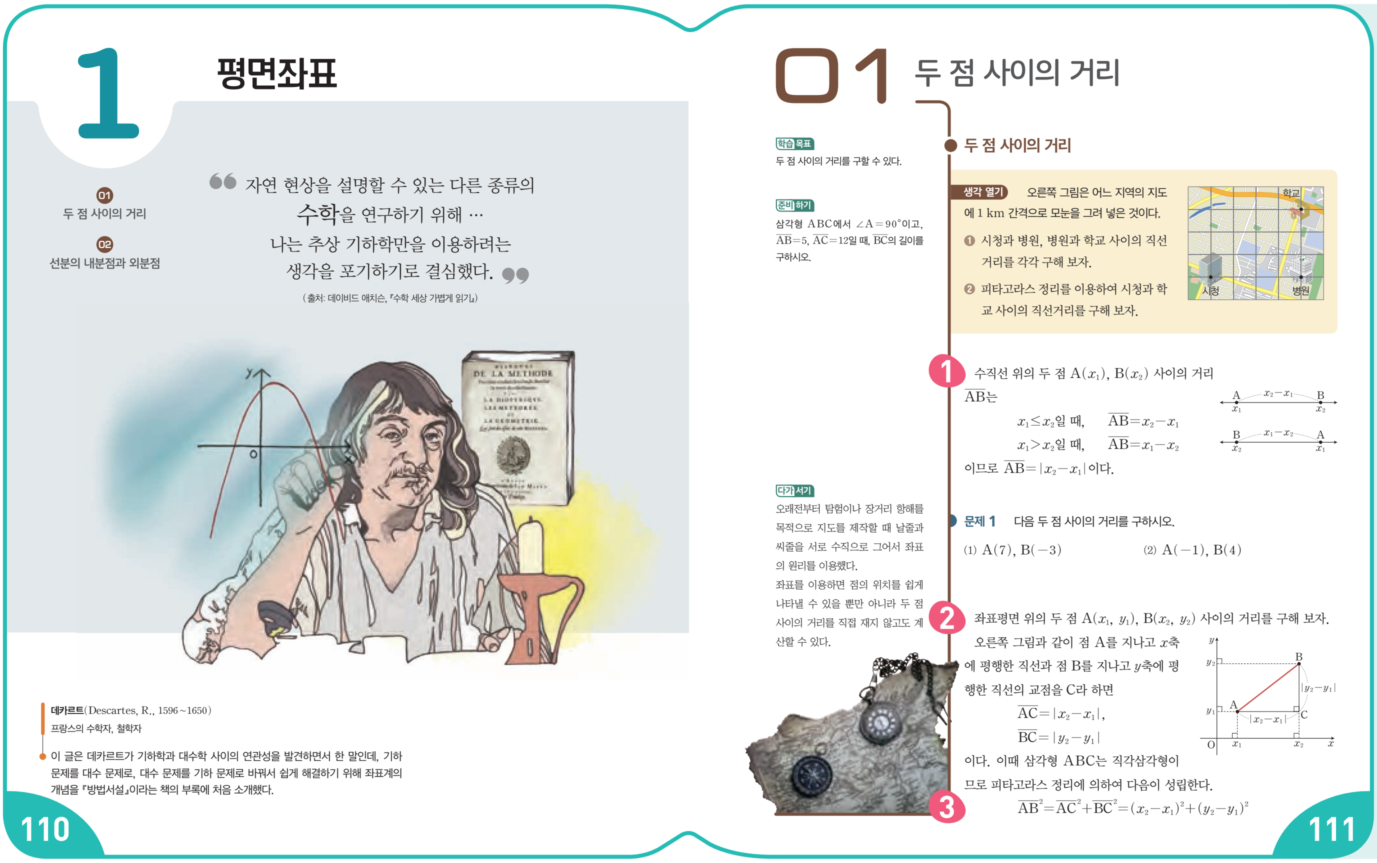
참고 문헌

- 우정호, 『학교수학의 교육적 기초』, 서울대학교출판부, 2007
- 이종우, 『기하학의 역사적 배경과 발달』, 경문사, 2011

3 단원의 지도 계획

중단원	소단원	차시 (총 32차시)	교과서 쪽 수	지도 내용	용어와 기호
1. 평면좌표	01 두 점 사이의 거리	2	111~113	• 두 점 사이의 거리	
	02 선분의 내분점과 외분점	4	114~119	• 수직선 위의 선분의 내분점과 외분점 • 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점	내분, 외분
			120	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	1	121~123	• 중단원 마무리하기	
2. 직선의 방정식	01 직선의 방정식	3	125~127	• 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식 • 두 점을 지나는 직선의 방정식 • 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형	
	02 두 직선의 위치 관계	2	128~130	• 두 직선의 평행 조건 • 두 직선의 수직 조건	
			131	• 공학적 도구	
	03 점과 직선 사이의 거리	2	132~134	• 점과 직선 사이의 거리	
	중단원 마무리	1	135~137	• 중단원 마무리하기	
3. 원의 방정식	01 원의 방정식	3	139~142	• 원의 방정식 • 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형	
			143	• 탐구&융합	
	02 원과 직선의 위치 관계	4	144~148	• 원과 직선의 위치 관계 • 원의 접선의 방정식	
	중단원 마무리	1	149~151	• 중단원 마무리하기	
4. 도형의 이동	01 평행이동	2	153~155	• 도형의 평행이동	$f(x, y)=0$
			156	• 수학 이야기	
	02 대칭이동	4	157~161	• x축, y축, 원점에 대한 대칭이동 • 직선 $y=x$에 대한 대칭이동	대칭이동
			162	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	1	163~165	• 중단원 마무리하기	
대단원 마무리		2	166~169	• 대단원 평가하기	
			170	• 수학 이야기	
			171	• 뿌리가 되는 수학	

※ 실제 지도는 학교의 실정에 따라 알맞게 계획하고 재수정할 수 있다.



1 평면좌표

01 두 점 사이의 거리

02 선분의 내분점과 외분점

❝ 자연 현상을 설명할 수 있는 다른 종류의 수학을 연구하기 위해 … 나는 추상 기하학만을 이용하려는 생각을 포기하기로 결심했다. ❞

(출처: 데이비드 애치슨, 『수학 세상 가볍게 읽기』)

데카르트(Descartes, R., 1596~1650)
프랑스의 수학자, 철학자

이 글은 데카르트가 기하학과 대수학 사이의 연관성을 발견하면서 한 말인데, 기하 문제를 대수 문제로, 대수 문제를 기하 문제로 바꿔서 쉽게 해결하기 위해 좌표계의 개념을 『방법서설』이라는 책의 부록에 처음 소개했다.

110

01 두 점 사이의 거리

학습 목표
두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

준비하기
삼각형 ABC에서 $\angle A=90°$이고, $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=12$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하시오.

다가서기
오래전부터 탐험이나 장거리 항해를 목적으로 지도를 제작할 때 날줄과 씨줄을 서로 수직으로 그어서 좌표의 원리를 이용했다.
좌표를 이용하면 점의 위치를 쉽게 나타낼 수 있을 뿐만 아니라 두 점 사이의 거리를 직접 재지 않고도 계산할 수 있다.

두 점 사이의 거리

생각 열기 오른쪽 그림은 어느 지역의 지도에 1 km 간격으로 모눈을 그려 넣은 것이다.

❶ 시청과 병원, 병원과 학교 사이의 직선거리를 각각 구해 보자.

❷ 피타고라스 정리를 이용하여 시청과 학교 사이의 직선거리를 구해 보자.

1 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$는

$x_1 \le x_2$일 때, $\quad \overline{AB}=x_2-x_1$

$x_1 > x_2$일 때, $\quad \overline{AB}=x_1-x_2$

이므로 $\overline{AB}=|x_2-x_1|$이다.

문제 1 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(7)$, $B(-3)$ (2) $A(-1)$, $B(4)$

2 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선의 교점을 C라 하면

$\overline{AC}=|x_2-x_1|$,

$\overline{BC}=|y_2-y_1|$

이다. 이때 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 다음이 성립한다.

3 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

111

중단원 도입

좌표는 원래 지도에 위치를 나타내는 방법으로 쓰였는데, 데카르트는 이것을 이용하여 곡선을 그 위의 점들의 좌표 사이의 관계식으로 나타냄으로써 사칙연산을 가능하게 하였고, 이를 곡선의 접선을 찾는 데도 이용할 수 있었다. 이 단원에서는 해석기하학의 기초가 되는 평면좌표에 대하여 중학교에서 학습한 것보다 발전적인 내용을 다루게 된다. 이때 좌표평면 위에서의 두 점 사이의 거리와 선분의 내분점과 외분점은 수직선 위에서의 두 점 사이의 거리와 선분의 내분점과 외분점의 개념을 각각 2차원으로 확장한 것이다.

데카르트

데카르트(Descartes, R., 1596~1650)는 프랑스의 물리학자, 근대 철학의 아버지, 해석기하학의 창시자로 불린다. 그는 합리론의 대표 주자이며 본인의 저서 『방법서설』에서 '나는 생각한다, 고로 존재한다.'는 계몽사상의 '자율적이고 합리적인 주체'의 근본 원리를 처음으로 확립한 것으로 유명하다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

② 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

③ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하는 방법을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 수직선 위의 점은 실수와 일대일로 대응하고 좌표평면 위의 점은 실수의 순서쌍과 일대일로 대응함을 이해하게 한다.

② 피타고라스 정리를 이용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하는 방법을 유도하게 한다.

③ 공식을 단순히 암기하는 것보다는 공식이 유도되는 과정을 이해하여 공식을 사용하지 않더라도 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

④ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하는 경우에 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$과 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$이 서로 같음을 이해하게 한다.

4 따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히, 원점 O와 점 A(x_1, y_1) 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히, 원점 O와 점 A(x_1, y_1) 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

보기 두 점 A$(-1, 1)$, B$(3, -2)$ 사이의 거리는

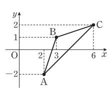
$$\overline{AB}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(-2-1)^2}=\sqrt{25}=5$$

문제 2 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) A$(2, 4)$, B$(-2, 2)$ (2) A$(-4, -1)$, B$(2, -3)$

(3) A$(-3, -4)$, B$(0, -4)$ (4) O$(0, 0)$, A$(-3, 4)$

예제 1 세 점 A$(2, -2)$, B$(3, 1)$, C$(6, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.



풀이 △ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{1-(-2)\}^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(6-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(2-6)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$$

따라서 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다. 답 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형

문제 3 세 점 A$(3, 8)$, B$(1, 0)$, C$(-1, 9)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

112

준비하기

|주안점| 피타고라스 정리를 이용할 수 있는지 확인한다.

|풀이| $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$에서 $\overline{BC}^2=5^2+12^2=169$

따라서 $\overline{BC}=13$ 답 13

● 두 점 사이의 거리

평가 기준

상	수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
중	좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
하	수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 두 점 사이의 직선거리를 구할 때, 두 지점을 선분으로 연결하여 피타고라스 정리를 이용할 수 있음을 알게 한다.

1 모눈 한 칸의 간격이 1 km이므로 시청과 병원, 병원과 학교 사이의 직선거리는 각각 4 km, 3 km이다.

2 직각을 낀 두 변의 길이가 4 km, 3 km인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같으므로 피타고라스 정리에 의하여 $\sqrt{4^2+3^2}=5$(km)

내용 연구

1 수직선 위의 두 점 사이의 거리는 두 점의 좌표의 차와 같으므로 절댓값 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.

2 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식은 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 이용하여 유도한다.

3 실수 x에 대하여 $|x|^2=x^2$이고, 이를 이용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

4 좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) 사이의 거리를 구하는 공식

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

에서 B(x_2, y_2) 대신에 O$(0, 0)$을 대입하면 원점 O와 점 A(x_1, y_1) 사이의 거리 공식을 유도할 수 있다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\overline{AB}=|-3-7|=10$

(2) $\overline{AB}=|4-(-1)|=5$ 답 (1) 10 (2) 5

문제 2

|주안점| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-4)\}^2+\{-3-(-1)\}^2}=2\sqrt{10}$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{\{0-(-3)\}^2+\{-4-(-4)\}^2}=3$

(4) $\overline{OA}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

답 (1) $2\sqrt{5}$ (2) $2\sqrt{10}$ (3) 3 (4) 5

문제 3

|주안점| 좌표평면 위의 삼각형의 세 변의 길이를 각각 구하고, 이를 비교하여 주어진 삼각형이 어떤 삼각형인지 알 수 있게 한다.

|풀이| △ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(0-8)^2}=\sqrt{68}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(-1-1)^2+(9-0)^2}=\sqrt{85}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(8-9)^2}=\sqrt{17}$$

에서 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

따라서 △ABC는 ∠A=90°인 직각삼각형이다.

답 ∠A=90°인 직각삼각형

내용 연구

① 좌표평면과 두 점 사이의 거리를 이용하여 여러 가지 도형의 성질을 증명할 수 있음을 알게 한다.

② 좌표평면 위에 도형을 놓을 때는 주어진 식의 계산이 간단해지도록 좌표축을 잡는 것이 편리함을 알게 한다.

문제 풀이

문제 4

| 주안점 | y축 위의 점의 x좌표는 0이므로 구하는 점의 좌표를 $(0, y)$라 하고 두 점 사이의 거리 공식을 이용할 수 있게 한다.

| 풀이 | 구하는 점을 $\mathrm{P}(0, y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서

$$(0-3)^2+\{y-(-4)\}^2=\{0-(-2)\}^2+(y-1)^2$$

$$y^2+8y+25=y^2-2y+5$$

$$10y=-20, \quad y=-2$$

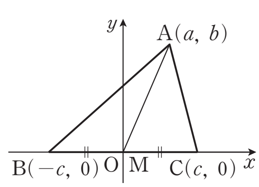
따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, -2)$이다. 답 $(0, -2)$

생각톡톡 y축 위에 있는 점의 x좌표는 항상 0이다.

문제 5

| 주안점 | 도형을 좌표평면 위에 나타내고, 각 점의 좌표를 구하여 두 점 사이의 거리 공식을 이용할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다. 이때 $\triangle\mathrm{ABC}$의 세 꼭짓점을



$$\mathrm{A}(a, b),\ \mathrm{B}(-c, 0),\ \mathrm{C}(c, 0)$$

이라 하면

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$$

$$=2(\boxed{a^2+b^2+c^2}) \quad \cdots\cdots ①$$

또, $\overline{\mathrm{AM}}^2=\boxed{a^2+b^2}$, $\overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$이므로

$$2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)=2(\boxed{a^2+b^2+c^2}) \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 $\quad \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CA}}=7$을

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$$

에 대입하여 정리하면

$$5^2+7^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+2^2), \quad \overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{33}$$

답 (1) (가) $a^2+b^2+c^2$ (나) a^2+b^2 (2) $\sqrt{33}$

예제 2 두 점 $\mathrm{A}(2, 5)$, $\mathrm{B}(-1, 2)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점의 좌표를 구하시오.

풀이 구하는 점을 $\mathrm{P}(x, 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로

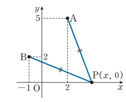
$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서

$$(x-2)^2+(0-5)^2=\{x-(-1)\}^2+(0-2)^2$$

$$x^2-4x+29=x^2+2x+5$$

$$6x=24, \quad x=4$$

따라서 구하는 좌표는 $(4, 0)$



답 $(4, 0)$

생각톡톡 y축 위에 있는 점의 x좌표는 무엇일까?

문제 4 두 점 $\mathrm{A}(3, -4)$, $\mathrm{B}(-2, 1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표를 구하시오.

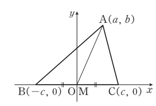
① 탐구 **문제 5** 다음은 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$$

이 성립함을 설명한 것이다.

② 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이 된다.

이때 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을



$$\mathrm{A}(a, b),\ \mathrm{B}(-c, 0),\ \mathrm{C}(c, 0)$$

이라 하면

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$$

$$=2(\boxed{\text{(가)}}) \quad \cdots\cdots ①$$

또, $\overline{\mathrm{AM}}^2=\boxed{\text{(나)}}$, $\overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$이므로

$$2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)=2(\boxed{\text{(가)}}) \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$이 성립한다.

(1) 위의 (가), (나)에 알맞은 것을 구하시오.

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CA}}=7$인 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, 위의 등식을 이용하여 $\overline{\mathrm{AM}}$의 길이를 구하시오.

113

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 수직선 위에서 선분의 내분과 외분을 이해하고, 수직선 위의 선분의 내분점, 중점, 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

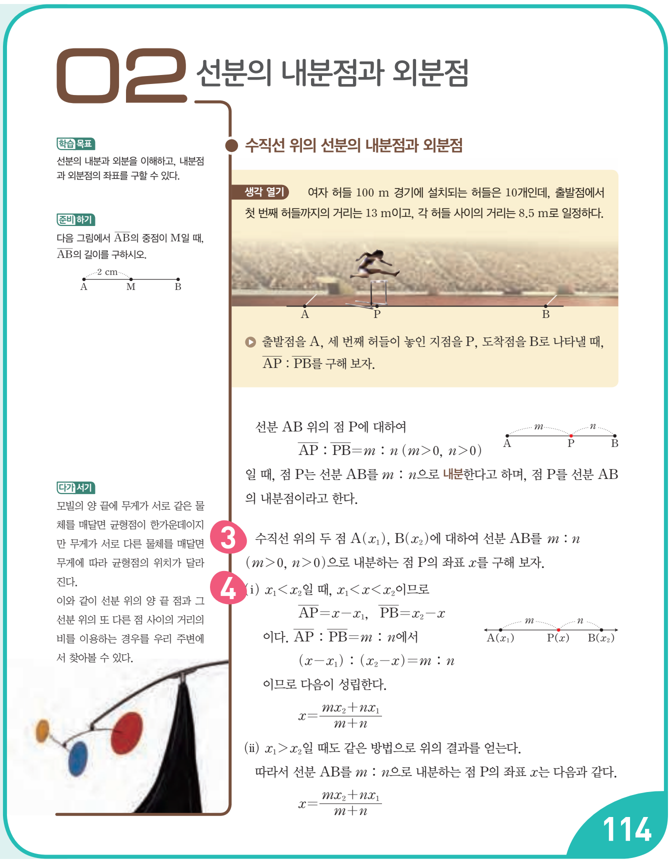
② 좌표평면 위에서 선분의 내분과 외분을 이해하고, 좌표평면 위의 선분의 내분점, 중점, 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

③ 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

④ 내분점과 외분점의 좌표를 구하는 공식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

▌지도상의 유의점

① 좌표평면 위에서 선분의 내분점과 외분점을 구하는 원리는 수직선 위에서와 같음을 알게 한다. 수직선 위에서 선분의 내분점과 외분점을 구하는 공식을 이용하여 좌표평면 위에서 선분의 내분점과 외분점을 구하는 공식을 유도한다.



02 선분의 내분점과 외분점

학습 목표

선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

준비하기

다음 그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 M일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구하시오.

2 cm

A M B

● 수직선 위의 선분의 내분점과 외분점

생각 열기 여자 허들 100 m 경기에 설치되는 허들은 10개인데, 출발점에서 첫 번째 허들까지의 거리는 13 m이고, 각 허들 사이의 거리는 8.5 m로 일정하다.

A P B

▶ 출발점을 A, 세 번째 허들이 놓인 지점을 P, 도착점을 B로 나타낼 때, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}$를 구해 보자.

선분 AB 위의 점 P에 대하여

$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\ (m>0,\ n>0)$$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 **내분**한다고 하며, 점 P를 선분 AB의 내분점이라고 한다.

③ 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 x를 구해 보자.

④ (i) $x_1<x_2$일 때, $x_1<x<x_2$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=x-x_1,\quad \overline{\mathrm{PB}}=x_2-x$$

이다. $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n$에서

$$(x-x_1):(x_2-x)=m:n$$

이므로 다음이 성립한다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

A(x_1) P(x) B(x_2)

(ii) $x_1>x_2$일 때도 같은 방법으로 위의 결과를 얻는다.

따라서 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표 x는 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

다가서기

모빌의 양 끝에 무게가 서로 같은 물체를 매달면 균형점이 한가운데이지만 무게가 서로 다른 물체를 매달면 무게에 따라 균형점의 위치가 달라진다.

이와 같이 선분 위의 양 끝 점과 그 선분 위의 또 다른 점 사이의 거리의 비를 이용하는 경우를 우리 주변에서 찾아볼 수 있다.

114

② 선분의 내분이나 외분을 생각할 때는 어떤 점에서 시작해서 어떤 점으로 끝나는지를 주의하게 한다.

③ 선분을 $m:n$으로 내분 또는 외분한다고 할 때, m과 n은 모두 양수임을 유의하도록 한다. 특히, 외분의 경우에는 $m\neq n$이어야 함을 알게 한다.

④ 선분 AB의 내분점은 선분 AB 위의 점이고, 선분 AB의 외분점은 선분 AB의 연장선 위의 점임을 이해하게 한다.

⑤ 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점은 $m>n$일 때는 선분 AB의 B쪽 연장선 위에 있고, $m<n$일 때는 선분 AB의 A쪽 연장선 위에 있음을 이해하게 한다. 또, $m=n$인 경우에는 선분의 외분점이 없음을 이해하게 한다.

용어와 기호

- 내분(內分, internal division)
- 외분(外分, external division)

준비하기

|주안점| 수직선 위에서 선분의 중점을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지 확인한다.

|풀이| $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MB}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{BM}}$$
$$=2\overline{\mathrm{AM}}=2\times2=4(\mathrm{cm})$$

답 4 cm

수직선 위의 선분의 내분점과 외분점

평가 기준

상	좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
중	수직선 위의 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
하	선분의 내분과 외분의 뜻을 말할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 출발점에서 첫 번째 허들까지의 거리와 각 허들 사이의 거리를 이용하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}$를 구하게 한다. 또, 점 P가 선분 AB를 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}$로 나누는 점임을 통하여 선분의 내분의 뜻을 알게 한다.

▶ $\overline{\mathrm{AP}}=13+2\times8.5=30(\mathrm{m})$이므로

$$\overline{\mathrm{PB}}=100-30=70(\mathrm{m})$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=3:7$

내용 연구

③ 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$를 잇는 선분 AB의 내분점의 좌표는 $x_1<x_2$일 때와 $x_1>x_2$일 때로 나누어 생각할 수 있는데, 두 경우에서 같은 결과를 얻으므로 수직선 위의 선분의 내분점의 공식은 x_1, x_2의 대소에 관계없이 이용할 수 있음을 알게 한다.

④ 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 선분 BA를 $m:n$으로 내분하는 점은 일반적으로 같지 않음을 알게 한다.

예를 들어 두 점 $\mathrm{A}(-2)$, $\mathrm{B}(6)$을 잇는 선분 AB를 $3:5$로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{3\times6+5\times(-2)}{3+5}=1$$

이고, 선분 BA를 $3:5$로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{3\times(-2)+5\times6}{3+5}=3$$

이므로 같지 않다.

내용 연구

1 선분 AB를 $m:n$으로 내분할 때, $m=n$이면 이 내분점은 선분 AB의 중점이 됨을 이해하게 한다.

생각톡톡 선분의 중점은 그 선분을 $1:1$로 내분한다.

2 선분 AB의 내분점은 선분 AB 위에 있지만 외분점은 선분 AB의 연장선 위에 있음을 알게 한다.

3 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$를 잇는 선분 AB의 외분점의 좌표는 $x_1<x_2$일 때와 $x_1>x_2$일 때로 나누어 생각할 수 있고, 각각의 경우는 다시 $m>n$일 때와 $m<n$일 때로 나누어 생각할 수 있다.
이때 각 경우에서 같은 결과를 얻으므로 수직선 위의 선분의 외분점의 공식은 x_1, x_2의 대소와 m, n의 대소에 관계없이 이용할 수 있음을 알게 한다.

4 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점과 선분 BA를 $m:n$으로 외분하는 점은 일반적으로 같지 않음을 알게 한다.
예를 들어 두 점 $\mathrm{A}(-2)$, $\mathrm{B}(6)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

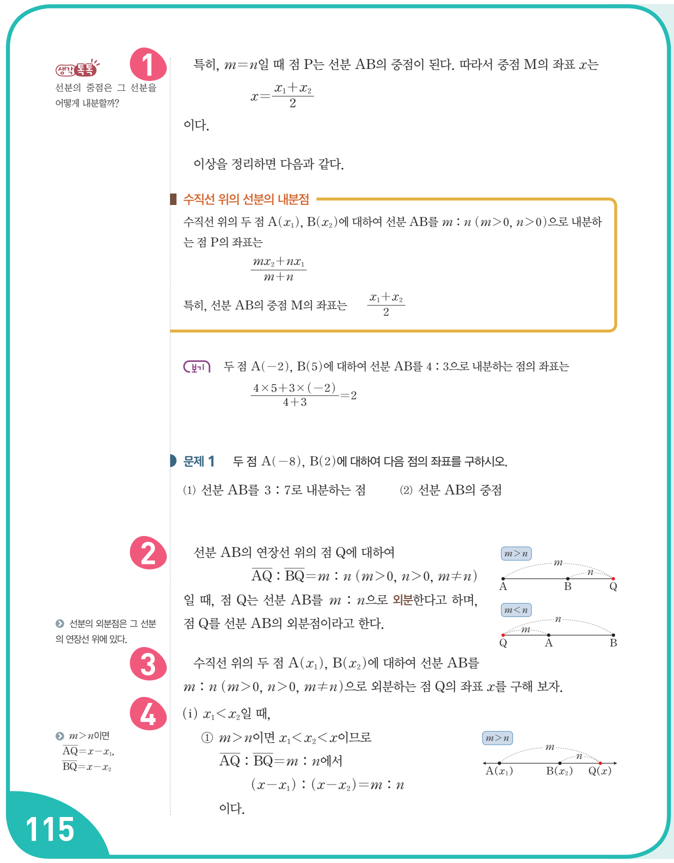
$$\frac{2\times6-3\times(-2)}{2-3}=-18$$

이고, 선분 BA를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{2\times(-2)-3\times6}{2-3}=22$$

이므로 같지 않다.

5 선분 AB를 $m:n$으로 외분할 때, 외분점은 선분 AB의 연장선 위에 있지만 m, n의 대소에 따라 그 위치가 달라진다는 것을 알게 한다.
즉, $m>n$일 때는 외분점이 선분 AB의 B쪽 연장선 위에 있고, $m<n$일 때는 선분 AB의 A쪽 연장선 위에 있다.
또, $m=n$인 경우에는 외분점이 존재하지 않음을 이해하게 한다.
| 오개념 바로잡기 | $m=n$인 경우에는 외분점이 존재하지 않음을 분모가 0이 되는 사실로 이해하게 한다.



생각톡톡 선분의 중점은 그 선분을 어떻게 내분할까?

1 특히, $m=n$일 때 점 P는 선분 AB의 중점이 된다. 따라서 중점 M의 좌표 x는

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

수직선 위의 선분의 내분점
수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\frac{x_1+x_2}{2}$

보기 두 점 $\mathrm{A}(-2)$, $\mathrm{B}(5)$에 대하여 선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{4\times5+3\times(-2)}{4+3}=2$$

문제 1 두 점 $\mathrm{A}(-8)$, $\mathrm{B}(2)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.
(1) 선분 AB를 $3:7$로 내분하는 점 (2) 선분 AB의 중점

2 선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여

$$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 외분한다고 하며, 점 Q를 선분 AB의 외분점이라고 한다.

선분의 외분점은 그 선분의 연장선 위에 있다.

3 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 x를 구해 보자.

4 (i) $x_1<x_2$일 때,
① $m>n$이면 $x_1<x_2<x$이므로
$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=m:n$에서

$$(x-x_1):(x-x_2)=m:n$$

이다.

$m>n$이면 $\overline{\mathrm{AQ}}=x-x_1$, $\overline{\mathrm{BQ}}=x-x_2$

115

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 수직선 위의 두 점을 잇는 선분의 내분점과 중점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 선분 AB를 $3:7$로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{3\times2+7\times(-8)}{3+7}=-5$$

(2) 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\frac{2+(-8)}{2}=-3$$

답 (1) -5 (2) -3

문제 2

| 주안점 | 수직선 위의 두 점을 잇는 선분의 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{3\times6-2\times(-4)}{3-2}=26$$

(2) 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{1\times6-3\times(-4)}{1-3}=-9$$

답 (1) 26 (2) -9

$m<n$이면 $\overline{AQ}=x_1-x$, $\overline{BQ}=x_2-x$

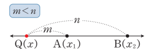
5

② $m<n$이면 $x<x_1<x_2$이므로

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$에서

$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$

이다.



①, ②에서 다음이 성립한다.

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

(ii) $x_1>x_2$일 때도 같은 방법으로 위의 결과를 얻는다.

따라서 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표 x는 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$m=n$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점은 존재하지 않는다.

수직선 위의 선분의 외분점

수직선 위의 두 점 A(x_1), B(x_2)에 대하여 선분 AB를 $m:n$ ($m>0$, $n>0$, $m\neq n$)으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

보기 두 점 A(-2), B(3)에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{2\times3-1\times(-2)}{2-1}=8$$

문제 2 두 점 A(-4), B(6)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점

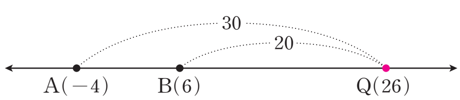
(2) 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점

탐구 **문제 3** 수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점을 C라 하자. 이때 점 B는 선분 AC를 어떻게 내분하는지 설명하시오. (단, $m>n$)

116

|참고| 외분점의 좌표를 다음과 같이 수직선을 이용하여 확인할 수 있다.

(1) 외분점을 Q(26)이라 하자.



$\overline{AQ}=26-(-4)=30$,

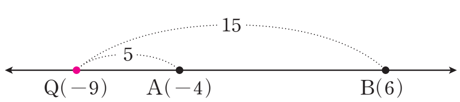
$\overline{BQ}=26-6=20$

이므로

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=3:2$

따라서 점 Q는 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이다.

(2) 외분점을 Q(-9)라 하자.



$\overline{AQ}=-4-(-9)=5$,

$\overline{BQ}=6-(-9)=15$

이므로

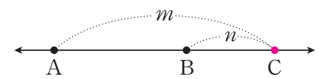
$\overline{AQ}:\overline{BQ}=1:3$

따라서 점 Q는 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점이다.

문제 3

|주안점| 선분의 외분점의 뜻을 내분점과 연관지어 이해할 수 있게 한다.

|풀이| 다음 그림과 같이 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 C에 대하여 점 B는 선분 AC를 $(m-n):n$으로 내분하는 점이다.



답 점 B는 선분 AC를 $(m-n):n$으로 내분한다.

지도 자료

선분의 내분점과 외분점

수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m:n$ ($m>n>0$)으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 등식

$$\frac{1}{\overline{AP}}+\frac{1}{\overline{AQ}}=\frac{2}{\overline{AB}}$$

가 성립한다.

A(a), B(b) ($a<b$)라 하면 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\frac{mb+na}{m+n}$$

선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\frac{mb-na}{m-n}$$

이때

$$\overline{AP}=\frac{mb+na}{m+n}-a=\frac{m(b-a)}{m+n}$$

이고,

$$\overline{AQ}=\frac{mb-na}{m-n}-a=\frac{m(b-a)}{m-n}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{\overline{AP}}+\frac{1}{\overline{AQ}}=\frac{m+n}{m(b-a)}+\frac{m-n}{m(b-a)}=\frac{2m}{m(b-a)}=\frac{2}{b-a}=\frac{2}{\overline{AB}}$$

● 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

함께하기

| 지도 방향 | 좌표평면 위의 선분의 내분점의 좌표는 좌표평면 위의 점에서 x축, y축에 각각 내린 수선의 발을 이용하여 수직선 위에서의 내분점의 좌표를 구하는 공식으로 구할 수 있음을 이해하게 한다.

| 풀이 | ❶ 세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, B′이라 하면

$$\overline{\mathrm{A'P'}} : \overline{\mathrm{P'B'}} = \overline{\mathrm{AP}} : \boxed{\overline{\mathrm{PB}}} = m : \boxed{n}$$

이므로 점 P′은 선분 A′B′을 $m : n$으로 내분하는 점이다. 즉, 점 P의 x좌표는

$$\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

❷ 세 점 A, P, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 A″, P″, B″이라 하면

$$\overline{\mathrm{A''P''}} : \overline{\mathrm{P''B''}} = \overline{\mathrm{AP}} : \boxed{\overline{\mathrm{PB}}} = m : \boxed{n}$$

이므로 점 P″은 선분 A″B″을 $m : n$으로 내분하는 점이다. 즉, 점 P의 y좌표는

$$\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

❸ ❶과 ❷에서 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

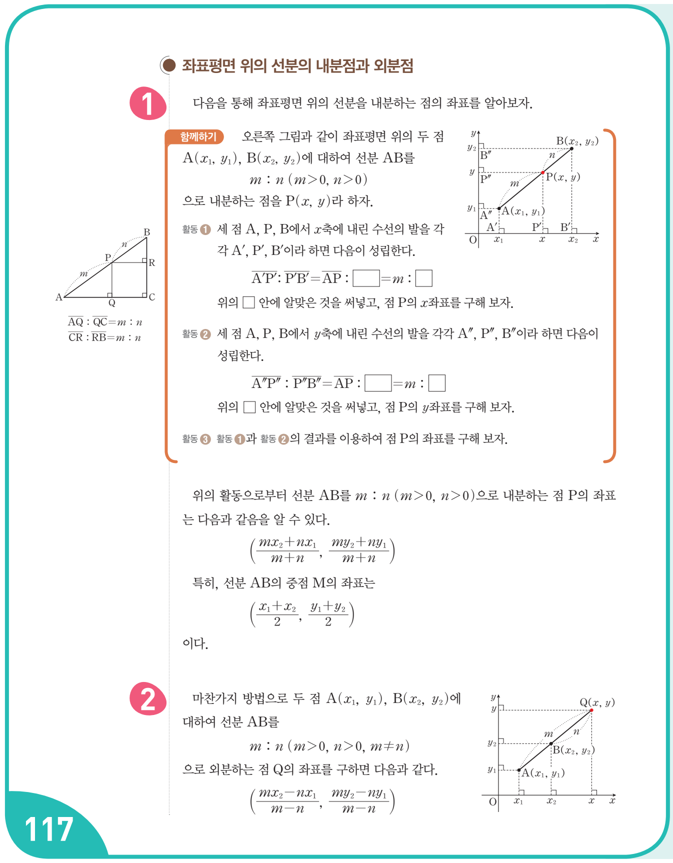
답 ❶ $\overline{\mathrm{PB}}$, n, $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$ ❷ $\overline{\mathrm{PB}}$, n, $\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$

❸ $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

내용 연구

1. 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 내분점은 두 점 A, B에서 각각 x축에 내린 수선의 발이 이루는 선분의 내분점과 그 x좌표가 같다. 이를 이용하여 좌표평면 위의 선분의 내분점의 좌표를 구하는 공식을 유도한다.

2. 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 외분점은 두 점 A, B에서 각각 x축에 내린 수선의 발이 이루는 선분의 외분점과 그 x좌표가 같다. 이를 이용하여 좌표평면 위의 선분의 외분점의 좌표를 구하는 공식을 유도한다.



● 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

1 다음을 통해 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점의 좌표를 알아보자.

함께하기 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를

$m : n\ (m>0, n>0)$

으로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하자.

활동 ❶ 세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, B′이라 하면 다음이 성립한다.

$\overline{\mathrm{A'P'}} : \overline{\mathrm{P'B'}} = \overline{\mathrm{AP}} : \square = m : \square$

위의 □ 안에 알맞은 것을 써넣고, 점 P의 x좌표를 구해 보자.

활동 ❷ 세 점 A, P, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 A″, P″, B″이라 하면 다음이 성립한다.

$\overline{\mathrm{A''P''}} : \overline{\mathrm{P''B''}} = \overline{\mathrm{AP}} : \square = m : \square$

위의 □ 안에 알맞은 것을 써넣고, 점 P의 y좌표를 구해 보자.

활동 ❸ 활동 ❶과 활동 ❷의 결과를 이용하여 점 P의 좌표를 구해 보자.

$\overline{\mathrm{AQ}} : \overline{\mathrm{QC}} = m : n$

$\overline{\mathrm{CR}} : \overline{\mathrm{RB}} = m : n$

위의 활동으로부터 선분 AB를 $m : n\ (m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는 다음과 같음을 알 수 있다.

$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

이다.

2 마찬가지 방법으로 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를

$m : n\ (m>0, n>0, m \neq n)$

으로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하면 다음과 같다.

$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

117

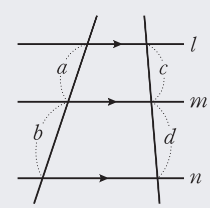
지도 자료

평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비

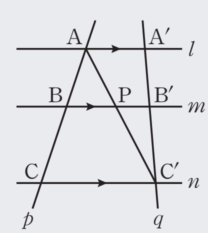
세 평행선 l, m, n이 다른 두 직선과 만나서 생기는 선분의 길이의 비가 오른쪽 그림과 같을 때,

$$a : b = c : d$$

가 성립한다.



오른쪽 그림과 같이 평행한 세 직선 l, m, n과 두 직선 p, q의 교점을 각각 A, B, C, A′, B′, C′이라 하고, $\overline{\mathrm{AC'}}$과 직선 m의 교점을 P라 하자.



△ACC′에서 $\overline{\mathrm{BP}} /\!/ \overline{\mathrm{CC'}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PC'}}$ ······ ①

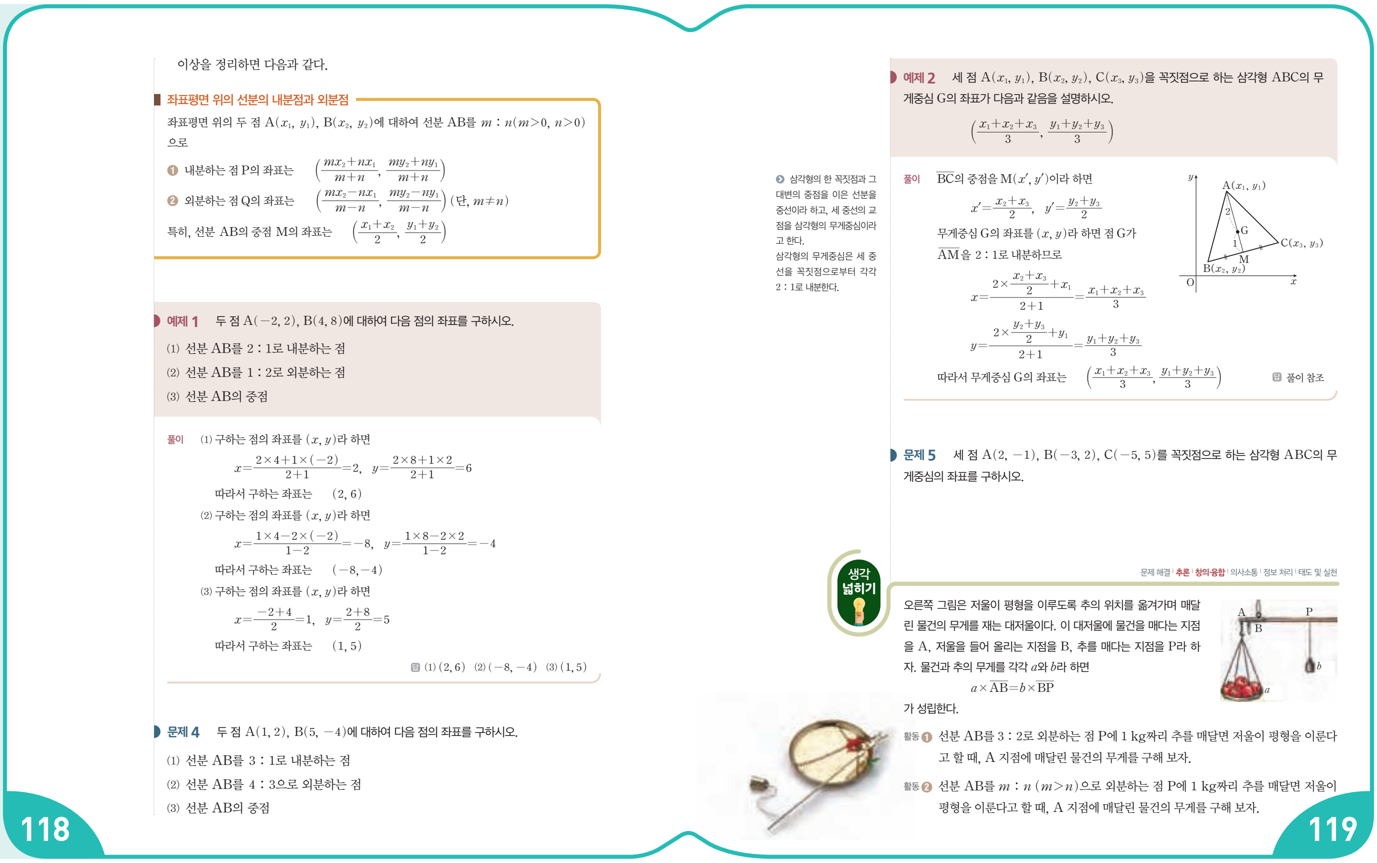
또, △C′A′A에서 $\overline{\mathrm{B'P}} /\!/ \overline{\mathrm{A'A}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PC'}} = \overline{\mathrm{A'B'}} : \overline{\mathrm{B'C'}}$ ······ ②

①, ②에서 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{A'B'}} : \overline{\mathrm{B'C'}}$이므로

$a : b = c : d$

가 성립한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n(m>0, n>0)$으로

❶ 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

❷ 외분하는 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

예제 1 두 점 $A(-2, 2)$, $B(4, 8)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

풀이 (1) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2, \quad y=\frac{2\times8+1\times2}{2+1}=6$$

따라서 구하는 좌표는 $(2, 6)$

(2) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{1\times4-2\times(-2)}{1-2}=-8, \quad y=\frac{1\times8-2\times2}{1-2}=-4$$

따라서 구하는 좌표는 $(-8, -4)$

(3) 구하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{-2+4}{2}=1, \quad y=\frac{2+8}{2}=5$$

따라서 구하는 좌표는 $(1, 5)$

답 (1) $(2, 6)$ (2) $(-8, -4)$ (3) $(1, 5)$

문제 4 두 점 $A(1, 2)$, $B(5, -4)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

118

예제 2 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 다음과 같음을 설명하시오.

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 중선이라 하고, 세 중선의 교점을 삼각형의 무게중심이라고 한다.
삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분한다.

풀이 $\overline{BC}$의 중점을 $M(x', y')$이라 하면

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2}, \quad y'=\frac{y_2+y_3}{2}$$

무게중심 G의 좌표를 (x, y)라 하면 점 G가 $\overline{AM}$을 2 : 1로 내분하므로

$$x=\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

따라서 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

답 풀이 참조

문제 5 세 점 $A(2, -1)$, $B(-3, 2)$, $C(-5, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림은 저울이 평형을 이루도록 추의 위치를 옮겨가며 매달린 물건의 무게를 재는 대저울이다. 이 대저울에 물건을 매다는 지점을 A, 저울을 들어 올리는 지점을 B, 추를 매다는 지점을 P라 하자. 물건과 추의 무게를 각각 a와 b라 하면

$$a\times\overline{AB}=b\times\overline{BP}$$

가 성립한다.

활동 ❶ 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 P에 1 kg짜리 추를 매달면 저울이 평형을 이룬다고 할 때, A 지점에 매달린 물건의 무게를 구해 보자.

활동 ❷ 선분 AB를 $m : n$ $(m>n)$으로 외분하는 점 P에 1 kg짜리 추를 매달면 저울이 평형을 이룬다고 할 때, A 지점에 매달린 물건의 무게를 구해 보자.

119

문제 풀이

문제 4

| 주안점 | 좌표평면 위의 두 점을 잇는 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 구하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

(1) $x=\frac{3\times5+1\times1}{3+1}=4$,

$y=\frac{3\times(-4)+1\times2}{3+1}=-\frac{5}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$

(2) $x=\frac{4\times5-3\times1}{4-3}=17$,

$y=\frac{4\times(-4)-3\times2}{4-3}=-22$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(17, -22)$

(3) $x=\frac{1+5}{2}=3$,

$y=\frac{2+(-4)}{2}=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3, -1)$

답 (1) $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ (2) $(17, -22)$ (3) $(3, -1)$

문제 5

| 주안점 | 삼각형의 무게중심을 구하는 공식을 이용하여 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{2+(-3)+(-5)}{3}=-2,$$

$$y=\frac{(-1)+2+5}{3}=2$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$(-2, 2)$ 답 $(-2, 2)$

생각 넓히기

| 지도 방향 | 주어진 비례 관계를 이용하여 물건의 무게를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | ❶ $\overline{AB} : \overline{BP}=1 : 2$이므로 A 지점에 매달린 물건의 무게는 2 kg이다.

❷ $\overline{AB} : \overline{BP}=(m-n) : n$이므로 A 지점에 매달린 물건의 무게는 $\frac{n}{m-n}$ kg이다.

답 ❶ 2 kg ❷ $\frac{n}{m-n}$ kg

탐구&융합 선분의 내분점과 피타고라스 음계

|지도 방향| 피타고라스 음계의 원리는 선분의 내분점을 이용하여 만들어졌음을 이해하고 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| 전체 현의 길이를 1로 보고 통길 때의 음정을 '도'라 할 때,

❶ '도'보다 5도 높은 '솔'의 위치는 $1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

❷ '솔'보다 5도 높은 '높은 레'의 위치는

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

❸ '높은 레'보다 한 옥타브 낮은 '레'의 위치는 '높은 레' 음을 내는 현의 길이의 2배이므로

$$\frac{4}{9}\times2=\frac{8}{9}$$

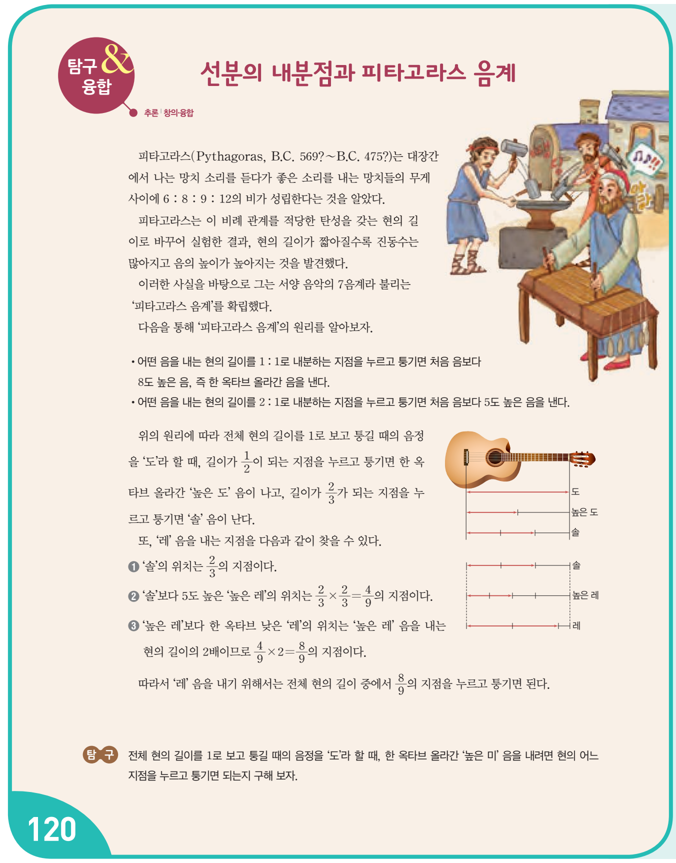
❹ '레'보다 5도 높은 '라'의 위치는 $\frac{8}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$

❺ '라'보다 5도 높은 '높은 미'의 위치는

$$\frac{16}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{81}$$

따라서 '높은 미' 음을 내기 위해서는 전체 현의 길이 중에서 $\frac{32}{81}$의 지점을 누르고 통기면 된다.

답 $\frac{32}{81}$



탐구&융합

선분의 내분점과 피타고라스 음계

추론 | 창의·융합

피타고라스(Pythagoras, B.C. 569?~B.C. 475?)는 대장간에서 나는 망치 소리를 듣다가 좋은 소리를 내는 망치들의 무게 사이에 $6:8:9:12$의 비가 성립한다는 것을 알았다.

피타고라스는 이 비례 관계를 적당한 탄성을 갖는 현의 길이로 바꾸어 실험한 결과, 현의 길이가 짧아질수록 진동수는 많아지고 음의 높이가 높아지는 것을 발견했다.

이러한 사실을 바탕으로 그는 서양 음악의 7음계라 불리는 '피타고라스 음계'를 확립했다.

다음을 통해 '피타고라스 음계'의 원리를 알아보자.

- 어떤 음을 내는 현의 길이를 $1:1$로 내분하는 지점을 누르고 통기면 처음 음보다 8도 높은 음, 즉 한 옥타브 올라간 음을 낸다.
- 어떤 음을 내는 현의 길이를 $2:1$로 내분하는 지점을 누르고 통기면 처음 음보다 5도 높은 음을 낸다.

위의 원리에 따라 전체 현의 길이를 1로 보고 통길 때의 음정을 '도'라 할 때, 길이가 $\frac{1}{2}$이 되는 지점을 누르고 통기면 한 옥타브 올라간 '높은 도' 음이 나고, 길이가 $\frac{2}{3}$가 되는 지점을 누르고 통기면 '솔' 음이 난다.

또, '레' 음을 내는 지점을 다음과 같이 찾을 수 있다.

❶ '솔'의 위치는 $\frac{2}{3}$의 지점이다.

❷ '솔'보다 5도 높은 '높은 레'의 위치는 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$의 지점이다.

❸ '높은 레'보다 한 옥타브 낮은 '레'의 위치는 '높은 레' 음을 내는 현의 길이의 2배이므로 $\frac{4}{9}\times2=\frac{8}{9}$의 지점이다.

따라서 '레' 음을 내기 위해서는 전체 현의 길이 중에서 $\frac{8}{9}$의 지점을 누르고 통기면 된다.

탐구 전체 현의 길이를 1로 보고 통길 때의 음정을 '도'라 할 때, 한 옥타브 올라간 '높은 미' 음을 내려면 현의 어느 지점을 누르고 통기면 되는지 구해 보자.

120

읽기 자료

피타고라스 음계와 순정률, 평균률

피타고라스 음계의 원리를 이용하여 현의 길이를 1로 보았을 때 현의 길이의 비는 다음과 같다.

음계	도	레	미	파	솔	라	시	도
현의 길이	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

10세기경에 음악이 발달하면서 '미'를 좀 더 간단한 정수비인 $\frac{4}{5}$로 나타내게 되었고, 이로써 17세기까지 사용된 음률인 순정률(Just Intonation)이 완성되었다.

순정률은 화음을 잘 이룬다는 장점이 있지만, 음 사이의 진동수의 비가 일정하지 않기 때문에 조를 바꾸게 되면 악기를 새로 조율해야 하는 문제가 있었다. 즉, 음 사이의 비율이 일정하지 않아서 '도'에서 시작하던 음악을 '레'에서 다시 시작하게 되면 이상하게 들렸던 것이다.

이와 같은 문제를 해결한 음률이 바로 17세기에 등장한 평균률(temperament)이다. 평균률은 1옥타브를 12등분하여 음 사이의 비율이 모두 동일한 진동수의 비($\sqrt[12]{2}$, 약 1.0595)를 가지기 때문에 어느 음정에서 음악을 시작해도 쉽게 연주할 수 있다.

중단원 마무리하기

01

|주안점| 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\overline{AB}=|-4-0|=4$

(2) $\overline{AB}=|1-(-6)|=7$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(8-3)^2}$
$=\sqrt{41}$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+\{-5-(-2)\}^2}$
$=\sqrt{10}$

답 (1) 4 (2) 7 (3) $\sqrt{41}$ (4) $\sqrt{10}$

02

|주안점| 수직선 위의 선분의 내분점, 외분점, 중점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{2\times8+3\times(-2)}{2+3}=2$$

(2) 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\frac{2\times8-3\times(-2)}{2-3}=-22$$

Ⅲ-1. 평면좌표

중단원 마무리하기

두 점 사이의 거리

(1) **수직선 위의 두 점 사이의 거리**

두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=|x_2-x_1|$$

(2) **좌표평면 위의 두 점 사이의 거리**

두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

특히, 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

수직선 위의 선분의 내분점과 외분점

(1) **수직선 위의 선분의 내분점**

두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\frac{x_1+x_2}{2}$$

(2) **수직선 위의 선분의 외분점**

두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로

❶ 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

❷ 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)\ (\text{단, } m\neq n)$$

특히, 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

기 본

01 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) A(0), B(−4)

(2) A(−6), B(1)

(3) A(−1, 3), B(3, 8)

(4) A(1, −2), B(2, −5)

02 두 점 A(−2), B(8)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

03 두 점 A(2, −3), B(−7, 3)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점

(3) 선분 AB의 중점

04 세 점 A(4, 5), B(−1, 3), C(3, −2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

121

(3) 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\frac{-2+8}{2}=3$$

답 (1) 2 (2) −22 (3) 3

03

|주안점| 좌표평면 위의 선분의 내분점, 외분점, 중점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{2\times(-7)+1\times2}{2+1}=-4,$$

$$y=\frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}=1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-4,\ 1)$

(2) 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{2\times(-7)-1\times2}{2-1}=-16,$$

$$y=\frac{2\times3-1\times(-3)}{2-1}=9$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-16,\ 9)$

(3) 선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{2+(-7)}{2}=-\frac{5}{2},$$

$$y=\frac{(-3)+3}{2}=0$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$

답 (1) $(-4,\ 1)$ (2) $(-16,\ 9)$ (3) $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$

04

|주안점| 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{4+(-1)+3}{3}=2,$$

$$y=\frac{5+3+(-2)}{3}=2$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(2,\ 2)$

답 $(2,\ 2)$

05

|주안점| 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구하여 주어진 조건을 만족시키는 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $\overline{\mathrm{AB}}=|x-3|$, $\overline{\mathrm{AC}}=|x-4|$이므로

$$|x-3|+|x-4|=9$$

(i) $x<3$일 때,

$-x+3-x+4=9$이므로 $x=-1$

(ii) $3\le x<4$일 때,

$x-3-x+4=9$이므로 만족시키는 x의 값은 없다.

(iii) $x\ge4$일 때,

$x-3+x-4=9$이므로 $x=8$

따라서 $a=8$, $b=-1$이므로 $a+b=7$

답 7

06

|주안점| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하여 주어진 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 합을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{2}$이므로

$$a^2+4a+4+16=32,\quad a^2+4a-12=0$$

$$(a+6)(a-2)=0,\quad a=-6 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-6+2=-4$

답 −4

07

| 주안점 | 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(a-4)^2+1^2,$$
$$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-3)^2+(-1)^2$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2&=(a-4)^2+1^2+(a-3)^2+(-1)^2\\&=2a^2-14a+27\\&=2\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

답 $\frac{5}{2}$

08

| 주안점 | 삼각형 ABC의 외심 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$임을 이용하여 외심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 삼각형 ABC의 외심을 $\mathrm{P}(x,\ y)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$이므로

$$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$$(x-1)^2+(y-0)^2=(x-1)^2+(y-6)^2$$
$$12y=36,\quad y=3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$에서

$$(x-1)^2+(y-0)^2=(x-3)^2+(y-2)^2$$
$$4x+4y-12=0,\quad x+y-3=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①을 ②에 대입하면 $\quad x=0$

따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(0,\ 3)$이다.

답 $(0,\ 3)$

09

| 주안점 | 좌표평면 위의 두 점을 잇는 선분의 내분점을 구하는 공식을 이용하여 양수 m의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:m$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{8+m}{2+m},\ \frac{8-2m}{2+m}\right)$$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$$\frac{8-2m}{2+m}=\frac{8+m}{2+m}-1$$
$$2m-2=0,\quad m=1$$

따라서 양수 m의 값은 1이다.

답 1

표준

05 세 점 $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(3)$, $\mathrm{C}(4)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=9$를 만족시키는 x의 값 중에서 양수를 a, 음수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

06 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(a,\ -3)$ 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

07 두 점 $\mathrm{A}(4,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값을 구하시오.

08 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 6)$, $\mathrm{C}(3,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하시오.

09 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$, $\mathrm{B}(4,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:m$으로 내분하는 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있을 때, 양수 m의 값을 구하시오.

122

10

| 주안점 | 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분함을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 평행사변형 ABCD에서

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점은 $\quad\left(3,\ \frac{6+b}{2}\right)$,

$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 $\quad\left(\frac{a+6}{2},\ 4\right)$

이고, 이 두 점이 일치하므로

$$\frac{a+6}{2}=3,\ \text{즉 } a=0$$
$$\frac{6+b}{2}=4,\ \text{즉 } b=2$$

따라서 구하는 값은 $\quad a+b=2$

답 2

11

| 주안점 | 선분의 내분점과 외분점을 구하는 공식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

문제 이해 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$$ ▶ 20 %

10 네 점 A(2, 6), B(a, 3), C(4, b), D(6, 5)를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

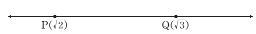
11 두 점 A(−2, −1), B(4, 7)을 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C에 대하여 $2\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, 점 C의 좌표를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발 전

12 x, y에 대한 방정식 $xy+x+y-2=0$을 만족시키는 정수 x, y를 좌표평면 위의 점 (x, y)로 나타낼 때, 이 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 두 대각선의 길이의 곱을 구하시오.

사고력+

13 다음 그림과 같이 수직선 위에 두 점 P($\sqrt{2}$), Q($\sqrt{3}$)이 놓여 있다.



세 점 A$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)$, B$\left(\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{1+3}\right)$, C$\left(\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-1}\right)$를 위의 수직선 위에 나타내고, 이를 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표의 크기를 비교하시오.

|서·술·형|

14 두 점 P(2, $\sqrt{5}$), Q(3, −4)에 대하여 ∠POQ의 이등분선과 선분 PQ의 교점의 x좌표를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, 점 O는 원점이다.)

해결 과정 점 C는 $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분하는 점이거나 3 : 2로 외분하는 점이다. ▶ 20 %

답 구하기 (i) $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분할 때, 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{1\times4-2\times(-2)}{1-2}, \frac{1\times7-2\times(-1)}{1-2}\right)$$

에서 $(-8, -9)$ ▶ 30 %

(ii) $\overline{AB}$를 3 : 2로 외분할 때, 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{3\times4-2\times(-2)}{3-2}, \frac{3\times7-2\times(-1)}{3-2}\right)$$

에서 $(16, 23)$ ▶ 30 %

12

| 주안점 | 방정식의 해를 좌표평면 위의 점으로 나타내고 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $xy+x+y-2=0$에서

$$x(y+1)+(y+1)-3=0, \quad (x+1)(y+1)=3$$

이때 x, y는 정수이므로

$x+1=-3$, $y+1=-1$ 또는 $x+1=-1$, $y+1=-3$ 또는 $x+1=3$, $y+1=1$ 또는 $x+1=1$, $y+1=3$

따라서 x, y에 대한 방정식을 만족시키는 점 (x, y)는

$$(-4, -2), (-2, -4), (2, 0), (0, 2)$$

이 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형은 직사각형이고, 한 대각선의 길이는

$$\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{2-(-4)\}^2}=2\sqrt{10}$$

직사각형의 두 대각선의 길이는 같으므로 구하는 값은

$$2\sqrt{10}\times2\sqrt{10}=40$$

답 40

13

| 주안점 | 수직선 위의 선분의 내분점과 외분점을 구하는 공식을 이용하여 주어진 점들을 수직선 위에 나타내고 좌표의 크기를 비교할 수 있게 한다.

| 풀이 | 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점, 점 B는 $\overline{PQ}$를 1 : 3으로 내분하는 점, 점 C는 $\overline{PQ}$를 3 : 1로 외분하는 점이므로 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면

이다.

따라서 세 점 A, B, C의 좌표의 크기를 비교하면 다음과 같다.

$$\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{1+3}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}<\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-1}$$

답 $\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{1+3}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}<\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-1}$

14

| 주안점 | 각의 이등분선의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

문제 이해 ∠POQ의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{PM}:\overline{MQ}$$

가 성립한다. ▶ 40 %

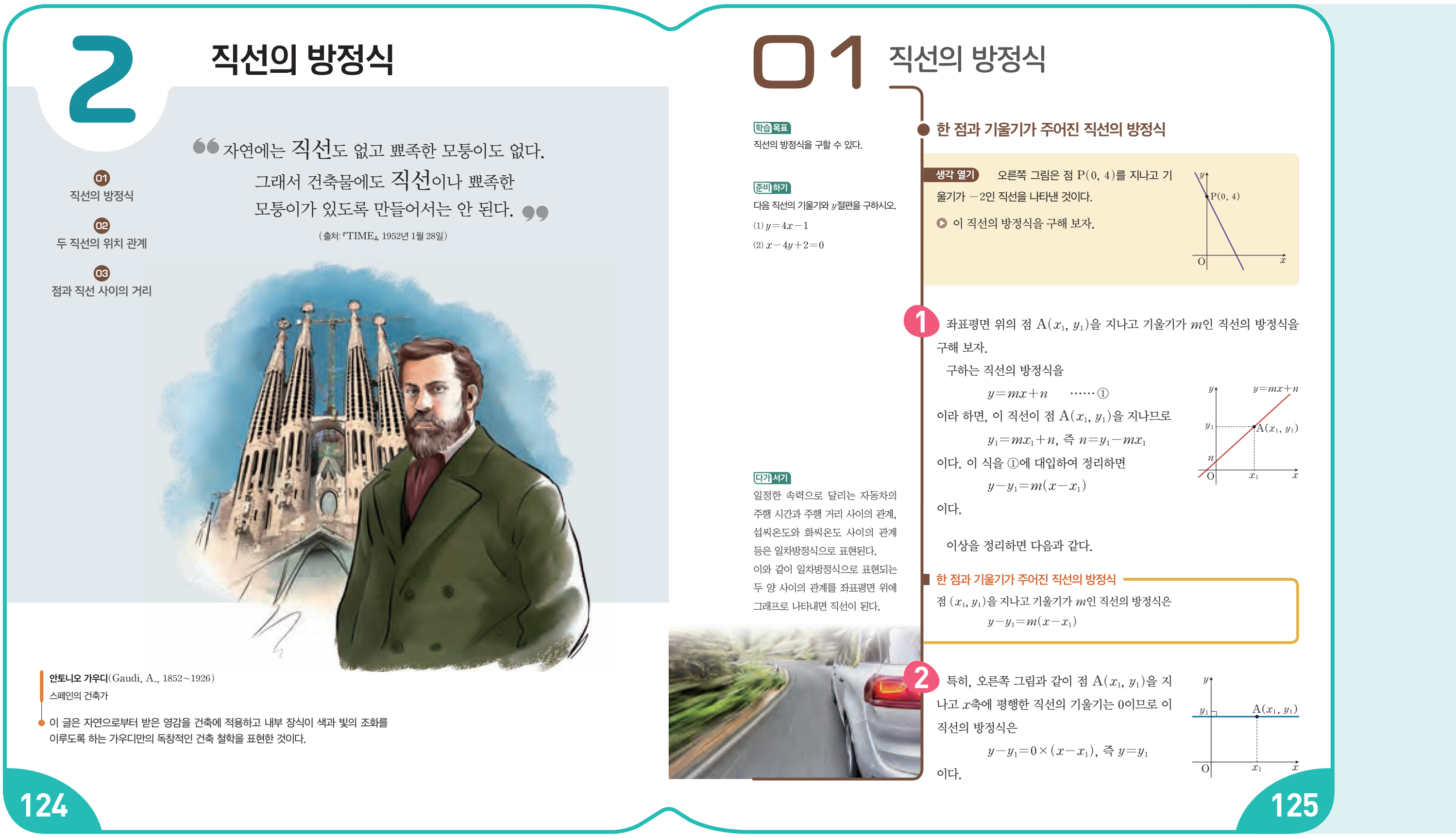
해결 과정 $\overline{OP}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$,

$\overline{OQ}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

이므로 점 M은 $\overline{PQ}$를 3 : 5로 내분하는 점이다. ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 교점의 x좌표는

$$\frac{3\times3+5\times2}{3+5}=\frac{19}{8}$$ ▶ 30 %



2 직선의 방정식

01 직선의 방정식

02 두 직선의 위치 관계

03 점과 직선 사이의 거리

"자연에는 직선도 없고 뾰족한 모퉁이도 없다. 그래서 건축물에도 직선이나 뾰족한 모퉁이가 있도록 만들어서는 안 된다."

(출처: 『TIME』, 1952년 1월 28일)

안토니오 가우디(Gaudi, A., 1852～1926)
스페인의 건축가

이 글은 자연으로부터 받은 영감을 건축에 적용하고 내부 장식이 색과 빛의 조화를 이루도록 하는 가우디만의 독창적인 건축 철학을 표현한 것이다.

124

01 직선의 방정식

학습 목표
직선의 방정식을 구할 수 있다.

준비하기
다음 직선의 기울기와 y절편을 구하시오.
(1) $y=4x-1$
(2) $x-4y+2=0$

다가서기
일정한 속력으로 달리는 자동차의 주행 시간과 주행 거리 사이의 관계, 섭씨온도와 화씨온도 사이의 관계 등은 일차방정식으로 표현된다.
이와 같이 일차방정식으로 표현되는 두 양 사이의 관계를 좌표평면 위에 그래프로 나타내면 직선이 된다.

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

생각 열기 오른쪽 그림은 점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$를 지나고 기울기가 -2인 직선을 나타낸 것이다.

▶ 이 직선의 방정식을 구해 보자.

1 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 직선의 방정식을

$$y=mx+n \quad \cdots\cdots ①$$

이라 하면, 이 직선이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로

$$y_1=mx_1+n,\ 즉\ n=y_1-mx_1$$

이다. 이 식을 ①에 대입하여 정리하면

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식
점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

2 특히, 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 기울기는 0이므로 이 직선의 방정식은

$$y-y_1=0\times(x-x_1),\ 즉\ y=y_1$$

이다.

125

중단원 도입

좌표평면에서 직선을 방정식으로 나타내면 직선의 위치 관계나 점과 직선 사이의 거리를 정확히 알 수 있고 이를 식으로도 나타낼 수 있다.

일반적으로 직선끼리는 서로 만나는 경우와 만나지 않는 경우가 있으므로 이를 바탕으로 직선의 위치 관계, 점과 직선 사이의 거리 등을 생각할 수 있다.

이 단원에서는 중학교에서 일차함수의 그래프로 다루었던 직선을 좌표평면 위의 도형으로 보고 그것을 방정식으로 표현하게 한다.

안토니오 가우디

안토니오 가우디(Gaudi, A., 1852～1926)는 스페인의 건축가로 17세 때부터 건축 공부를 시작하여 바르셀로나를 중심으로 독창적인 건축물을 많이 남겼다.

곡선이 지배적으로 사용된 가우디의 건축물은 섬세한 장식과 색채로 유명하다. 대표작으로는 독특한 형태와 내부 공간을 지닌 주택인 '카사 바트로'(1907년 완성)와 '카사 미라'(1907년 완성) 그리고 1884년에 착수하여 결국 필생의 대작이 된 '사그라다 파밀리아 성당' 등이 있다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

③ 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형이 직선임을 알게 한다.

지도상의 유의점

① 직선은 서로 다른 두 점에 의하여 결정됨을 이해하게 하고, 중학교에서 학습한 기울기, x절편, y절편의 뜻을 상기시킨다.

② 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 평행 또는 x축에 수직인 직선은 기울기가 정의되지 않음을 알게 하고, 이러한 직선의 방정식은 $x=x_1$로 나타냄을 이해하게 한다.

③ x축의 방정식은 $y=0$, y축의 방정식은 $x=0$임을 알게 한다.

④ 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형은 모두 직선이고 역으로 좌표평면 위에서 직선의 방정식은 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타낼 수 있음을 알게 한다.

보기 점 $(2,\ -3)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$$y-(-3)=-2(x-2),\text{ 즉 } y=-2x+1$$

문제 1 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-2,\ 4)$를 지나고 기울기가 3인 직선

(2) 점 $(1,\ 5)$를 지나고 y축에 수직인 직선

y축에 수직인 직선은 x축에 평행하다.

두 점을 지나는 직선의 방정식

다음을 통해 좌표평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방정식을 알아보자.

함께하기 다음은 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

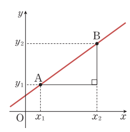
(i) $x_1 \neq x_2$일 때, 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$m=\frac{\square}{x_2-x_1}$$

이고, 이 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지난다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

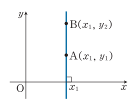
$$y-\square=\frac{\square}{x_2-x_1}(x-\square)$$



(ii) $x_1=x_2$일 때, 구하는 직선은 y축에 평행하고 직선 위의 모든 점의 x좌표는 □이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$x=\square$$



y축에 평행한 직선은 x축에 수직이다.

위의 활동으로부터 다음을 알 수 있다.

두 점을 지나는 직선의 방정식

서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

❶ $x_1 \neq x_2$일 때, $\quad y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

❷ $x_1=x_2$일 때, $\quad x=x_1$

❶의 경우 직선이 점 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$도 지나므로 직선의 방정식은 $y-y_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$로 나타낼 수도 있다.

126

준비하기

| 주안점 | 직선의 기울기와 y절편을 구할 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | (1) 기울기는 4이고 y절편은 -1이다.

(2) $x-4y+2=0$에서 $\quad y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$

따라서 기울기는 $\dfrac{1}{4}$이고 y절편은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 (1) 기울기: 4, y절편: -1 (2) 기울기: $\dfrac{1}{4}$, y절편: $\dfrac{1}{2}$

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

평가 기준
상 다양하게 주어지는 조건을 활용하여 직선의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중 한 점을 지나고 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다.
하 기울기와 y절편이 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 직선의 기울기와 y절편을 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있음을 알게 한다.

▶ 기울기가 -2이고 y절편이 4이므로 $\quad y=-2x+4$

내용 연구

❶ 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구하는 방법은 다음과 같이 설명할 수도 있다.
구하는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면
$x \neq x_1$일 때, 직선 AP의 기울기는

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

으로 점 P의 위치에 관계없이 일정하다. 이때 양변에 $x-x_1$을 곱하면 다음이 성립한다.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

또, 이 식은 $x=x_1$일 때도 성립하므로 구하는 직선의 방정식이다.

❷ 직선의 기울기가 0이라는 것은 x의 값이 변해도 y의 값은 변하지 않음을 뜻한다. 따라서 기울기가 0인 직선은 x축에 평행하다.
| 오개념 바로잡기 | 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 평행한 직선은 기울기가 정의되지 않으며, 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 기울기는 0임을 구분하여 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y-4=3(x+2)$, 즉 $y=3x+10$

(2) y축에 수직인 직선은 x축과 평행하므로 $\quad y=5$

답 (1) $y=3x+10$ (2) $y=5$

두 점을 지나는 직선의 방정식

함께하기

| 지도 방향 | 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구하여 직선의 방정식을 구하는 방법을 이해하게 한다.

| 풀이 | (i) $x_1 \neq x_2$일 때, 구하는 직선의 기울기는

$$m=\frac{\boxed{y_2-y_1}}{x_2-x_1}$$

이 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로

$$y-\boxed{y_1}=\frac{\boxed{y_2-y_1}}{x_2-x_1}(x-\boxed{x_1})$$

(ii) $x_1=x_2$일 때, 구하는 직선은 y축에 평행하고 직선 위의 모든 점의 x좌표는 $\boxed{x_1}$이므로 $\quad x=\boxed{x_1}$

답 (i) y_2-y_1, y_1, y_2-y_1, x_1 (ii) x_1, x_1

문제 풀이

문제 2

| 주안점 | 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y-3=\dfrac{-1-3}{8-4}(x-4)$, 즉 $y=-x+7$

(2) $y-3=\dfrac{7-3}{1-(-2)}(x+2)$, 즉 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{17}{3}$

(3) 두 점의 y좌표가 6으로 일정하므로 $y=6$

(4) 두 점의 x좌표가 5로 일정하므로 $x=5$

답 (1) $y=-x+7$ (2) $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{17}{3}$

(3) $y=6$ (4) $x=5$

문제 3

| 주안점 | x절편과 y절편을 이용하여 직선이 지나는 두 점을 알고, 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | x절편이 a이고 y절편이 b인 직선은 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나므로

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a),\quad y=-\frac{b}{a}(x-a),$$

$$\frac{b}{a}x+y=b$$

이때 $b\neq0$이므로 양변을 b로 나누면 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

답 풀이 참조

● 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형

내용 연구

1 직선의 방정식의 일반형을 $y=mx+n$이라 하면 y축에 평행하고 x축에 수직인 직선의 방정식을 나타낼 수 없으므로 $ax+by+c=0$을 직선의 방정식의 일반형으로 한다.

2 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$을 만족시키는 좌표평면 위의 점 전체는 직선을 나타내고, 역으로 좌표평면 위에서 직선 위의 임의의 점 $(x,\ y)$의 x좌표, y좌표는 일차방정식 $ax+by+c=0$을 만족시킴을 이해하도록 한다.

문제 풀이

문제 4

| 주안점 | x, y에 대한 일차방정식이 나타내는 도형이 직선임을 알고, 직선을 그릴 수 있게 한다.

보기 ① 두 점 A(1, 3), B(−1, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{5-3}{-1-1}(x-1),\ \text{즉}\ y=-x+4$$

② 두 점 A(4, 1), B(4, 7)을 지나는 직선의 방정식은 $x=4$

문제 2 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) A(4, 3), B(8, −1) (2) A(−2, 3), B(1, 7)

(3) A(−7, 6), B(0, 6) (4) A(5, 4), B(5, −1)

탐구 **문제 3** x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

과 같이 나타낼 수 있음을 설명하시오. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

● 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형

1 좌표평면에서 직선의 방정식은 모두 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타낼 수 있다.

2 또, 일차방정식 $ax+by+c=0$은

(i) $b\neq0$일 때, $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

(ii) $b=0$일 때, $x=-\dfrac{c}{a}$

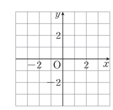
이다. 따라서 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형은 직선이다.

(i)에서 $a=0$이면 $y=-\dfrac{c}{b}$이다.
(ii)에서 $ax+by+c=0$이 일차방정식이므로 $b=0$이면 $a\neq0$이다.

문제 4 오른쪽 좌표평면 위에 다음 일차방정식이 나타내는 직선을 그리시오.

(1) $2x+3y+6=0$ (2) $2x-y=0$

(3) $3x-6=0$ (4) $2y+4=0$



127

| 풀이 | (1) $2x+3y+6=0$에서

$y=0$일 때, $2x+6=0$, $x=-3$

$x=0$일 때, $3y+6=0$, $y=-2$

따라서 일차방정식 $2x+3y+6=0$이 나타내는 도형은 두 점 $(-3,\ 0)$, $(0,\ -2)$를 지나는 직선이다.

(2) $2x-y=0$에서 $y=2x$

따라서 일차방정식 $2x-y=0$이 나타내는 도형은 기울기가 2이고 원점을 지나는 직선이다.

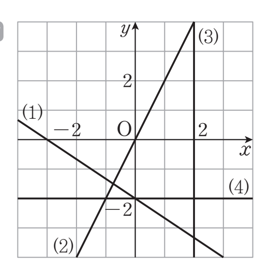
(3) $3x-6=0$에서 $x=2$

따라서 일차방정식 $3x-6=0$이 나타내는 도형은 점 $(2,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이다.

(4) $2y+4=0$에서 $y=-2$

따라서 일차방정식 $2y+4=0$이 나타내는 도형은 점 $(0,\ -2)$를 지나고 x축에 평행한 직선이다.

답



02 두 직선의 위치 관계

학습 목표
두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.

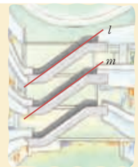
준비하기
다음 중에서 직선 $y=2x-3$에 평행한 직선의 방정식을 모두 찾으시오.
(1) $y=2x+4$
(2) $x+y+2=0$
(3) $y=-2x+1$
(4) $2x-y+5=0$

● 두 직선의 평행 조건

생각 열기 오른쪽 그림은 어느 건물에 설치된 에스컬레이터를 옆에서 바라본 모양이다.

❶ 두 직선 l과 m이 서로 평행하다고 할 수 있는지 말해 보자.

❷ 두 직선 l과 m의 기울기가 서로 같은지 말해 보자.



좌표평면에서 두 직선이 서로 평행할 조건을 알아보자.

두 직선

$l : y=mx+n$

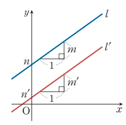
$l' : y=m'x+n'$

이 서로 평행하면, 두 직선의 기울기는 같지만 y절편은 다르다. 즉,

$m=m', \quad n\neq n'$

이다.

또, $m=m'$이고 $n\neq n'$이면 두 직선 l과 l'은 서로 평행하다.



다가서기
사람의 눈은 가끔 착각을 일으켜 실제와 다르게 사물을 인식하기 때문에, 평행한 두 직선도 상황에 따라 서로 평행하지 않은 것처럼 인식할 수도 있다.
두 직선의 방정식을 비교하면 이들이 서로 평행한지 아닌지 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

3 **두 직선의 평행 조건**
두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$에서
❶ 두 직선이 서로 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$이다.
❷ $m=m'$, $n\neq n'$이면 두 직선은 서로 평행하다.

4 (참고) 두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$에서 $m=m'$이고 $n=n'$이면 두 직선은 일치한다.

128

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

② 주어진 직선과 평행한 직선, 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

▌지도상의 유의점

① 두 직선의 위치 관계를 이해하기 위해서는 직선의 방정식을 $y=mx+n$의 꼴로 나타내는 것이 편리함을 이해하게 한다.

② 두 직선이 평행할 조건을 구체적인 예를 통하여 이해하게 하고, 두 직선이 일치할 조건과 구분하도록 한다.

③ 두 직선이 수직일 조건을 구하는 과정을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

▌준비하기

|주안점| 주어진 직선과 기울기가 같은 직선을 찾을 수 있는지 확인한다.

|풀이| 직선 $y=2x-3$의 기울기는 2

(1) 직선 $y=2x+4$의 기울기는 2

(2) $x+y+2=0$에서 $y=-x-2$

직선 $y=-x-2$의 기울기는 -1

(3) 직선 $y=-2x+1$의 기울기는 -2

(4) $2x-y+5=0$에서 $y=2x+5$

직선 $y=2x+5$의 기울기는 2

따라서 직선 $y=2x-3$에 평행한 직선의 방정식은 (1), (4)이다.

답 (1), (4)

● 두 직선의 평행 조건

평가 기준

상	두 직선의 평행 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
중	주어진 직선에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있다.
하	주어진 직선에 평행한 직선을 찾을 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 건물에 설치된 에스컬레이터가 서로 만나지 않으면서 나란하다는 사실을 통해 한 평면에서 두 직선이 서로 평행하다는 것의 뜻을 이해하게 하고, 두 직선이 서로 평행하면 기울기가 같음을 알게 한다.

❶ 서로 평행하다. ❷ 서로 같다.

내용 연구

3 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행할 조건을 다음과 같이 구할 수도 있다.
두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 할 때, 두 직선이 평행하면 $\theta_1=\theta_2$이다.
그런데 $m=\tan\theta_1$, $m'=\tan\theta_2$이므로 $m=m'$이다.
|오개념 바로잡기| 두 직선이 평행하려면 $m=m'$이지만 $n\neq n'$이어야 함을 주의한다.

4 두 직선 $ax+by+c=0\ (abc\neq 0)$,
$a'x+b'y+c'=0\ (a'b'c'\neq 0)$에서

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}, \quad y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$$

이므로 두 직선이 평행할 조건은

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$$

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 한 점을 지나고 주어진 직선에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 직선 $y=-x-4$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 -1이다.
따라서 점 $(3,\ -1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $\quad y+1=-(x-3)$, 즉 $y=-x+2$

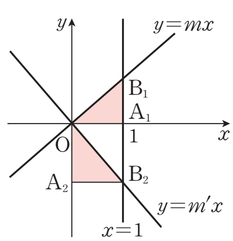
(2) 직선 $2x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+1$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다.
따라서 점 $(3,\ -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{2}{3}$인 직선의 방정식은 $\quad y+1=\frac{2}{3}(x-3)$, 즉 $y=\frac{2}{3}x-3$

답 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{2}{3}x-3$

● 두 직선의 수직 조건

내용 연구

① 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$가 수직일 조건을 다음과 같이 삼각형의 닮음을 이용하여 구할 수도 있다.
두 직선 $y=mx$, $y=m'x$와 직선 $x=1$의 교점을 각각 B_1, B_2라 하면 $B_1(1,\ m)$, $B_2(1,\ m')$이다.
두 점 $A_1(1,\ 0)$, $A_2(0,\ m')$을 잡으면 $\triangle OA_1B_1$과 $\triangle OA_2B_2$는 닮음이므로
$\overline{OA_1}:\overline{A_1B_1}=\overline{OA_2}:\overline{A_2B_2}$
$1:m=(-m'):1$
따라서 $\quad mm'=-1$



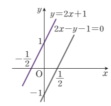
문제 풀이

문제 2

| 주안점 | 한 점을 지나고 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 직선 $x+2y-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+2$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 기울기는 2이다.
따라서 점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은 $\quad y-2=2(x-1)$, 즉 $y=2x$

예제 1 점 $(2, 5)$를 지나고 직선 $2x-y-1=0$에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.



풀이 직선 $2x-y-1=0$, 즉 $y=2x-1$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 2이다.
따라서 점 $(2, 5)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은
$$y-5=2(x-2),\ 즉\ y=2x+1$$

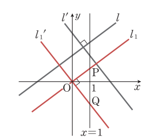
답 $y=2x+1$

문제 1 점 $(3, -1)$을 지나고 다음 직선에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=-x-4$ (2) $2x-3y+3=0$

● 두 직선의 수직 조건

좌표평면에서 두 직선이 서로 수직일 조건을 알아보자.
두 직선
$$l: y=mx+n,\quad l': y=m'x+n'$$
① 이 서로 수직이면, 이들에 각각 평행하고 원점을 지나는 두 직선
$$l_1: y=mx,\quad l_1': y=m'x$$
도 서로 수직이다.
두 직선 l_1, l_1'과 직선 $x=1$의 교점을 각각 P, Q라 하면
$$P(1,\ m),\quad Q(1,\ m')$$
이다. 삼각형 POQ는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여
$$\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2=\overline{PQ}^2$$
즉, $(1^2+m^2)+(1^2+m'^2)=(m-m')^2$이다. 이 식을 정리하면 다음과 같다.
$$mm'=-1$$
또, $mm'=-1$이면 $\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2=\overline{PQ}^2$이므로 삼각형 POQ는 $\angle POQ=90^\circ$인 직각삼각형이다.
따라서 두 직선 l_1과 l_1'은 서로 수직이므로 두 직선 l과 l'도 서로 수직이다.



129

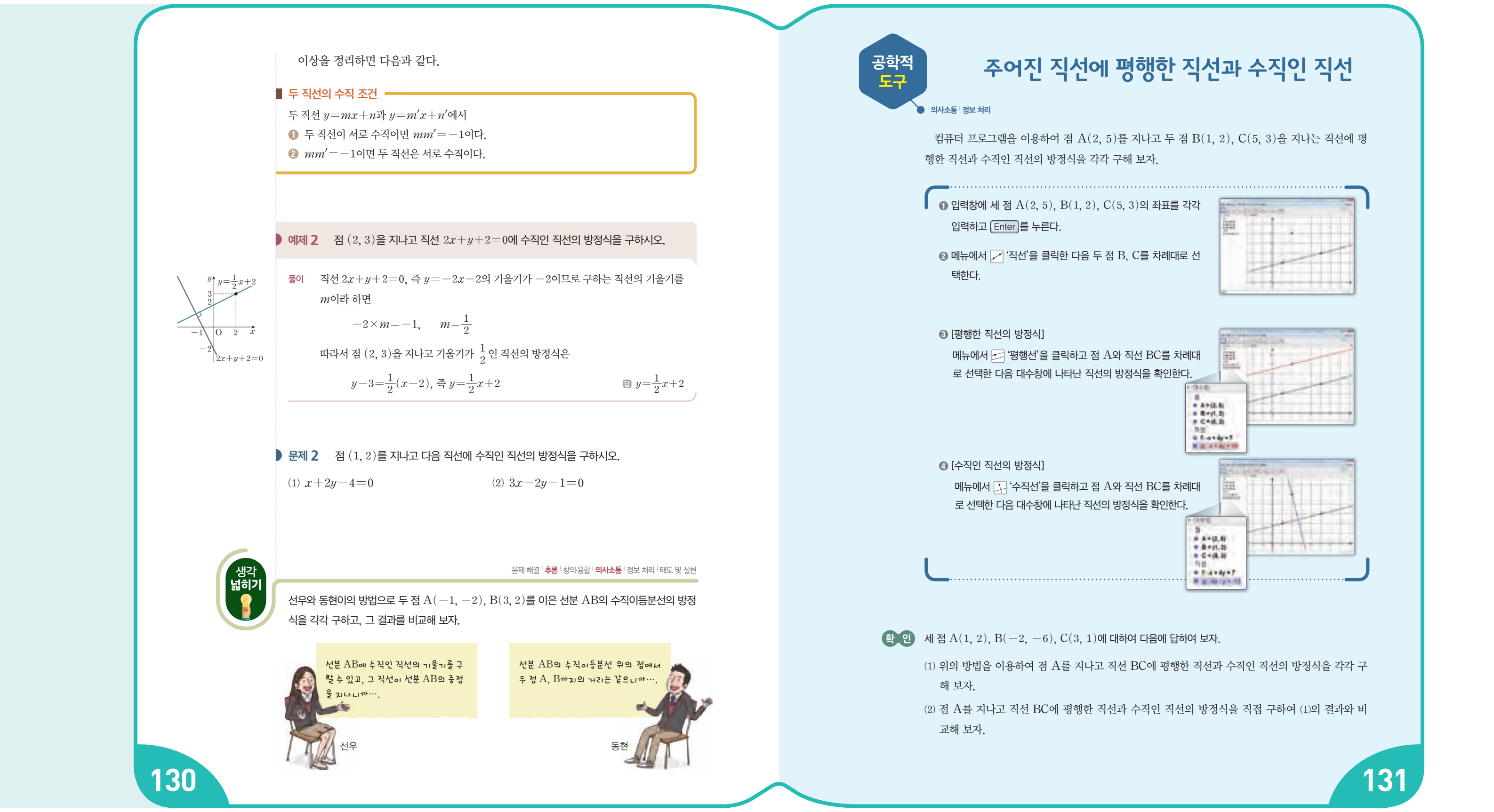
(2) 직선 $3x-2y-1=0$, 즉 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$의 기울기가 $\frac{3}{2}$이므로 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.
따라서 점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{2}{3}$인 직선의 방정식은 $\quad y-2=-\frac{2}{3}(x-1)$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$

답 (1) $y=2x$ (2) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$

지도 자료

삼각함수를 이용한 두 직선의 수직 조건

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직일 조건을 다음과 같이 삼각함수를 이용하여 구할 수도 있다.
두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 할 때, 두 직선이 수직이면 $\theta_2=\theta_1\pm90^\circ$이다. 이때
$$\tan\theta_2=\tan(\theta_1\pm90^\circ)=-\frac{1}{\tan\theta_1}$$
이므로 $m'=-\frac{1}{m}$에서 $\quad mm'=-1$



이상을 정리하면 다음과 같다.

두 직선의 수직 조건

두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$에서

❶ 두 직선이 서로 수직이면 $mm'=-1$이다.

❷ $mm'=-1$이면 두 직선은 서로 수직이다.

예제 2 점 $(2, 3)$을 지나고 직선 $2x+y+2=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

풀이 직선 $2x+y+2=0$, 즉 $y=-2x-2$의 기울기가 -2이므로 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$-2\times m=-1, \quad m=\frac{1}{2}$$

따라서 점 $(2, 3)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2), \text{ 즉 } y=\frac{1}{2}x+2$$

답 $y=\frac{1}{2}x+2$

문제 2 점 $(1, 2)$를 지나고 다음 직선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $x+2y-4=0$ (2) $3x-2y-1=0$

생각 넓히기 문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

선우와 동현이의 방법으로 두 점 $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$를 이은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 각각 구하고, 그 결과를 비교해 보자.

130

공학적 도구 **주어진 직선에 평행한 직선과 수직인 직선**

의사소통 | 정보 처리

컴퓨터 프로그램을 이용하여 점 $A(2, 5)$를 지나고 두 점 $B(1, 2)$, $C(5, 3)$을 지나는 직선에 평행한 직선과 수직인 직선의 방정식을 각각 구해 보자.

❶ 입력창에 세 점 $A(2, 5)$, $B(1, 2)$, $C(5, 3)$의 좌표를 각각 입력하고 Enter를 누른다.

❷ 메뉴에서 '직선'을 클릭한 다음 두 점 B, C를 차례대로 선택한다.

❸ [평행한 직선의 방정식]
메뉴에서 '평행선'을 클릭하고 점 A와 직선 BC를 차례대로 선택한 다음 대수창에 나타난 직선의 방정식을 확인한다.

❹ [수직인 직선의 방정식]
메뉴에서 '수직선'을 클릭하고 점 A와 직선 BC를 차례대로 선택한 다음 대수창에 나타난 직선의 방정식을 확인한다.

확인 세 점 $A(1, 2)$, $B(-2, -6)$, $C(3, 1)$에 대하여 다음에 답하여 보자.

(1) 위의 방법을 이용하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선과 수직인 직선의 방정식을 각각 구해 보자.

(2) 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선과 수직인 직선의 방정식을 직접 구하여 (1)의 결과와 비교해 보자.

131

생각 넓히기

|지도 방향| 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식을 구하는 방법을 생각해 볼 수 있게 한다.

|풀이| [선우] 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-(-2)}{3-(-1)}=1$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

두 점 A, B의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{-1+3}{2}=1, \quad y=\frac{-2+2}{2}=0$$

에서 중점의 좌표는 $(1, 0)$

즉, 점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y-0=-(x-1), \text{ 즉 } y=-x+1$$

[동현] $\overline{AB}$의 수직이등분선 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2},$$

$$x^2+2x+y^2+4y+5=x^2-6x+y^2-4y+13$$

즉, $8x+8y-8=0$에서 $y=-x+1$

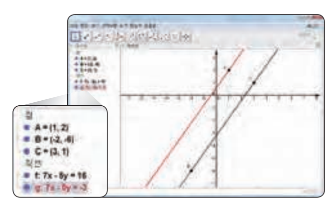
따라서 선우와 동현이의 방법으로 구한 결과는 서로 같다.

답 풀이 참조

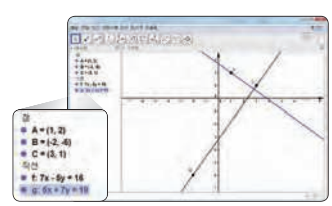
공학적 도구 주어진 직선에 평행한 직선과 수직인 직선

|지도 방향| 컴퓨터 프로그램을 이용하여 직선의 방정식을 구해 보고, 직선의 방정식을 직접 구한 결과와 비교해 볼 수 있게 한다.

|풀이| (1) [평행한 직선의 방정식]



[수직인 직선의 방정식]



(2) 평행한 직선의 방정식: $y=\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}$

수직인 직선의 방정식: $y=-\frac{5}{7}x+\frac{19}{7}$

(1)에서 구한 결과를 정리하면 위의 식과 서로 같다.

답 풀이 참조

소단원 지도 개관

지도 목표

① 좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리의 뜻을 이해하게 한다.

② 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이해하게 하고, 이를 이용하여 한 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 좌표평면 위의 한 점과 그 점을 지나지 않는 직선 사이의 거리는 직선에 내린 수선의 발까지의 거리, 즉 점과 직선 사이의 최단 거리임을 이해하게 한다.

② 점과 직선 사이의 거리 공식에서 절댓값 기호가 사용된 이유를 알게 한다.

③ 점과 직선 사이의 거리를 구할 때, 직선의 방정식이 표준형 $y=mx+n$의 꼴로 주어지면 일반형 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타내어 공식을 적용하도록 한다.

④ 평행한 두 직선 사이의 거리는 직선 위의 한 점과 다른 직선 사이의 거리를 구하는 것임을 이해하게 한다.

준비하기

|주안점| 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는지 확인한다.

|풀이| 두 점 A$(3,\ -1)$, B$(-1,\ 4)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1-3)^2+\{4-(-1)\}^2}=\sqrt{41}$$

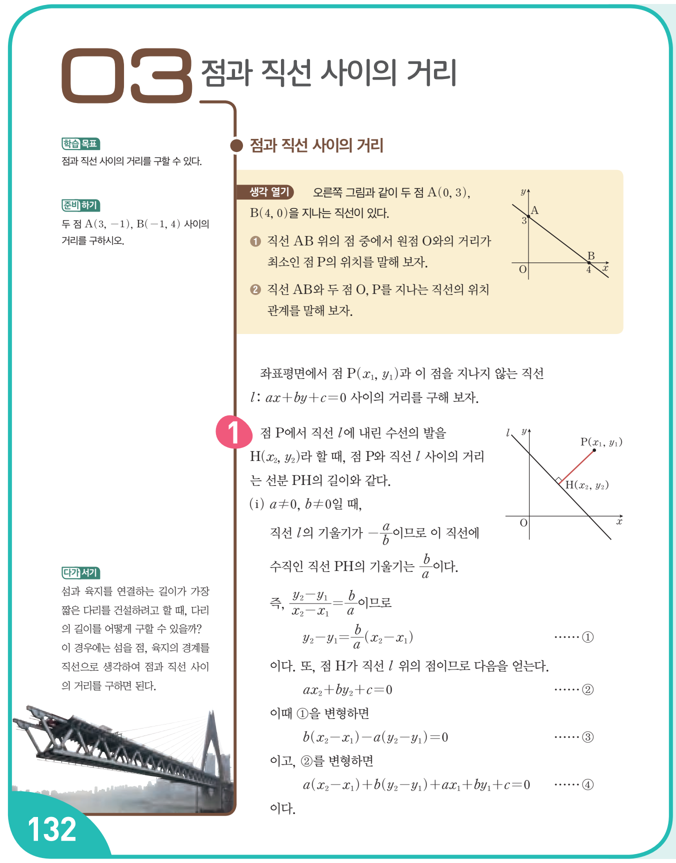
답 $\sqrt{41}$

● 점과 직선 사이의 거리

평가 기준
상 점과 직선 사이의 거리를 구하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
중 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
하 점과 직선 사이의 거리의 뜻을 알고, 좌표축에 평행한 직선과 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 한 점과 직선 사이의 거리가 최소가 되게 생각해 보게 한다. 또, 이 두 점 사이의 거리를 점과 직선 사이의 거리로 정의함을 이해하게 한다.



03 점과 직선 사이의 거리

학습 목표
점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

준비하기
두 점 A$(3,\ -1)$, B$(-1,\ 4)$ 사이의 거리를 구하시오.

● 점과 직선 사이의 거리

생각 열기 오른쪽 그림과 같이 두 점 A$(0,\ 3)$, B$(4,\ 0)$을 지나는 직선이 있다.

❶ 직선 AB 위의 점 중에서 원점 O와의 거리가 최소인 점 P의 위치를 말해 보자.

❷ 직선 AB와 두 점 O, P를 지나는 직선의 위치 관계를 말해 보자.

좌표평면에서 점 P$(x_1,\ y_1)$과 이 점을 지나지 않는 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 거리를 구해 보자.

1 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H$(x_2,\ y_2)$라 할 때, 점 P와 직선 l 사이의 거리는 선분 PH의 길이와 같다.

(i) $a\neq0,\ b\neq0$일 때,

직선 l의 기울기가 $-\frac{a}{b}$이므로 이 직선에 수직인 직선 PH의 기울기는 $\frac{b}{a}$이다.

즉, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b}{a}$이므로

$$y_2-y_1=\frac{b}{a}(x_2-x_1) \quad \cdots\cdots ①$$

이다. 또, 점 H가 직선 l 위의 점이므로 다음을 얻는다.

$$ax_2+by_2+c=0 \quad \cdots\cdots ②$$

이때 ①을 변형하면

$$b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

이고, ②를 변형하면

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+ax_1+by_1+c=0 \quad \cdots\cdots ④$$

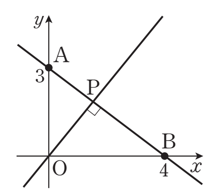
이다.

다가서기
섬과 육지를 연결하는 길이가 가장 짧은 다리를 건설하려고 할 때, 다리의 길이를 어떻게 구할 수 있을까? 이 경우에는 섬을 점, 육지의 경계를 직선으로 생각하여 점과 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

132

❶ 원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발이다.

❷ 두 직선 AB와 OP는 서로 수직이다.



내용 연구

1 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식은 다음과 같이 유도할 수도 있다.

직선 PH와 직선 $l: ax+by+c=0$이 수직이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

에서

$$\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}$$

위의 식의 값을 k로 놓으면

$$\frac{x_2-x_1}{a}=k,\quad \frac{y_2-y_1}{b}=k$$

$$x_2=ak+x_1,\quad y_2=bk+y_1 \quad \cdots\cdots ①$$

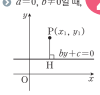
③과 ④를 연립하여 x_2-x_1과 y_2-y_1을 구하면 다음과 같다.

$$x_2-x_1=-\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2},\quad y_2-y_1=-\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

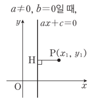
따라서 점 P와 직선 l 사이의 거리 $\overline{\mathrm{PH}}$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PH}}&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=\sqrt{\left\{-\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right\}^2+\left\{-\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right\}^2}\\&=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\cdots\cdots ⑤\end{aligned}$$

$a=0$, $b\neq0$일 때,



$a\neq0$, $b=0$일 때,



2 (ii) $a=0$, $b\neq0$ 또는 $a\neq0$, $b=0$일 때,

직선 l은 x축 또는 y축에 평행하고 이 경우에도 점 P와 직선 l 사이의 거리 $\overline{\mathrm{PH}}$는 ⑤와 같다.

특히, 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히, 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

보기 점 $(-5, 3)$과 직선 $4x-3y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\times(-5)-3\times3+4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{25}{5}=5$$

문제 1 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) 점 $(-1, 2)$와 직선 $3x+4y-1=0$

(2) 원점과 직선 $y=2x-4$

133

이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PH}}&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=\sqrt{(ak)^2+(bk)^2}=|k|\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

이때 점 H가 직선 $ax+by+c=0$ 위의 점이므로

$$ax_2+by_2+c=0\qquad\cdots\cdots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$a(ak+x_1)+b(bk+y_1)+c=0$$

에서

$$k=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=|k|\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2 $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\cdots\cdots ①$

라 하면

(i) $a=0$, $b\neq0$일 때,

직선 l은 $by+c=0$, 즉 $y=-\dfrac{c}{b}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\left|y_1+\frac{c}{b}\right|$$

이는 ①에 $a=0$을 대입한 것과 같다.

(ii) $a\neq0$, $b=0$일 때

직선 l은 $ax+c=0$, 즉 $x=-\dfrac{c}{a}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\left|x_1+\frac{c}{a}\right|$$

이는 ①에 $b=0$을 대입한 것과 같다.

(i), (ii)에서 $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$는

$a=0$, $b\neq0$ 또는 $a\neq0$, $b=0$일 때도 성립한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 점 $(-1, 2)$와 직선 $3x+4y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\times(-1)+4\times2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$$

(2) 원점 $(0, 0)$과 직선 $y=2x-4$, 즉 $2x-y-4=0$ 사이의 거리는

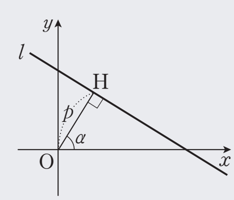
$$\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

답 (1) $\dfrac{4}{5}$ (2) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

지도 자료

헤세(Hesse)의 표준형

원점 O에서 직선 l에 그은 수선 OH의 길이를 p, 직선 OH가 x축과 이루는 각의 크기를 α라 하면 점 H의 좌표는 $(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$이고, 직선 OH의 기울기는 $\tan\alpha$이다.



직선 l은 점 H를 지나고 직선 OH에 수직이므로 직선 l의 방정식은

$$y-p\sin\alpha=-\frac{1}{\tan\alpha}(x-p\cos\alpha)$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p\qquad\cdots\cdots ①$$

이때 방정식 ①을 헤세의 표준형이라고 한다.

또한, 점 (x_1, y_1)에서 직선 ①에 이르는 거리를 구하면

$$\frac{|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|$$

임을 알 수 있다.

문제 풀이

문제 2

|주안점| 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

|풀이| $3x-y+4=0 \quad \cdots\cdots ①$

$3x-y-1=0 \quad \cdots\cdots ②$

직선 ① 위의 한 점 P(0, 4)를 잡으면 두 직선 ①과 ② 사이의 거리는 점 P와 직선 ② 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3\times0-4-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{10}}{2}$이다.

답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

문제 3

|주안점| 한 점에서의 거리와 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 구하는 직선의 방정식을 $3x-4y+k=0$이라 하면 원점과 이 직선 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}=1$$

$|k|=5$

$k=5$ 또는 $k=-5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$3x-4y+5=0$ 또는 $3x-4y-5=0$

(2) 구하는 직선의 방정식을 $2x+y+k=0$이라 하면 점 $(0, 1)$과 이 직선 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|2\times0+1+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{5}}=3$$

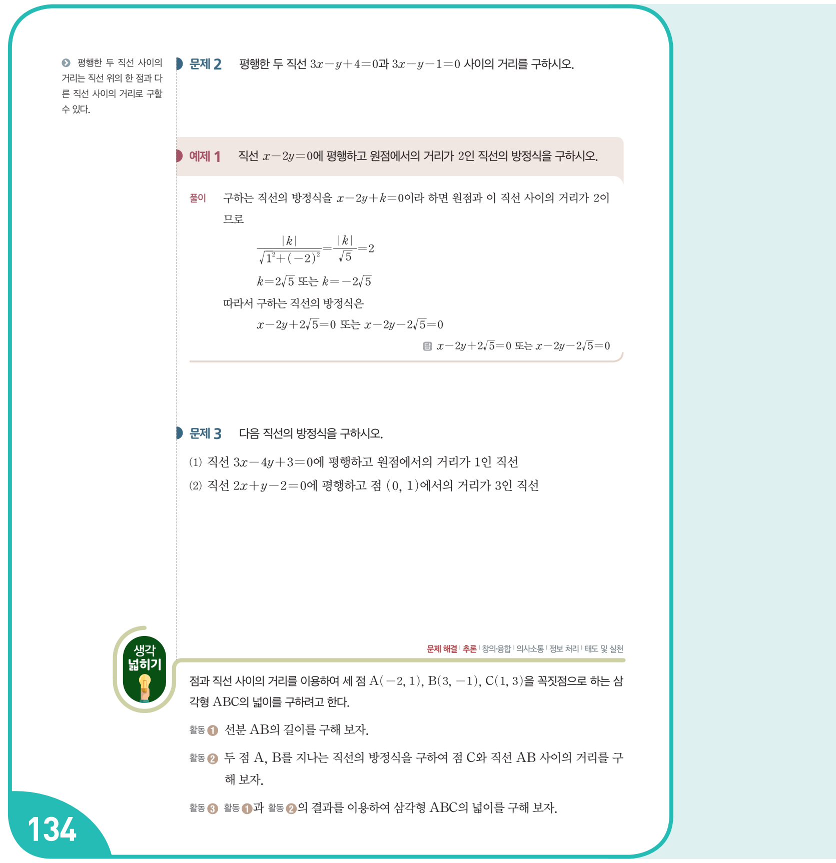
$|1+k|=3\sqrt{5}$

$k=3\sqrt{5}-1$ 또는 $k=-3\sqrt{5}-1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x+y+3\sqrt{5}-1=0$ 또는 $2x+y-3\sqrt{5}-1=0$

답 (1) $3x-4y+5=0$ 또는 $3x-4y-5=0$
(2) $2x+y+3\sqrt{5}-1=0$ 또는 $2x+y-3\sqrt{5}-1=0$



평행한 두 직선 사이의 거리는 직선 위의 한 점과 다른 직선 사이의 거리로 구할 수 있다.

문제 2 평행한 두 직선 $3x-y+4=0$과 $3x-y-1=0$ 사이의 거리를 구하시오.

예제 1 직선 $x-2y=0$에 평행하고 원점에서의 거리가 2인 직선의 방정식을 구하시오.

풀이 구하는 직선의 방정식을 $x-2y+k=0$이라 하면 원점과 이 직선 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}=2$$

$k=2\sqrt{5}$ 또는 $k=-2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x-2y+2\sqrt{5}=0$ 또는 $x-2y-2\sqrt{5}=0$

답 $x-2y+2\sqrt{5}=0$ 또는 $x-2y-2\sqrt{5}=0$

문제 3 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 직선 $3x-4y+3=0$에 평행하고 원점에서의 거리가 1인 직선

(2) 직선 $2x+y-2=0$에 평행하고 점 $(0, 1)$에서의 거리가 3인 직선

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

점과 직선 사이의 거리를 이용하여 세 점 A(−2, 1), B(3, −1), C(1, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하려고 한다.

활동 ① 선분 AB의 길이를 구해 보자.

활동 ② 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하여 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구해 보자.

활동 ③ 활동 ①과 활동 ②의 결과를 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구해 보자.

134

생각 넓히기

|지도 방향| 삼각형의 세 꼭짓점 중 두 꼭짓점을 연결한 직선의 방정식을 만들고 나머지 한 꼭짓점과 직선 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

|풀이| ① 두 점 A(−2, 1), B(3, −1) 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(-1-1)^2}=\sqrt{29}$$

② 두 점 A(−2, 1), B(3, −1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{-1-1}{3-(-2)}(x+2),\ 즉\ 2x+5y-1=0$$

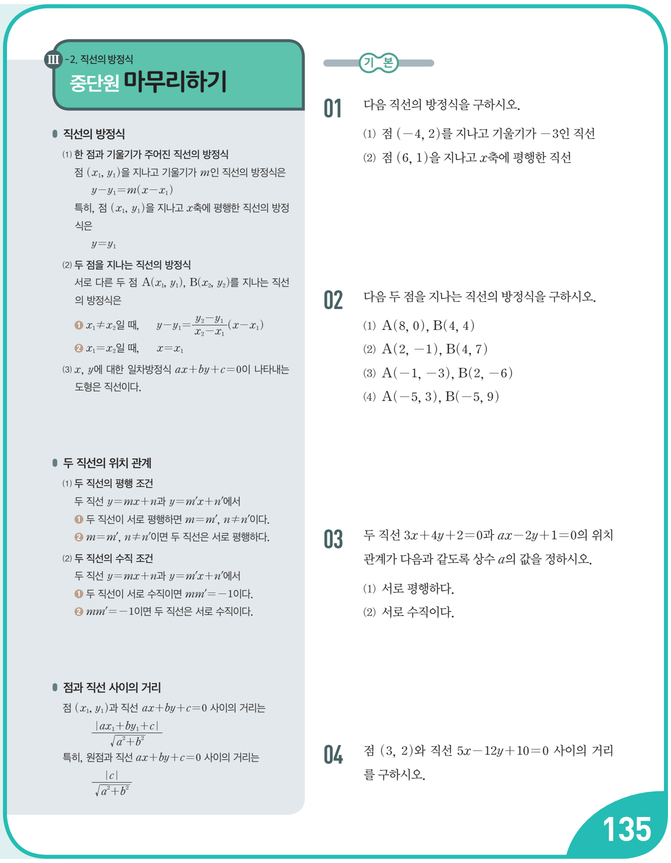
따라서 점 C(1, 3)과 직선 $2x+5y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times1+5\times3-1|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{16\sqrt{29}}{29}$$

③ 삼각형 ABC는 밑변의 길이가 $\sqrt{29}$, 높이가 $\frac{16\sqrt{29}}{29}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{29}\times\frac{16\sqrt{29}}{29}=8$$

답 ① $\sqrt{29}$ ② $\frac{16\sqrt{29}}{29}$ ③ 8


III-2. 직선의 방정식

중단원 마무리하기

직선의 방정식

(1) **한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식**

점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$

특히, 점 (x_1, y_1)을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=y_1$

(2) **두 점을 지나는 직선의 방정식**

서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

❶ $x_1 \neq x_2$일 때, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

❷ $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$

(3) x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형은 직선이다.

두 직선의 위치 관계

(1) **두 직선의 평행 조건**

두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$에서

❶ 두 직선이 서로 평행하면 $m=m'$, $n \neq n'$이다.

❷ $m=m'$, $n \neq n'$이면 두 직선은 서로 평행하다.

(2) **두 직선의 수직 조건**

두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$에서

❶ 두 직선이 서로 수직이면 $mm'=-1$이다.

❷ $mm'=-1$이면 두 직선은 서로 수직이다.

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

특히, 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

기본

01 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-4, 2)$를 지나고 기울기가 -3인 직선

(2) 점 $(6, 1)$을 지나고 x축에 평행한 직선

02 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(4, 4)$

(2) $\mathrm{A}(2, -1)$, $\mathrm{B}(4, 7)$

(3) $\mathrm{A}(-1, -3)$, $\mathrm{B}(2, -6)$

(4) $\mathrm{A}(-5, 3)$, $\mathrm{B}(-5, 9)$

03 두 직선 $3x+4y+2=0$과 $ax-2y+1=0$의 위치 관계가 다음과 같도록 상수 a의 값을 정하시오.

(1) 서로 평행하다.

(2) 서로 수직이다.

04 점 $(3, 2)$와 직선 $5x-12y+10=0$ 사이의 거리를 구하시오.

135

|참고| 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$$

따라서 세 점 $\mathrm{A}(-2, 1)$, $\mathrm{B}(3, -1)$, $\mathrm{C}(1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}|\{(-2)\times(-1)+3\times3+1\times1\}-\{3\times1+1\times(-1)+(-2)\times3\}|$$

$$=\frac{1}{2}|12-(-4)|=8$$

중단원 마무리하기

01

|주안점| 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $y-2=-3\{x-(-4)\}$, 즉 $y=-3x-10$

(2) x축에 평행한 직선은 기울기가 0이므로

$$y-1=0\times(x-6),\quad y=1$$

답 (1) $y=-3x-10$ (2) $y=1$

02

|주안점| 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 두 점 $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(4, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{4-0}{4-8}(x-8),\text{ 즉 } y=-x+8$$

(2) 두 점 $\mathrm{A}(2, -1)$, $\mathrm{B}(4, 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{7-(-1)}{4-2}(x-2),\text{ 즉 } y=4x-9$$

(3) 두 점 $\mathrm{A}(-1, -3)$, $\mathrm{B}(2, -6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{-6-(-3)}{2-(-1)}(x+1),\text{ 즉 } y=-x-4$$

(4) 두 점의 x좌표가 -5로 일정하므로 구하는 직선의 방정식은 $x=-5$

답 (1) $y=-x+8$ (2) $y=4x-9$ (3) $y=-x-4$ (4) $x=-5$

03

|주안점| 주어진 직선과 평행한 직선의 방정식과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 직선 $3x+4y+2=0$에서

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$$

직선 $ax-2y+1=0$에서

$$y=\frac{a}{2}x+\frac{1}{2}$$

(1) 두 직선의 기울기가 같으므로

$$-\frac{3}{4}=\frac{a}{2}\text{에서}\quad a=-\frac{3}{2}$$

(2) 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

$$-\frac{3}{4}\times\frac{a}{2}=-1\text{에서}\quad a=\frac{8}{3}$$

답 (1) $-\dfrac{3}{2}$ (2) $\dfrac{8}{3}$

04

|주안점| 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 $(3, 2)$와 직선 $5x-12y+10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5\times3-12\times2+10|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{1}{13}$$

답 $\dfrac{1}{13}$

05

| 주안점 | 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 실수 a의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 두 점 $\mathrm{B}(4,\ 8)$, $\mathrm{C}(-2,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-8=\frac{4-8}{-2-4}(x-4),\ \text{즉}\ y=\frac{2}{3}x+\frac{16}{3}$$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(a,\ a+2)$를 지나므로

$$a+2=\frac{2}{3}a+\frac{16}{3},\quad \frac{1}{3}a=\frac{10}{3},\quad a=10$$

답 10

06

| 주안점 | 주어진 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 이용하여 양수 k의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 직선 $3x-ky-3k=0$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 삼각형이다.
이 삼각형의 넓이가 15이고 직선 $3x-ky-3k=0$의 x절편은 k, y절편은 -3이므로

$$\frac{1}{2}\times k\times 3=15$$

따라서 $k=10$

답 10

07

| 주안점 | 두 직선의 교점을 지나고 주어진 직선과 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 두 직선의 방정식

$$x-2y+2=0,\quad 2x+y-6=0$$

을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$이므로
두 직선의 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$
직선 $9x-3y+1=0$, 즉 $y=3x+\frac{1}{3}$과 평행한 직선의 기울기는 3이다.
따라서 점 $(2,\ 2)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y-2=3(x-2),\ \text{즉}\ y=3x-4$$

답 $y=3x-4$

08

| 주안점 | 두 직선의 수직 조건을 이용하여 실수 k의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 직선 $(3k+2)x-y+2=0$, 즉 $y=(3k+2)x+2$의 기울기가 $3k+2$이고, y절편이 2이다.
이 직선과 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$$(3k+2)\times m=-1,\quad m=-\frac{1}{3k+2}$$

기울기가 $-\frac{1}{3k+2}$이고, y절편이 2인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{3k+2}x+2$$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $-\frac{1}{3k+2}+2=0$

따라서 $k=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

09

| 주안점 | 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 직선 $ax+by+2=0$이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$$a+b+2=0,\quad a+b=-2 \quad \cdots\cdots ①$$

원점 O와 이 직선 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5},$$

표준

05 점 $\mathrm{A}(a,\ a+2)$가 두 점 $\mathrm{B}(4,\ 8)$, $\mathrm{C}(-2,\ 4)$를 지나는 직선 위에 있을 때, 실수 a의 값을 구하시오.

06 일차방정식 $3x-ky-3k=0$이 나타내는 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 15일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

07 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 지나고 직선 $9x-3y+1=0$과 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

08 직선 $(3k+2)x-y+2=0$과 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선이 y축에서 수직으로 만날 때, 실수 k의 값을 구하시오.

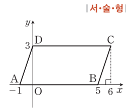
09 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선 $ax+by+2=0$에 대하여 원점 O와 이 직선 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{10}}{5}$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

136

10 직선 $4x-3y=0$에 평행하고 점 $(1,\ -1)$에서의 거리가 2인 직선의 y절편을 구하시오.
(단, y절편은 양수이다.)

|서·술·형|

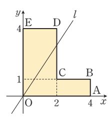
11 오른쪽 그림과 같이 네 점 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(6, 3)$, $D(0, 3)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD가 있다. 두 직선 AD, BC 사이의 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



발전

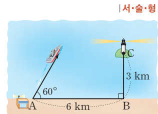
사고력+

12 오른쪽 그림에서 원점을 지나는 직선 l은 여섯 개의 점 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 1)$, $C(2, 1)$, $D(2, 4)$, $E(0, 4)$를 선분으로 이은 도형 OABCDE의 넓이를 이등분한다. 이때 직선 l의 기울기를 구하시오.



|서·술·형|

13 오른쪽 그림과 같이 일직선으로 뻗은 해안선의 A 지점에 부두가 있고, 부두로부터 6 km 떨어진 B 지점에서 수직으로 3 km 떨어진 C 지점에 등대가 있다. 부두에서 배가 해안선에 대하여 60°를 이루면서 움직일 때, 등대와 배 사이의 최단 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



137

$a^2+b^2=10$ $\cdots\cdots$ ②

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$이므로 ①, ②를 이 식에 대입하여 정리하면

$(-2)^2=10+2ab,\quad 2ab=-6$

따라서 $\quad ab=-3$

답 -3

10

|주안점| 두 직선의 평행 조건, 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 직선의 y절편을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 직선 $4x-3y=0$과 평행한 직선의 방정식을 $4x-3y+k=0$이라 하면 점 $(1,\ -1)$과 이 직선 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|4\times1-3\times(-1)+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2,\quad \frac{|7+k|}{5}=2,$$

$|7+k|=10$

따라서 $\quad k=3$ 또는 $k=-17$

이때 y절편은 양수이므로 직선의 방정식은 $4x-3y+3=0$이고, 구하는 직선의 y절편은 1이다.

답 1

11

|주안점| 평행사변형에서 평행한 두 변 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

해결 과정 두 점 $A(-1,\ 0)$, $D(0,\ 3)$을 지나는 직선 AD의 방정식은

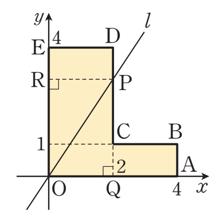
$y=3x+3,\quad 3x-y+3=0$ ▶ 40 %

답 구하기 두 직선 AD, BC 사이의 거리는 점 $B(5,\ 0)$과 직선 $3x-y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3\times5-0+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{18}{\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{10}}{5}$$ ▶ 60 %

12

|주안점| 주어진 도형의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 구할 수 있게 한다.



|풀이| 직선 l과 선분 CD의 교점을 P라 하고 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 △OQP의 넓이와 △OPR의 넓이가 서로 같으므로 □ABCQ와 □DERP의 넓이가 서로 같다.

$\overline{ER}=1$이므로 점 P의 좌표는 $\quad (2,\ 3)$

직선 l은 두 점 O, P를 지나는 직선이므로 그 기울기는

$$\frac{3-0}{2-0}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

13

|주안점| 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

해결 과정 직선 AB를 x축으로 하고, 직선 BC를 y축으로 하는 좌표평면에서 점 A의 좌표는 $(-6,\ 0)$, 점 B의 좌표는 $(0,\ 0)$, 점 C의 좌표는 $(0,\ 3)$이다. ▶ 20 %

점 A를 지나고 주어진 조건을 만족시키는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}(x+6),\quad \sqrt{3}x-y+6\sqrt{3}=0$ ▶ 50 %

답 구하기 등대와 배 사이의 최단 거리는 점 C와 위의 직선 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|\sqrt{3}\times0-3+6\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{3}-3}{2}$$

따라서 구하는 최단 거리는 $\quad \frac{6\sqrt{3}-3}{2}$ km ▶ 30 %

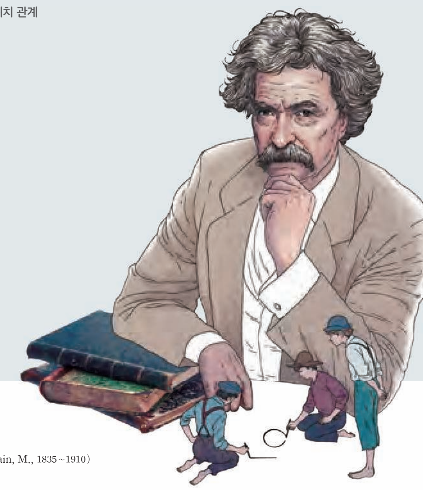
3 원의 방정식

01 원의 방정식

02 원과 직선의 위치 관계

“원은 가운데에 구멍이 뚫려 있는 둥근 직선이다.”

(출처: Twain, M., 『English as She is Taught』)



마크 트웨인(Twain, M., 1835~1910)
미국의 소설가

이 글은 동화 『톰 소여의 모험』으로 유명한 마크 트웨인이 수필집인 『그녀가 배운 영어(English as She is Taught)』에서 어린아이들이 직선을 '두 지점 사이의 거리'로, 원을 이렇게 설명한다고 예를 들면서 한 말이다.

138

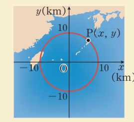
01 원의 방정식

학습 목표
원의 방정식을 구할 수 있다.

준비 하기
중심의 좌표가 (1, 1)이고 점 (4, 5)를 지나는 원의 반지름의 길이를 구하시오.

원의 방정식

생각 열기 오른쪽 그림에서 원점 O는 태풍의 중심이고, 이로부터 반지름의 길이가 10 km 이내의 지역에 형성된 태풍의 눈 가장자리의 한 점을 P(x, y)라 하자.



▶ $\overline{\mathrm{OP}}=10$을 이용하여 다음 식을 완성해 보자.

$$x^2+y^2=\boxed{}$$

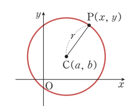
1 좌표평면에서 점 C(a, b)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구해 보자.

원 위의 점을 P(x, y)라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하면 다음과 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$



한편, 방정식 ①을 만족시키는 점 P(x, y)에 대하여 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로, 점 P는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위에 있다.

따라서 ①이 구하는 원의 방정식이다.

2 특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

다가 서기
지진이 발생하면 지진파를 이용하여 관측 지점에서 지진이 일어난 곳까지의 거리를 계산할 수 있다.
이때 세 곳의 관측 지점을 중심으로 하고, 각 지점에서 계산된 거리를 반지름으로 하는 세 원을 그려 그 교점에서 진원지를 찾을 수 있다.

원의 방정식
중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$$x^2+y^2=r^2$$

139

중단원 도입

원은 평면에서 한 점으로부터 거리가 일정한 점들이 그리는 도형으로 좌표평면에서 원의 방정식을 구할 때도 원의 중심과 원 위의 한 점 사이의 거리가 일정하다는 성질을 이용한다.
이 단원에서는 좌표평면에서 원을 나타내는 방정식과 원과 직선의 위치 관계를 이차방정식의 실근의 개수를 이용하여 구하는 방법에 대해 알아본다.

마크 트웨인

그의 본명은 클레멘스(Clemens, S. L., 1835~1910)로 미국 미주리주에서 가난한 개척민의 아들로 태어났다. 4세 때 미시시피강 변의 소도시로 이사 왔으며, 11세 때 아버지를 잃고 인쇄소에서 수습공으로 일하게 되었다. 그 덕분에 브라질을 탐험하고 미시시피강을 누비는 증기선의 키잡이 일도 하였다. 필명인 마크 트웨인은 강의 뱃사람 용어로 안전 수역을 나타내는 '두 길'(한 길은 6 ft)을 뜻한다. 미시시피강 주변에서의 생활과 경험은 그의 유년기에 깊은 인상을 남겨 후에 그가 쓴 『톰 소여의 모험』, 『미시시피강의 생활』, 『허클베리 핀의 모험』 등의 바탕이 되었다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 원의 정의를 알고 원의 방정식을 유도할 수 있게 한다.

② 좌표평면 위의 원의 방정식을 이해하고, 주어진 조건을 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

③ x, y에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내는 방정식의 꼴을 알게 하고, 그 방정식을 변형하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 원의 정의와 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 원의 방정식을 유도한다.

② 원의 방정식의 일반형 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서 표준형 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$으로 변형하는 방법을 충분히 익히도록 한다.

③ 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$의 꼴에서 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 공식처럼 암기하지 않게 한다.

④ x, y에 대한 이차방정식이 원의 방정식이 되려면 x^2, y^2의 계수가 같고, xy항이 없어야 함을 알게 한다.

보기 ① 중심의 좌표가 $(1,\ -2)$이고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+2)^2=16$
② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은
$x^2+y^2=9$

문제 1 다음 원의 방정식을 구하시오.
(1) 중심의 좌표가 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원
(2) 중심이 원점이고 점 $(-4,\ 3)$을 지나는 원

3 **예제 1** 두 점 $A(2,\ -1)$, $B(4,\ 5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

▸ 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

풀이 구하는 원의 중심을 $C(a,\ b)$라 하면 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이므로
$$a=\frac{2+4}{2}=3,\quad b=\frac{-1+5}{2}=2$$
에서 $C(3,\ 2)$
또, 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}=\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-2)^2=10$
답 $(x-3)^2+(y-2)^2=10$

문제 2 두 점 $A(3,\ -7)$, $B(-7,\ 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

수학 이야기
태양계 행성과 원

태양계 행성은 모두 공처럼 둥근 입체이지만 우리가 볼 때는 평면도형인 원으로 보인다. 또, 이들의 궤도는 서로 겹치지 않기 때문에 행성들 사이의 관계를 연구할 때 원으로 생각해도 문제가 없다. 태양계 행성의 공전 궤도가 완전한 원은 아니지만 거의 원에 가까워서 16세기까지만 해도 행성의 공전 궤도를 원으로 생각했었다. 이러한 이유로 천문학자들은 원의 여러 가지 성질에 대한 연구를 많이 했다.

위의 그림은 지동설을 처음 주장한 코페르니쿠스 (Copernicus, N., 1473~1543)와 그가 쓴 천문학책 『천계의 회전에 대하여』의 일부분이다.

(출처: Mankiewicz, R., 『The story of Mathematics』)

140

▶ 두 점 $O(0,\ 0)$, $P(x,\ y)$를 잇는 선분 OP의 길이는 $\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$이고, $\overline{OP}=10$이므로
$$\sqrt{x^2+y^2}=10$$
양변을 제곱하면 $x^2+y^2=100$ 답 100

준비하기

| 주안점 | 두 점 사이의 거리를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | 원의 반지름의 길이는 원의 중심 $(1,\ 1)$과 원 위의 한 점 $(4,\ 5)$ 사이의 거리이므로
$$\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2}=5$$
답 5

원의 방정식

평가 기준

상	원의 정의로부터 원의 방정식을 이끌어 내고, 다양한 조건에서 원의 방정식을 구할 수 있다.
중	원의 방정식의 일반형으로부터 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.
하	원의 방정식의 표준형으로부터 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 원 위의 임의의 점과 원의 중심 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 원의 방정식을 x, y에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있게 한다.

내용 연구

① 평면 위에 있는 한 점으로부터 거리가 일정한 점들이 이루는 도형을 원이라고 한다. 이때 한 점은 원의 중심이고, 일정한 거리는 원의 반지름의 길이이다.

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에서 $a=0$, $b=0$인 경우이므로 $x^2+y^2=r^2$이다.

③ 일반적으로 두 점 A, B를 지나는 원은 무수히 많지만, 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 하나로 결정된다. 이때 원의 중심은 선분 AB의 중점이고, 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 중심의 좌표와 반지름의 길이가 주어진 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 중심의 좌표가 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $x^2+(y-2)^2=4$

(2) 원의 중심 $(0,\ 0)$과 원 위의 점 $(-4,\ 3)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이이므로 $\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=25$

답 (1) $x^2+(y-2)^2=4$ (2) $x^2+y^2=25$

문제 2

| 주안점 | 지름의 양 끝 점이 주어진 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 구하는 원의 중심을 $C(a,\ b)$라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로
$$a=\frac{3+(-7)}{2}=-2,\quad b=\frac{-7+1}{2}=-3$$
에서 $C(-2,\ -3)$
또, 원의 반지름의 길이는
$$\overline{AC}=\sqrt{(-2-3)^2+\{-3-(-7)\}^2}=\sqrt{41}$$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y+3)^2=41$

답 $(x+2)^2+(y+3)^2=41$

● 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

내용 연구

❶ 원의 방정식은 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$과 같이 x, y에 대한 이차방정식으로 나타난다. 이 이차방정식은 x^2과 y^2의 계수가 같고 xy항이 없는 형태임을 알게 한다.

❷ 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

(i) $A^2+B^2-4C>0$이면 이 방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값이 무수히 많으므로 원을 나타낸다.

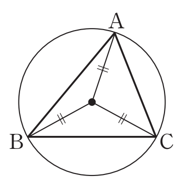
(ii) $A^2+B^2-4C=0$이면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=0$$

이므로 한 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$를 나타낸다.

(iii) $A^2+B^2-4C<0$이면 이 방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값은 존재하지 않는다.

❸ 오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C를 지나는 원은 삼각형 ABC의 외접원으로 유일하게 존재한다.



이 원의 방정식을 구하는 경우에

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

을 이용하면 a, b, r의 미지수가 3개인 연립이차방정식을 풀어야 하는 반면에

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

을 이용하면 A, B, C의 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀면 되므로 이 식을 이용하는 것이 더 편리한 방법임을 알게 한다.

단, 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이는 교육과정에서 제외되었기 때문에 원점을 지나는 원의 방정식 문제로 제시하여 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이를 이용할 수 있게 한다.

문제 풀이

문제 3

|주안점| 일반형으로 주어진 원의 방정식을 변형하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있게 한다.

● 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

❶ 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

이므로 원의 방정식은 x, y에 대한 이차방정식

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

› 원의 방정식은 x^2과 y^2의 계수가 같고 xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이다.

❷ 또, 방정식 ①은

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

로 변형된다. 이때 $A^2+B^2-4C>0$이면 ①이 나타내는 도형은

중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$,

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원이다.

› $A^2+B^2-4C=0$이면 ②는 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$를 나타낸다.
또, $A^2+B^2-4C<0$이면 ②를 만족시키는 실수 x, y가 존재하지 않는다.

예제 2 방정식 $x^2+y^2-4x+8y+11=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하시오.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$x^2-4x+4+y^2+8y+16=9$$
$$(x-2)^2+(y+4)^2=3^2$$

따라서 주어진 방정식은 중심의 좌표가 $(2,\ -4)$, 반지름의 길이가 3인 원을 나타낸다.

답 중심의 좌표가 $(2,\ -4)$이고 반지름의 길이가 3인 원

문제 3 다음 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $x^2+y^2-4x=0$ (2) $x^2+y^2-2x-8y-10=0$

탐구 **문제 4** 원의 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) $A=0$일 때, 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(2) 중심이 x축 위에 있을 조건을 말하시오.

141

|풀이| (1) $x^2+y^2-4x=0$을 변형하면

$$x^2-4x+4+y^2=4,\quad (x-2)^2+y^2=2^2$$

따라서 주어진 원의 중심의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 반지름의 길이는 2이다.

(2) $x^2+y^2-2x-8y-10=0$을 변형하면

$$x^2-2x+1+y^2-8y+16=27,$$
$$(x-1)^2+(y-4)^2=27$$

따라서 주어진 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 4)$이고, 반지름의 길이는 $3\sqrt{3}$이다.

답 (1) $(2,\ 0)$, 2 (2) $(1,\ 4)$, $3\sqrt{3}$

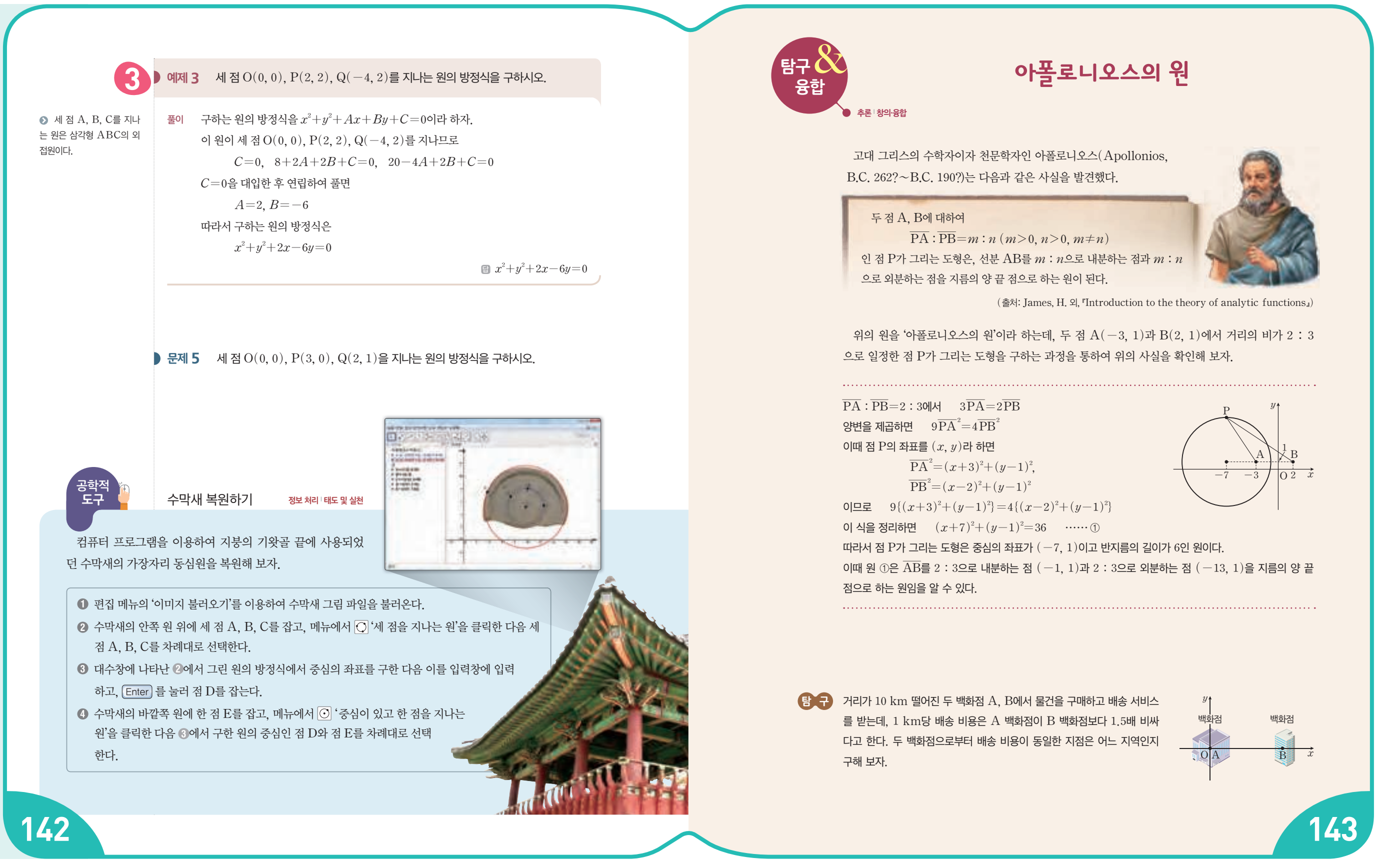
문제 4

|주안점| 주어진 조건에 따라 일반형으로 주어진 원의 방정식을 변형하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x^2+y^2+By+C=0$을 변형하면

$$x^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{B^2}{4}-C$$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 원의 중심의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{B}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}$이다.



3

예제 3 세 점 O(0, 0), P(2, 2), Q(−4, 2)를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

세 점 A, B, C를 지나는 원은 삼각형 ABC의 외접원이다.

풀이 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하자.
이 원이 세 점 O(0, 0), P(2, 2), Q(−4, 2)를 지나므로

$$C=0,\quad 8+2A+2B+C=0,\quad 20-4A+2B+C=0$$

$C=0$을 대입한 후 연립하여 풀면

$$A=2,\ B=-6$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+2x-6y=0$$

답 $x^2+y^2+2x-6y=0$

문제 5 세 점 O(0, 0), P(3, 0), Q(2, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

공학적 도구 **수막새 복원하기** 정보 처리 | 태도 및 실천

컴퓨터 프로그램을 이용하여 지붕의 기왓골 끝에 사용되었던 수막새의 가장자리 동심원을 복원해 보자.

❶ 편집 메뉴의 '이미지 불러오기'를 이용하여 수막새 그림 파일을 불러온다.
❷ 수막새의 안쪽 원 위에 세 점 A, B, C를 잡고, 메뉴에서 '세 점을 지나는 원'을 클릭한 다음 세 점 A, B, C를 차례대로 선택한다.
❸ 대수창에 나타난 ❷에서 그린 원의 방정식에서 중심의 좌표를 구한 다음 이를 입력창에 입력하고, Enter 를 눌러 점 D를 잡는다.
❹ 수막새의 바깥쪽 원에 한 점 E를 잡고, 메뉴에서 '중심이 있고 한 점을 지나는 원'을 클릭한 다음 ❸에서 구한 원의 중심인 점 D와 점 E를 차례대로 선택한다.

142

탐구&융합 **아폴로니오스의 원** 추론 | 창의·융합

고대 그리스의 수학자이자 천문학자인 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)는 다음과 같은 사실을 발견했다.

두 점 A, B에 대하여

$$\overline{PA}:\overline{PB}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

인 점 P가 그리는 도형은, 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이 된다.

(출처: James, H. 외, 『Introduction to the theory of analytic functions』)

위의 원을 '아폴로니오스의 원'이라 하는데, 두 점 A(−3, 1)과 B(2, 1)에서 거리의 비가 2 : 3으로 일정한 점 P가 그리는 도형을 구하는 과정을 통하여 위의 사실을 확인해 보자.

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$에서 $3\overline{PA}=2\overline{PB}$
양변을 제곱하면 $9\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$
이때 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{PA}^2=(x+3)^2+(y-1)^2,$$
$$\overline{PB}^2=(x-2)^2+(y-1)^2$$

이므로 $9\{(x+3)^2+(y-1)^2\}=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$
이 식을 정리하면 $(x+7)^2+(y-1)^2=36$ ······①
따라서 점 P가 그리는 도형은 중심의 좌표가 $(-7, 1)$이고 반지름의 길이가 6인 원이다.
이때 원 ①은 $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점 $(-1, 1)$과 2 : 3으로 외분하는 점 $(-13, 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원임을 알 수 있다.

탐구 거리가 10 km 떨어진 두 백화점 A, B에서 물건을 구매하고 배송 서비스를 받는데, 1 km당 배송 비용은 A 백화점이 B 백화점보다 1.5배 비싸다고 한다. 두 백화점으로부터 배송 비용이 동일한 지점은 어느 지역인지 구해 보자.

143

(2) $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

중심이 x축 위에 있을 때, 중심의 y좌표는 0이어야 하므로 중심의 좌표 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$에서 $B=0$이다.

또, $\frac{A^2+B^2-4C}{4}>0$이어야 하므로 $A^2-4C>0$

답 (1) $\left(0,\ -\frac{B}{2}\right)$, $\frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}$ (단, $B^2-4C>0$)
(2) $B=0$, $A^2-4C>0$

문제 5

| 주안점 | 세 점을 지나는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하자. 이 원이 세 점 O(0, 0), P(3, 0), Q(2, 1)을 지나므로

$$C=0,\quad 9+3A+C=0,\quad 5+2A+B+C=0$$

$C=0$을 대입한 후 연립하여 풀면 $A=-3$, $B=1$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-3x+y=0$

답 $x^2+y^2-3x+y=0$

공학적 도구

| 지도 방향 | 컴퓨터 프로그램을 이용하여 세 점을 지나는 원을 그리고 원의 중심의 좌표를 찾아 원 모양의 수막새를 복원할 수 있게 한다.

탐구&융합 ➝ 아폴로니오스의 원

| 지도 방향 | 아폴로니오스의 원의 원리를 이해하고, 원의 방정식을 구하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 두 백화점 A, B의 위치를 A(0, 0), B(10, 0), 배송 비용이 동일한 지점을 P(x, y)라 하면 배송 비용은 A 백화점이 B 백화점보다 1 km당 1.5배 비싸므로

$$\overline{PA}:\overline{PB}=1:1.5=2:3$$

이다.

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 C, 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점을 D라 하면 C(4, 0), D(−20, 0)이므로 중심의 좌표는 (−8, 0), 반지름의 길이는 12인 원 위에 있는 점들이 배송 비용이 동일한 지점이 된다.

따라서 두 백화점 A, B로부터 배송 비용이 동일한 지점은 원 $(x+8)^2+y^2=144$ 위에 위치한 지점이다.

답 풀이 참조

소단원 지도 개관

지도 목표

① 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해하고, 연립방정식과 이차방정식의 판별식을 이용하여 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있게 한다.

② 원에 접하고 기울기가 주어진 접선의 방정식과 원 위의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다. 이를 이용하여 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 원과 직선의 위치 관계는 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식의 부호와 관련 있음을 설명하고, 이차방정식의 판별식을 이용하여 원과 직선의 위치 관계를 이해할 수 있게 한다.

② x, y에 대한 이차방정식과 일차방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이 방법을 확인하고, 활용하는 데 어려움이 없도록 한다.

③ 원의 반지름의 길이와 원의 중심과 직선 사이의 거리의 대소를 비교하여 원과 직선의 교점의 개수를 구할 수도 있음을 알게 한다.

④ 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 두 개임을 이해하게 한다.

준비하기

|주안점| 이차방정식의 근을 판별할 수 있는지 확인한다.

|풀이| 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-2a)^2-4\times1\times4=4a^2-16$$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$$D=4a^2-16>0,\quad a^2>4$$

따라서 $a<-2$ 또는 $a>2$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$$D=4a^2-16=0,\quad a^2=4$$

따라서 $a=\pm2$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$$D=4a^2-16<0,\quad a^2<4$$

따라서 $-2<a<2$

답 (1) $a<-2$ 또는 $a>2$
(2) $a=\pm2$
(3) $-2<a<2$

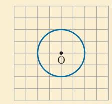
02 원과 직선의 위치 관계

학습 목표
좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

준비하기
이차방정식 $x^2-2ax+4=0$이 다음과 같은 근을 갖도록 실수 a의 값 또는 범위를 정하시오.
(1) 서로 다른 두 실근
(2) 중근
(3) 서로 다른 두 허근

원과 직선의 위치 관계

생각 열기 오른쪽 그림은 모눈종이 위에 반지름의 길이가 2인 원을 그린 것이다.



❶ 원의 중심 O에서의 거리가 1, 2, 3인 직선을 각각 하나씩 그려 보자.
❷ 주어진 원과 ❶에서 그린 세 직선의 교점의 개수를 각각 말해 보자.

위의 생각 열기에서 알 수 있듯이 원과 직선의 위치 관계는 서로 다른 두 점에서 만나거나, 접하거나, 만나지 않는 세 가지 경우가 있다.

1 이제 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보자.
원과 직선의 방정식을 각각

$$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$
$$y=mx+n \quad \cdots\cdots ②$$

이라 할 때, ②를 ①에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

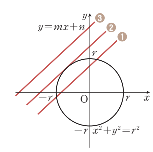
이고, 이 식을 정리하면

2 $$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

이다.

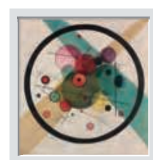
이때 원과 직선의 교점의 개수는 이차방정식 ③의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

3 따라서 이차방정식 ③의 판별식을 D라 하면, D의 값의 부호에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)
❸ $D<0$이면 만나지 않는다.

다가서기
현대 추상 미술의 아버지로 불리는 칸딘스키(Kandinsky, W., 1866~1944)는 점, 선, 면을 소재로 하는 기하학적 추상화를 많이 그렸다. 칸딘스키의 작품 중 하나인 「원 속의 원(Circles in a Circle)」에는 강렬한 색채의 원과 직선이 아름다운 조화를 이룬다.



「원 속의 원」

144

원과 직선의 위치 관계

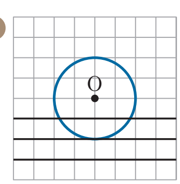
평가 기준

상	원의 방정식과 직선의 방정식으로부터 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다.
중	원과 직선이 한 점에서 만나는 조건을 말할 수 있다.
하	원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 모눈종이 위의 원에 직접 직선을 그려 보는 활동을 통하여 원과 직선의 위치 관계는 세 가지 경우가 있음을 확인하게 한다.

❶



❷ 2, 1, 0

내용 연구

❶ 원과 직선의 교점의 좌표는 원의 방정식과 직선의 방정식으로 이루어진 연립이차방정식의 실근과 같음을

예제 1 원 $x^2+y^2+4x=13$과 직선 $y=x+3$의 위치 관계를 말하시오.

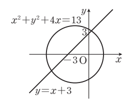
풀이 $y=x+3$을 $x^2+y^2+4x=13$에 대입하여 정리하면

$$x^2+5x-2=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=5^2-4\times1\times(-2)=33>0$$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.



답 서로 다른 두 점에서 만난다.

문제 1 다음 원과 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $x^2+y^2=8$, $x+y=4$ (2) $x^2+y^2-6y=0$, $y=2x-6$

예제 2 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

풀이 1 $y=x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

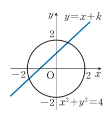
$$2x^2+2kx+k^2-4=0$$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 D가 $D>0$이어야 하므로

$$D=(2k)^2-4\times2\times(k^2-4)=-4k^2+32>0$$

에서 $k^2<8$

따라서 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$



풀이 2 원의 중심인 원점과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2보다 작아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2,\quad |k|<2\sqrt{2},\quad -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$$

답 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이를 r, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 할 때,
① $d<r$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $d=r$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $d>r$이면 만나지 않는다.

문제 2 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 k의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 접한다. (2) 만나지 않는다.

145

알게 한다. 특히, 두 교점이 일치하는 경우 그 점을 접점이라 하고, 이때의 직선이 원의 접선임을 이해하게 한다.

❷ 원의 방정식과 직선의 방정식

$$x^2+y^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots ②$$

을 연립할 때, ②를 ①에 대입하여 정리한 방정식

$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

에서 $m^2+1\neq0$이므로 ③은 이차방정식이다.

❸ 중심이 $(p,\ q)$이고 반지름의 길이가 r인 원과 직선 $ax+by+c=0$의 위치 관계는 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 할 때,

$$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

에서 d와 r의 대소 관계를 통해 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $d<r \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
(ii) $d=r \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)
(iii) $d>r \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x+y=4$, 즉 $y=-x+4$를 $x^2+y^2=8$에 대입하여 정리하면

$$x^2+(-x+4)^2=8,\quad x^2-4x+4=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=(-4)^2-4\times1\times4=0$$

이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(2) $y=2x-6$을 $x^2+y^2-6y=0$에 대입하여 정리하면

$$x^2+(2x-6)^2-6(2x-6)=0,$$

$$5x^2-36x+72=0$$

이 이차방정식의 판별식 D가

$$D=(-36)^2-4\times5\times72<0$$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

답 (1) 한 점에서 만난다. (접한다.) (2) 만나지 않는다.

문제 2

|주안점| 주어진 원과 직선의 위치 관계를 만족시키는 실수 k의 값 또는 범위를 정할 수 있게 한다.

|풀이 1| $y=-2x+k$를 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$$5x^2-4kx+k^2-1=0$$

이 이차방정식의 판별식 D는

$$D=(-4k)^2-4\times5\times(k^2-1)=-4k^2+20$$

(1) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$$D=-4k^2+20=0,\quad k^2=5$$

따라서 $k=\pm\sqrt{5}$

(2) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$$D=-4k^2+20<0,\quad k^2>5$$

따라서 $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

답 (1) $k=\pm\sqrt{5}$ (2) $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

|풀이 2| 원의 중심인 원점과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리가

(1) 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=1,\quad |k|=\sqrt{5}$$

따라서 $k=\pm\sqrt{5}$

(2) 원의 반지름의 길이인 1보다 커야 하므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}>1,\quad |k|>\sqrt{5}$$

따라서 $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

원의 접선의 방정식

함께하기

|지도 방향| 원에 접하고 기울기가 주어진 직선의 방정식은 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 이용하여 구할 수 있음을 이해하게 한다.

|풀이| 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고 $y=mx+n$을 $x^2+y^2=r^2$에 대입하여 정리하면

$$\boxed{(m^2+1)}x^2+2mnx+n^2-r^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(2mn)^2-4\times\boxed{(m^2+1)}\times(n^2-r^2)$$
$$=4\{r^2(m^2+1)-n^2\}$$

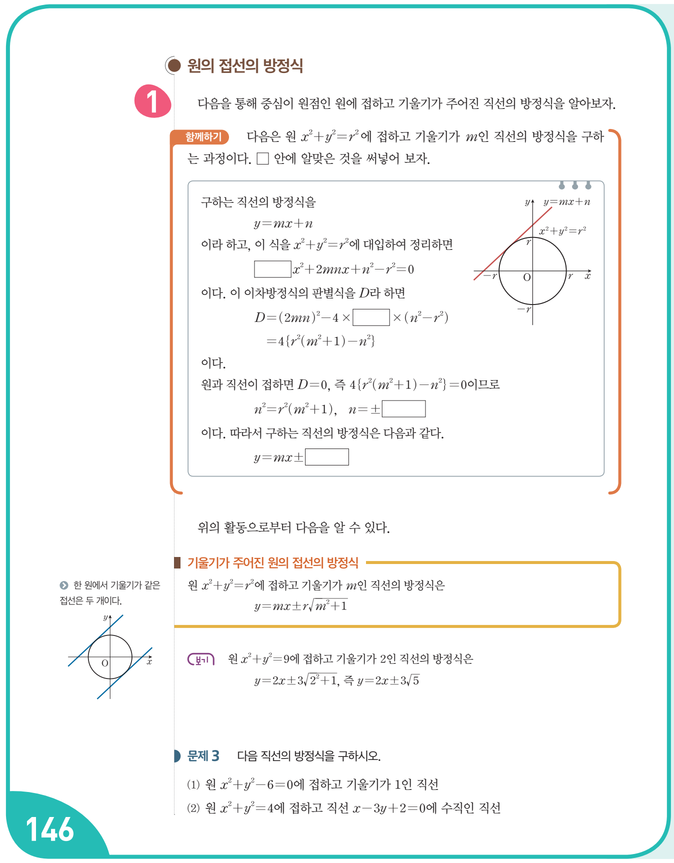
원과 직선이 접하면 $D=0$, 즉 $4\{r^2(m^2+1)-n^2\}=0$이므로

$$n^2=r^2(m^2+1),\quad n=\pm\boxed{r\sqrt{m^2+1}}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\boxed{r\sqrt{m^2+1}}$$

답 (m^2+1), (m^2+1), $r\sqrt{m^2+1}$, $r\sqrt{m^2+1}$


원의 접선의 방정식

1 다음을 통해 중심이 원점인 원에 접하고 기울기가 주어진 직선의 방정식을 알아보자.

함께하기 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

구하는 직선의 방정식을

$y=mx+n$

이라 하고, 이 식을 $x^2+y^2=r^2$에 대입하여 정리하면

$\square\, x^2+2mnx+n^2-r^2=0$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2mn)^2-4\times\square\times(n^2-r^2)$

$=4\{r^2(m^2+1)-n^2\}$

이다.

원과 직선이 접하면 $D=0$, 즉 $4\{r^2(m^2+1)-n^2\}=0$이므로

$n^2=r^2(m^2+1)$, $n=\pm\square$

이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$y=mx\pm\square$

위의 활동으로부터 다음을 알 수 있다.

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

한 원에서 기울기가 같은 접선은 두 개이다.

보기 원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$, 즉 $y=2x\pm3\sqrt{5}$

문제 3 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2-6=0$에 접하고 기울기가 1인 직선

(2) 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 직선 $x-3y+2=0$에 수직인 직선

146

내용 연구

1 원 $x^2+y^2=r^2(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구할 수도 있다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx+n$, 즉 $mx-y+n=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같을 때 원과 직선이 접하므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r,\quad |n|=r\sqrt{m^2+1},$$
$$n=\pm r\sqrt{m^2+1}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

2 원 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구할 수도 있다.

(i) 구하는 접선의 기울기를 m이라 할 때,

기울기가 m이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)\qquad\cdots\cdots ①$$

원점과 직선 ①, 즉 $mx-y-mx_1+y_1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같을 때 원과 직선이 접하므로

$$\frac{|-mx_1+y_1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(y_1-mx_1)^2=r^2(m^2+1)$$

이때 ${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$이므로 이를 대입하여 정리하면

$$(y_1-mx_1)^2=({x_1}^2+{y_1}^2)(m^2+1),$$
$${x_1}^2+2mx_1y_1+m^2{y_1}^2=0,\quad (x_1+my_1)^2=0$$

따라서 $m=-\dfrac{x_1}{y_1}$이므로 이를 ①에 대입하여 정리하면

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$
$$x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2,\quad x_1x+y_1y=r^2$$

(ii) 접선의 기울기가 정의되지 않을 때,

점 $(-r,\ 0)$ 또는 점 $(r,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 각각 $x=-r$, $x=r$인데, 이 경우도 각각

$$\begin{cases}x_1=-r\\y_1=0\end{cases},\quad \begin{cases}x_1=r\\y_1=0\end{cases}$$

일 때 $x_1x+y_1y=r^2$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

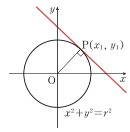
2

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$이면 점 P는 좌표축 위에 있지 않은 점이다.

(i) $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$일 때,

점 P에서의 접선은 직선 OP와 수직이고 직선 OP의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1}$이므로, 접선의 기울기는 $-\frac{x_1}{y_1}$이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

이고, 이 식을 정리하면

$$x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2$$

이다. 여기서 점 $P(x_1, y_1)$은 원 위의 점이므로 ${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1x+y_1y=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

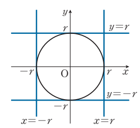
$x_1=0$이면 점 P는 y축 위의 점이고, $y_1=0$이면 점 P는 x축 위의 점이다. 즉, 점 P의 좌표는 $x_1=0$일 때 $(0, \pm r)$이고, $y_1=0$일 때 $(\pm r, 0)$이다.

(ii) $x_1=0$ 또는 $y_1=0$일 때,

점 P는 좌표축 위의 점이므로 접선의 방정식은

$$y=\pm r \text{ 또는 } x=\pm r$$

이다. 이 경우에도 ①이 성립한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

보기 원 $x^2+y^2=10$에 대하여

① 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은 $1\times x+3\times y=10$, 즉 $x+3y=10$

② 점 $(\sqrt{10}, 0)$에서의 접선의 방정식은 $\sqrt{10}\times x+0\times y=10$, 즉 $x=\sqrt{10}$

문제 4 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 $(2, -2\sqrt{3})$에서의 접선

(2) 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $(0, 3)$에서의 접선

147

문제 풀이

문제 3

| 주안점 | 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 원 $x^2+y^2=6$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x\pm\sqrt{6}\times\sqrt{1^2+1}, \text{ 즉 } y=x\pm2\sqrt{3}$$

(2) 직선 $x-3y+2=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

따라서 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$$y=-3x\pm2\sqrt{(-3)^2+1}, \text{ 즉 } y=-3x\pm2\sqrt{10}$$

답 (1) $y=x\pm2\sqrt{3}$ (2) $y=-3x\pm2\sqrt{10}$

문제 4

| 주안점 | 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 $(2, -2\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$$2x-2\sqrt{3}y=16, \text{ 즉 } x-\sqrt{3}y=8$$

(2) 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $(0, 3)$에서의 접선의 방정식은

$$0\times x+3y=9, \text{ 즉 } y=3$$

답 (1) $x-\sqrt{3}y=8$ (2) $y=3$

지도 자료

1. 중심이 원점이 아닌 원에 접하고 기울기가 주어진 접선의 방정식

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\,(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}-ma+b$$

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

이므로 원과 직선을 각각 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{m^2+1}$$

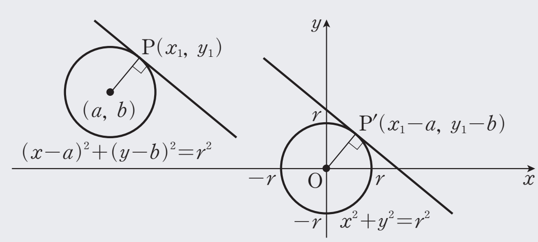
에서 $\quad y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}-ma+b$

2. 중심이 원점이 아닌 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

다음 그림은 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$과 원 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선을 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이다.



원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P'(x_1-a, y_1-b)$에서의 접선의 방정식은

$$(x_1-a)x+(y_1-b)y=r^2$$

이므로 원과 직선을 각각 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

1 예제 3 점 $(3,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=3$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

풀이 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=3$$

이 직선이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$$3x_1=3,\quad x_1=1$$

또, 점 P는 원 위의 점이므로

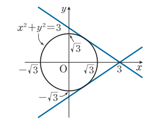
$$x_1^2+y_1^2=3 \quad \cdots\cdots ①$$

$x_1=1$을 ①에 대입하면

$$1^2+y_1^2=3,\quad y_1=\pm\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$x+\sqrt{2}y=3,\quad x-\sqrt{2}y=3$$



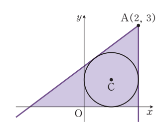
답 $x+\sqrt{2}y=3,\ x-\sqrt{2}y=3$

생각톡톡 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 몇 개일까?

문제 5 점 $(2,\ -4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

생각 넓히기 문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 x축과 y축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면에 속하며 반지름의 길이가 1인 원 C가 놓여 있다. 이때 원 밖의 한 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$에서 원 C에 그은 두 접선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하려고 한다.



활동 ① 원 C의 방정식을 구해 보자.

활동 ② 점 A에서 원 C에 그은 두 접선의 방정식을 구해 보자.

활동 ③ 활동 ②에서 구한 두 접선의 x절편을 구해 보자.

활동 ④ 점 A에서 원 C에 그은 두 접선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구해 보자.

148

내용 연구

❶ **예제 3**은 다음과 같은 방법으로 풀 수도 있다.

점 $(3,\ 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=m(x-3),\ \text{즉}\ mx-y-3m=0$$

이 직선과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이므로

$$\frac{|-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$9m^2=3(m^2+1),\quad m^2=\frac{1}{2},\quad m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x-3)$$

에서 $\quad x+\sqrt{2}y=3,\quad x-\sqrt{2}y=3$

| 오개념 바로잡기 | 접선의 기울기를 m으로 놓고 접선의 방정식을 구하면 기울기가 정의되지 않는 $x=k$(k는 상수)의 꼴의 접선을 구할 수 없으므로 접선이 한 개만 구해지는 경우에는 또 다른 접선을 한 개 더 찾아보도록 한다.

생각톡톡 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 2개이다.

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=2$$

이 직선이 점 $(2,\ -4)$를 지나므로 $\quad x_1-2y_1=1 \quad \cdots ①$

또, 점 P는 원 위에 있으므로 $\quad x_1^2+y_1^2=2 \quad \cdots ②$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1=-1,\ y_1=-1\ \text{또는}\ x_1=\frac{7}{5},\ y_1=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$x+y=-2,\quad 7x+y=10$$

답 $x+y=-2,\ 7x+y=10$

생각 넓히기

| 지도 방향 | x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식과 원 밖의 한 점에서 이 원에 그은 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | ❶ 원 C의 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$, 반지름의 길이는 1이므로 $\quad (x-1)^2+(y-1)^2=1$

❷ 접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$$y-3=m(x-2),\ \text{즉}\ mx-y-2m+3=0$$

이 직선과 원 C의 중심 $(1,\ 1)$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|m-1-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\quad m=\frac{3}{4}$$

접선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$, 즉 $3x-4y+6=0$

또, 점 $(2,\ 3)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 이 원과 접하므로 접선의 방정식은 $\quad x=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$3x-4y+6=0,\ x=2$$

❸ 두 접선의 x절편은 각각 -2, 2이다.

❹ 밑변의 길이는 4, 높이는 3이므로 $\quad \frac{1}{2}\times4\times3=6$

답 ❶ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
❷ $3x-4y+6=0,\ x=2$ ❸ $-2,\ 2$ ❹ 6

중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 주어진 조건을 만족시키는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

Ⅲ-3. 원의 방정식
중단원 마무리하기

원의 방정식

(1) 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$$x^2+y^2=r^2$$
(2) $x,\ y$에 대한 이차방정식
$$x^2+y^2+Ax+By+C=0\ (A^2+B^2-4C>0)$$
이 나타내는 도형은

중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$,

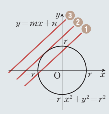
반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원이다.

원과 직선의 위치 관계

원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$에 직선의 방정식 $y=mx+n$을 대입하여 얻은 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면, D의 값의 부호에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

1. $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
2. $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
3. $D<0$이면 만나지 않는다.



원의 접선의 방정식

(1) 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$
(2) 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$$x_1x+y_1y=r^2$$

기본

01 다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심의 좌표가 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원

(3) 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(0,\ 4)$, $\mathrm{Q}(3,\ 3)$을 지나는 원

02 원 $x^2+y^2+8x-6y=0$의 중심의 좌표는 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이는 r이다. 이때 $a+b+r$의 값을 구하시오.

03 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 k의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

04 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

149

|풀이| (1) 중심의 좌표가 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원의 방정식은 $\quad (x-2)^2+(y-1)^2=3$

(2) 중심의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 3)$

반지름의 길이는 $\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(3-4)^2}=\sqrt{10}$

구하는 원의 방정식은 $\quad (x-1)^2+(y-3)^2=10$

(3) 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하자. 이 원이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(0,\ 4)$, $\mathrm{Q}(3,\ 3)$을 지나므로
$$C=0,\ 16+4B+C=0,\ 18+3A+3B+C=0$$
$C=0$을 대입한 후 연립하여 풀면 $\quad A=-2,\ B=-4$

따라서 구하는 원의 방정식은 $\quad x^2+y^2-2x-4y=0$

답 풀이 참조

02

|주안점| 일반형으로 주어진 원의 방정식을 변형하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $x^2+y^2+8x-6y=0$에서
$$(x+4)^2+(y-3)^2=25$$
따라서 $a=-4,\ b=3,\ r=5$이므로 $\quad a+b+r=4$

답 4

03

|주안점| 주어진 원과 직선의 위치 관계를 만족시키는 실수 k의 값 또는 범위를 정할 수 있게 한다.

|풀이| $y=2x+k$를 $x^2+y^2=8$에 대입하여 정리하면
$$x^2+(2x+k)^2=8,\quad 5x^2+4kx+k^2-8=0$$
이 이차방정식의 판별식 D는 $\quad D=-4k^2+160$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로
$$D=-4k^2+160>0,\quad k^2<40$$
따라서 $\quad -2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로
$$D=-4k^2+160=0,\quad k^2=40$$
따라서 $\quad k=\pm2\sqrt{10}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로
$$D=-4k^2+160<0,\quad k^2>40$$
따라서 $\quad k<-2\sqrt{10}$ 또는 $k>2\sqrt{10}$

답 (1) $-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$
(2) $k=\pm2\sqrt{10}$
(3) $k<-2\sqrt{10}$ 또는 $k>2\sqrt{10}$

04

|주안점| 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은 $\quad -x+3y=10$, 즉 $x-3y=-10$

답 $x-3y=-10$

05

|주안점| $x,\ y$에 대한 이차방정식이 원의 방정식이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| $x^2+y^2-6x+4y+2k=0$에서
$$(x-3)^2+(y+2)^2=13-2k$$
반지름의 길이가 2 이상인 원이 되어야 하므로
$$13-2k\geq4,\quad k\leq\frac{9}{2}$$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 4이다.

답 4

06

|주안점| 주어진 조건을 만족시키는 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}}$이므로
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}$$
$$(x+6)^2+(y+3)^2=20$$

답 $(x+6)^2+(y+3)^2=20$

표준

05 x, y에 대한 이차방정식 $x^2+y^2-6x+4y+2k=0$이 나타내는 도형이 반지름의 길이가 2 이상인 원이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

06 두 점 A$(2, 1)$, B$(-4, -2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$을 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

07 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있는 원이 y축에 접하고 점 $(3, -2)$를 지날 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하시오.

08 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+8a^2+6a-9=0$의 넓이가 최대가 되도록 이 원의 중심의 좌표를 정하시오. (단, a는 실수이다.)

09 x축과 y축에 동시에 접하고 점 $(-2, -1)$을 지나는 원의 방정식을 모두 구하시오.

150

07

|주안점| y축에 접하는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있는 원이 y축에 접하므로 중심의 좌표가 $(a, a-2)$이고 반지름의 길이가 $|a|$인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a+2)^2=a^2$$

이고 이 원이 점 $(3, -2)$를 지나므로

$$(3-a)^2+(-2-a+2)^2=a^2, \quad (3-a)^2=0$$

따라서 $a=3$

답 3

08

|주안점| 원의 넓이가 최대가 되는 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+8a^2+6a-9=0$에서

$$(x+a)^2+(y-2a)^2=-3a^2-6a+9$$

반지름의 길이가 최대일 때 원의 넓이도 최대이므로

$$-3a^2-6a+9=-3(a+1)^2+12$$

따라서 $a=-1$일 때 원의 넓이가 최대이고 원의 중심의 좌표는 $(-a, 2a)$이므로 구하는 원의 중심의 좌표는 $(1, -2)$이다.

답 $(1, -2)$

09

|주안점| x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 $(-2, -1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제3사분면에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, -r)$

즉, 원의 방정식은 $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2, -1)$을 지나므로

$$(-2+r)^2+(-1+r)^2=r^2, \quad r^2-6r+5=0$$

$$(r-1)(r-5)=0, \quad r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y+1)^2=1, \quad (x+5)^2+(y+5)^2=25$$

답 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$, $(x+5)^2+(y+5)^2=25$

10

|주안점| 원과 직선이 접하는 조건을 이용하여 실수 a의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은 $x+2y=5$

원 $x^2+y^2+6x-4y+a=0$에서

$$(x+3)^2+(y-2)^2=13-a \quad \cdots\cdots ①$$

원 ①과 직선 $x+2y=5$, 즉 $x+2y-5=0$이 접하려면 원의 중심 $(-3, 2)$와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이인 $\sqrt{13-a}$와 같아야 하므로

$$\frac{|-3+4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{13-a}, \quad 65-5a=16$$

따라서 $a=\dfrac{49}{5}$

답 $\dfrac{49}{5}$

11

|주안점| 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 접점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=9$$

이 직선이 점 $(4, 3)$을 지나므로

$$4x_1+3y_1=9, \quad y_1=-\frac{4}{3}x_1+3 \quad \cdots\cdots ①$$

또, 점 P는 원 위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=9 \quad \cdots\cdots ②$

①을 ②에 대입하면

$$x_1^2+\left(-\frac{4}{3}x_1+3\right)^2=9, \quad 25x_1^2-72x_1=0$$

10 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2+6x-4y+a=0$과 접할 때, 실수 a의 값을 구하시오.

|서·술·형|

11 점 $(4,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 두 접선 중에서 기울기가 양수인 접선의 기울기를 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

발 전

12 원 $x^2+y^2-4x+2y+k=0$이 y축과 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\overline{AB}=6$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

사고력+

13 원 $x^2+y^2=4$ 위를 움직이는 점 A와 직선 $y=x-4\sqrt{2}$ 위를 움직이는 서로 다른 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC를 만들 때, 정삼각형이 되는 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

|서·술·형|

14 직선 $y=mx+n$이 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x+3)^2+y^2=4$에 동시에 접할 때, 두 실수 m, n에 대하여 $32mn$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

151

따라서 $\quad x_1=0$ 또는 $x_1=\frac{72}{25}$ ▶ 50 %

위에서 구한 x_1의 값을 ①에 대입하면

$x_1=0$일 때, $y_1=3$이고 기울기는 $\quad 0$

$x_1=\frac{72}{25}$일 때, $y_1=-\frac{21}{25}$이고 기울기는 $\frac{24}{7}$ ▶ 30 %

답 구하기 양수인 기울기는 $\frac{24}{7}$이므로 구하는 값은

$$p+q=7+24=31$$ ▶ 20 %

12

| 주안점 | 원과 y축이 만나는 조건을 이용하여 상수 k의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | y축과 만나는 점 A의 좌표를 $(0,\ a)$, 점 B의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 $\overline{AB}=6$이므로

$$\sqrt{(0-0)^2+(a-b)^2}=6,\quad (a-b)^2=36 \qquad \cdots ①$$

두 점 A, B의 y좌표는 주어진 원의 방정식에 $x=0$을 대입하여 얻은 이차방정식 $y^2+2y+k=0$의 두 근과 같으므로 근과 계수의 관계로부터

$$a+b=-2,\quad ab=k \qquad \cdots ②$$

①, ②를 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$에 대입하면

$36=(-2)^2-4k$에서 $\qquad k=-8$

답 -8

13

| 주안점 | 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 원 $x^2+y^2=4$ 위를 움직이는 점 A와 직선 $y=x-4\sqrt{2}$ 사이의 거리는 삼각형 ABC의 높이이므로 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y-4\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는 $\quad \frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=4$

원의 반지름의 길이는 2이므로 정삼각형이 되는 삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때의 삼각형의 높이는 $4-2=2$이고 이때의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\times 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

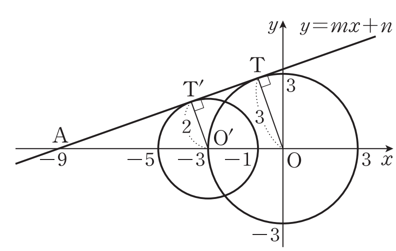
삼각형 ABC의 넓이가 최대일 때의 삼각형의 높이는 $4+2=6$이고 이때의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\times\frac{12}{\sqrt{3}}\times 6=12\sqrt{3}$

답 최댓값: $12\sqrt{3}$, 최솟값: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

14

| 주안점 | 두 원에 동시에 접하는 접선의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 두 원의 중심을 O, O′이라 할 때, 주어진 직선과 두 원 O, O′이 만나는 점을 각각 T, T′이라 하고 x축과 만나는 점을 A라 하면 삼각형 AO′T′과 삼각형 AOT는 닮음이고, 닮음비는 $2:3$이다. ▶ 10 %



따라서 점 A의 좌표는 $(-9,\ 0)$이므로

$$-9m+n=0,\quad n=9m$$ ▶ 20 %

원점과 직선 $mx-y+n=0$ 사이의 거리는 3이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3,\quad \frac{|9m|}{\sqrt{m^2+1}}=3,\quad m^2=\frac{1}{8}$$ ▶ 50 %

답 구하기 따라서 구하는 값은

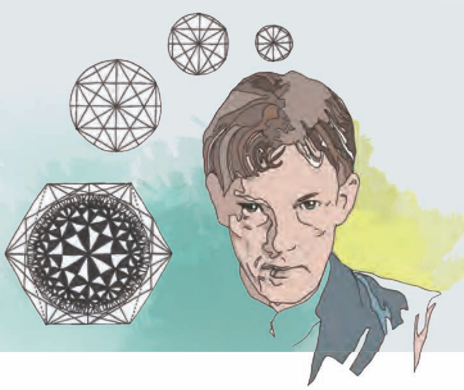
$$32mn=32\times 9m^2=36$$ ▶ 20 %

4 도형의 이동

01 평행이동
02 대칭이동

“화가나 시인처럼 수학자도 패턴을 만들어 낸다.
수학자의 패턴이 그들의 것보다
더 영원하다고 할 수 있는 이유는 그것이 생각으로
만들어지기 때문일 것이다.”

(출처: Hardy, G. H., 『A Mathematician's Apology』)



하디(Hardy, G. H., 1877~1947)
영국의 수학자

이 글은 화가는 형상이나 색깔로, 시인은 언어로 패턴을 만들지만, 수학자는 오로지 생각만으로 패턴을 만들기 때문에 시간에 구애받지 않고 오래 지속된다는 표현이다.

152

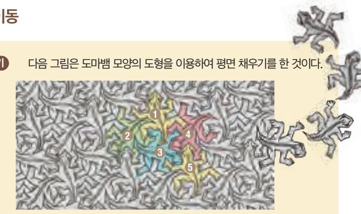
01 평행이동

학습 목표
평행이동의 뜻을 이해한다.

준비하기
이차함수 $y=(x+2)^2+1$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인지 말하시오.

평행이동

생각 열기 다음 그림은 도마뱀 모양의 도형을 이용하여 평면 채우기를 한 것이다.



▶ 도마뱀 ②, ③, ④, ⑤ 중 ①을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 말해 보자.

좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 구해 보자.

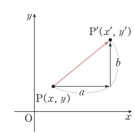
1 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면

$$x'=x+a, \quad y'=y+b$$

이다. 따라서 점 P'의 좌표는

$$(x+a, y+b)$$

이다.



다가서기
같은 모양의 조각들을 서로 겹치거나 틈이 생기지 않게 늘어놓아 평면을 덮는 것을 '평면 채우기'라고 한다. 타일이나 보도블록 등은 같은 모양을 반복적으로 평행이동하여 만든 평면 채우기의 예이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

점의 평행이동
점 (x, y)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(x+a, y+b)$$

보기 점 $(1, -2)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+2, -2+3)$, 즉 $(3, 1)$이다.

153

중단원 도입

일상생활에서 사용하는 제품의 디자인에서 다양한 패턴을 찾을 수 있는데, 이러한 패턴은 도형의 이동을 이용하여 만들 수 있다.
이 단원에서는 도형의 평행이동과 대칭이동의 뜻을 이해하고, 평행이동 또는 대칭이동한 도형의 방정식을 구하는 방법에 대하여 공부한다.
좌표평면에서 도형의 평행이동과 대칭이동에 대한 개념의 이해는 선대칭도형, 점대칭도형, 평행이동에 대한 개념에서 자연스럽게 이어지도록 한다.

하디

하디(Hardy, G. H., 1877~1947)는 영국의 서리주에서 태어났고, 70세로 사망할 때까지 리틀우드(Littlewood, E., 1885~1977), 라마누잔(Ramanujan, Srinivasa., 1887~1920) 등의 저명한 수학자들과 협력해서 수학계에 큰 공헌을 했다. 특히, 해석적 정수론 분야에서 많은 업적을 남기기도 했다. 하디는 이와 같은 업적들을 인정받아 1910년에는 런던 왕립학회의 정회원이 되었다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 좌표평면에서 점의 평행이동의 뜻을 이해하고, 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
② 좌표평면에서 도형의 평행이동의 뜻을 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 점, 직선, 원은 평행이동에 의하여 각각 점, 직선, 원이 됨을 이해하게 한다.
② 도형의 방정식을 $f(x, y)=0$으로 나타내는 것을 예를 통하여 이해하고 이를 활용할 수 있게 한다.
③ 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+a, y+b)$가 되지만, 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 동일하게 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$이 됨을 이해하게 한다.
④ 좌표축의 평행이동은 다루지 않는다.

문제 1 다음 점을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(-2,\ 5)$ (2) $\mathrm{B}(3,\ -4)$

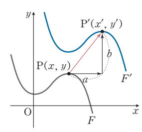
2 방정식 $ax+by+c=0$은 직선을 나타내고 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$은 원을 나타낸다. 이처럼 방정식

$$f(x,\ y)=0$$

은 일반적으로 좌표평면 위의 도형을 나타낸다.

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형 F'의 방정식을 구해 보자.

3 오른쪽 그림과 같이 도형 F 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면



$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

이므로

$$x=x'-a,\quad y=y'-b$$

이다. 이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(x'-a,\ y'-b)=0$$

이다.

따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

이 나타내는 도형 위의 점이므로 이 방정식이 도형 F'의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

4 **도형의 평행이동**

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

$f(x-a,\ y-b)=0$은 $f(x,\ y)=0$에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한 것과 같다.

154

용어와 기호

- $f(x,\ y)=0$

준비하기

|주안점| 이차함수의 평행이동을 말할 수 있는지 확인한다.

|풀이| $y=(x+2)^2+1$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

답 풀이 참조

평행이동

평가 기준

상	평행이동한 도형의 방정식과 원래의 방정식의 관계를 이해하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	주어진 도형의 방정식으로부터 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
하	평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 도마뱀 모양의 도형을 가로 또는 세로 방향으로 움직여 보면서 평행이동의 뜻을 직관적으로 알게 한다.

▶ 도마뱀 ⑤

내용 연구

1 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 점 $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$로 옮기는 변환을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$

이때 평행이동을 변환으로서 강조하지 않도록 한다.

2 직선의 방정식과 원의 방정식을 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 나타낼 수 있음을 이해하게 한다.

3 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 할 때, x와 x', y와 y'의 관계를 이용하여 평행이동한 도형 F'의 방정식을 구하는 방법을 유도할 수 있게 한다.

|오개념 바로잡기| 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식을 점의 평행이동과 혼동하여 $f(x+a,\ y+b)=0$으로 잘못 생각하지 않도록 주의하게 한다.

4 평행이동에 의하여 도형의 방정식은 변형되지만 도형의 모양은 유지됨을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 좌표평면에서 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 점 $\mathrm{A}(-2,\ 5)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(x',\ y')$이라 하면

$$x'=-2+4=2,\quad y'=5+(-1)=4$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.

(2) 점 $\mathrm{B}(3,\ -4)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(x',\ y')$이라 하면

$$x'=3+4=7,\quad y'=-4+(-1)=-5$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(7,\ -5)$이다.

답 (1) $(2,\ 4)$ (2) $(7,\ -5)$

문제 2

| 주안점 | 좌표평면에서 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 1 | (1) $2x-y-3=0$에서 x 대신 $x-3$, y 대신 $y+5$를 대입하면

$$2(x-3)-(y+5)-3=0$$

즉, $2x-y-14=0$

(2) $(x-2)^2+(y+1)^2=6$에서 x 대신 $x-3$, y 대신 $y+5$를 대입하면

$$\{(x-3)-2\}^2+\{(y+5)+1\}^2=6$$

즉, $(x-5)^2+(y+6)^2=6$

답 (1) $2x-y-14=0$
(2) $(x-5)^2+(y+6)^2=6$

| 풀이 2 | (2) 원의 중심 $(2,\ -1)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면 $(5,\ -6)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$으로 변함이 없으므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-5)^2+(y+6)^2=6$$

문제 3

| 주안점 | 좌표평면에서 평행이동한 도형의 방정식을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 1 | $x^2+y^2+8x-2y-2=0$에서

$$(x+4)^2+(y-1)^2=19$$

위의 원의 방정식에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입하면 $(x-a+4)^2+(y-b-1)^2=19$

이 원의 중심은 원점이 되어야 하므로

$$a-4=0,\quad b+1=0$$

따라서 $a=4,\ b=-1$

답 $a=4,\ b=-1$

| 풀이 2 | $x^2+y^2+8x-2y-2=0$에서

$$(x+4)^2+(y-1)^2=19$$

즉, 원의 중심의 좌표가 $(-4,\ 1)$이므로 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 중심이 원점이려면

$$-4+a=0,\quad 1+b=0$$

따라서 $a=4,\ b=-1$

생각 넓히기

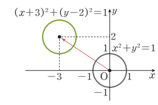
| 지도 방향 | 세 점을 지나는 원의 방정식을 평행이동을 이용하는 방법과 컴퓨터 프로그램을 이용하는 방법으로 구하여 그 결과를 비교할 수 있게 한다.

예제 1 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하시오.

풀이 $x^2+y^2=1$에서 x 대신 $x-(-3)$, y 대신 $y-2$를 대입하면

$$\{x-(-3)\}^2+(y-2)^2=1$$

즉, $(x+3)^2+(y-2)^2=1$



답 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$

문제 2 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $2x-y-3=0$ (2) $(x-2)^2+(y+1)^2=6$

문제 3 원 $x^2+y^2+8x-2y-2=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 중심이 원점인 원이 되었다. 이때 상수 a, b의 값을 구하시오.

생각 넓히기 문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

세 점 $A(1,\ 1)$, $B(-1,\ 1)$, $C(2,\ -2)$를 지나는 원의 방정식을 다음 [방법 1]과 [방법 2]와 같이 구하고, 그 결과를 비교해 보자.

[방법 1] 평행이동을 이용하여 구하는 방법

❶ 세 점 A, B, C를 각각 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 세 점 A′, B′, C′의 좌표를 구한다.
❷ 세 점 A′, B′, C′을 지나는 원의 방정식을 구한다.
❸ ❷에서 구한 원의 방정식을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식을 구한다.

[방법 2] 컴퓨터 프로그램을 이용하여 구하는 방법

❶ 입력창에 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 입력하고, Enter를 누른다.
❷ 메뉴에서 '세 점을 지나는 원'을 클릭한 다음 세 점 A, B, C를 차례대로 선택한다.
❸ 대수창에 나타난 원의 방정식을 확인한다.

155

| 풀이 | [방법 1] ❶ 점 A′의 좌표는

$(1-1,\ 1-1)$, 즉 $(0,\ 0)$

점 B′의 좌표는

$(-1-1,\ 1-1)$, 즉 $(-2,\ 0)$

점 C′의 좌표는

$(2-1,\ -2-1)$, 즉 $(1,\ -3)$

❷ 세 점 A′, B′, C′을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 하면

$$c=0,\ 4-2a+c=0,\ 10+a-3b+c=0$$

$c=0$을 대입한 후 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=4$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+2x+4y=0$$

에서 $(x+1)^2+(y+2)^2=5$

❸ ❷에서 구한 원의 방정식에서 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-1$을 대입하면

$$(x-1+1)^2+(y-1+2)^2=5$$

이므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y+1)^2=5$$

수학 이야기

평행이동으로 만든 쪽매 맞춤

같은 모양의 조각(쪽매)을 서로 겹치거나 틈이 생기지 않게 늘어놓아 평면을 덮는 것을 '평면 채우기' 또는 '쪽매 맞춤'이라 하는데, 이는 평행이동과 같은 여러 가지 도형의 이동으로 아름다운 기하학적 패턴을 연출하는 미술의 한 분야이다.

153쪽의 **생각 열기**에서의 그림은 네덜란드의 판화가인 에스허르(Escher, M. C., 1898~1972)의 「도마뱀」이라는 작품의 일부로 동일한 도마뱀 모양의 도형을 교묘하게 맞물려서 만든 쪽매 맞춤의 한 예이다.

쪽매 맞춤을 만드는 가장 쉬운 방법은 정사각형을 이용하여 쪽매를 만드는 것이다. 예를 들어 아래 그림과 같이 정사각형 종이에서 오려낸 부분을 평행이동하여 물고기 모양의 쪽매를 만들 수 있다. 이때 만들어진 쪽매를 상하좌우로 연결하면 왼쪽 그림과 같은 쪽매 맞춤을 만들 수 있다.

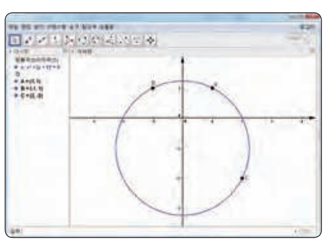
컴퓨터 프로그램을 이용하여 움직이거나 입체적인 모양의 쪽매 맞춤을 만들 수도 있다.

다음 [그림 1]은 한국계 미국인으로 비디오 게임 디자이너인 스콧 김(Kim, S., 1955~)이 만든 「Figure」라는 작품으로 움직이는 쪽매 맞춤이다. 흰색 바탕에 검은색으로 쓴 글자 [그림 2]와 검은색 바탕에 흰색으로 쓴 글자 [그림 3]을 평행이동하여 디자인한 형상이 연속적으로 움직이는 모습에서 환상적인 느낌을 받기도 한다.

[그림 1] [그림 2] [그림 3]

156

[방법 2]



➡ $x^2+(y+1)^2=5$

[방법 1]과 [방법 2]를 이용하여 구한 원의 방정식은 서로 같다.

답 풀이 참조

지도 자료

평행이동과 벡터

평행이동은 임의의 한 점 P와 점 P가 평행이동에 의하여 옮겨지는 점 P′을 부여함으로써 결정된다.

즉, 평행이동은 임의의 점 P에서 점 P′쪽으로 향하는 유향 성분, 즉 벡터 $\overrightarrow{PP'}$으로 나타낼 수 있다.

좌표평면에서 임의의 점 P(x, y)가 한 평행이동에 의하여 점 P′(x', y')으로 옮겨졌다고 하면 두 점 P, P′의 좌표 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$x'=x+a,\quad y'=y+b$ (단, a, b는 상수)

수학 이야기 ➝ 평행이동으로 만든 쪽매 맞춤

쪽매 맞춤은 테셀레이션(Tessellation)의 순 우리말로 한 가지 이상의 도형을 이용하여 빈틈이나 포개짐 없이 평면이나 공간을 완벽하게 덮는 것을 말한다. 테셀레이션의 어원은 라틴어 'tessella'에서 유래하였는데, 고대 로마 모자이크에 사용되었던 작은 정사각형 모양의 돌 또는 타일을 뜻한다.

에스허르

테셀레이션은 네덜란드 화가인 에스허르(Escher, M. C., 1898~1972)에 의하여 미술의 한 장르로 정착하였다. 풍경화를 주로 그리던 에스허르는 1936년 지중해 연안을 따라 여행하던 중 스페인 그라나다에 있는 알함브라 궁전을 방문하였다. 그곳에서 그는 계속해서 반복되는 형상들이 평면을 규칙적으로 분할하는 무어인의 장식 미술에 크게 감동을 받아 기하학적 원리와 수학적 개념을 토대로 2차원의 평면 위에 3차원 공간을 표현한 작품을 그리기 시작하였다.

에스허르의 대표작으로는 교과서 156쪽에 실린 「도마뱀」(1943) 외에도 「폭포」(1961), 「뫼비우스의 띠 Ⅱ」(1963) 등이 있다.

「폭포」

현대에는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 도형의 단순한 반복이 아니라 대칭이동, 회전, 반사 등의 도형의 이동과 관련된 수학적 원리를 통해 다양한 방법을 테셀레이션에 시도하게 되었다.

|참고| 에스허르의 작품을 감상할 수 있는 누리집 주소

www.mcescher.com

스콧 김의 작품을 감상할 수 있는 누리집 주소

www.scottkim.com

소단원 지도 개관

지도 목표

① 좌표평면에서 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동의 뜻을 이해하고, 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

② 좌표평면에서 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동의 뜻을 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 대칭이동한 도형의 방정식에 대한 특징을 알아보고, 원래 도형의 방정식과 비교하여 방정식이 바뀌는 규칙을 이해하게 한다.

② 원점에 대한 대칭이동과 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 혼동하지 않도록 주의하게 한다.

③ 대칭이동은 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대한 대칭이동에 대해서만 지도한다.

용어와 기호

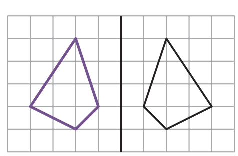
• 대칭이동(對稱移動, symmetric transformation)

준비하기

|주안점| 선대칭도형을 그릴 수 있는지 확인한다.

|풀이| 주어진 도형을 직선 l을 기준으로 하여 접었을 때 완전히 포개어지도록 그린다.

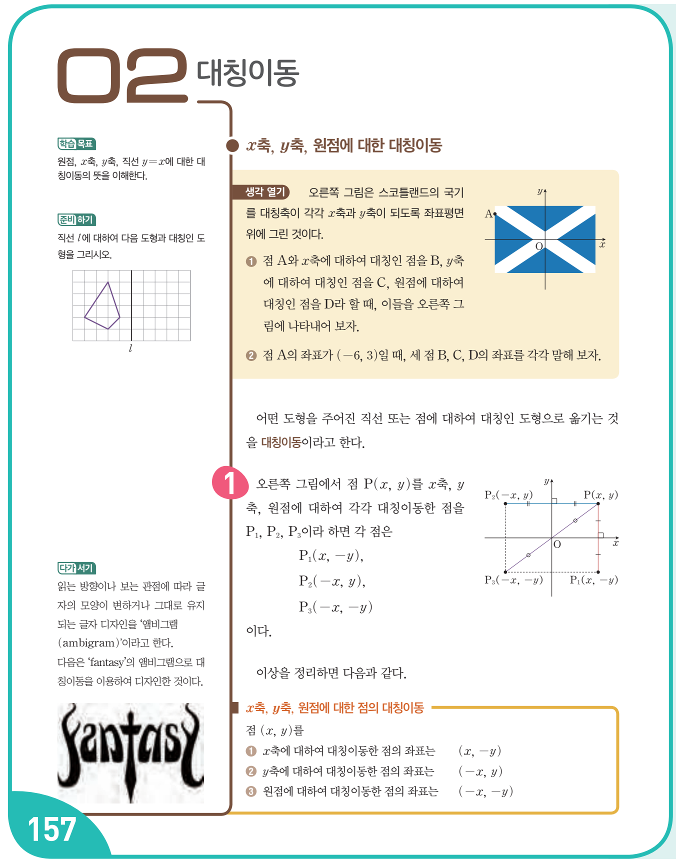
답



● x축, y축, 원점에 대한 대칭이동

평가 기준

상	x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
하	x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.



02 대칭이동

학습 목표
원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 뜻을 이해한다.

준비하기
직선 l에 대하여 다음 도형과 대칭인 도형을 그리시오.

● x축, y축, 원점에 대한 대칭이동

생각 열기 오른쪽 그림은 스코틀랜드의 국기를 대칭축이 각각 x축과 y축이 되도록 좌표평면 위에 그린 것이다.

❶ 점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 B, y축에 대하여 대칭인 점을 C, 원점에 대하여 대칭인 점을 D라 할 때, 이들을 오른쪽 그림에 나타내어 보자.

❷ 점 A의 좌표가 $(-6, 3)$일 때, 세 점 B, C, D의 좌표를 각각 말해 보자.

어떤 도형을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭인 도형으로 옮기는 것을 **대칭이동**이라고 한다.

1 오른쪽 그림에서 점 $P(x, y)$를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2, P_3이라 하면 각 점은

$P_1(x, -y)$,

$P_2(-x, y)$,

$P_3(-x, -y)$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

x축, y축, 원점에 대한 점의 대칭이동
점 (x, y)를
❶ x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x, -y)$
❷ y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$
❸ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$

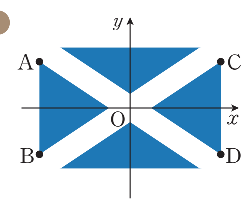
다가서기
읽는 방향이나 보는 관점에 따라 글자의 모양이 변하거나 그대로 유지되는 글자 디자인을 '앰비그램(ambigram)'이라고 한다.
다음은 'fantasy'의 앰비그램으로 대칭이동을 이용하여 디자인한 것이다.

157

생각 열기

|지도 방향| 좌표평면에 나타낸 스코틀랜드의 국기를 이용하여 x축, y축, 원점에 대한 점의 대칭이동을 알게 한다.

❶



❷ 점 B의 좌표는 $(-6, -3)$
점 C의 좌표는 $(6, 3)$
점 D의 좌표는 $(6, -3)$

내용 연구

1 점 P를 x축(또는 y축)에 대하여 대칭이동한 점을 P'이라 하면 x축(또는 y축)은 선분 PP'을 수직이등분한다.
또, 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P''이라 하면 선분 PP''의 중점은 원점이다.

보기 점 $(1, 2)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

$(1, -2)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$

문제 1 점 $(4, -6)$을 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축 (2) y축 (3) 원점

2, 3 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축에 대하여 대칭이동한 도형 F'의 방정식을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 도형 F 위의 점 $P(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면

$$x'=x, \quad y'=-y$$

이므로

$$x=x', \quad y=-y'$$

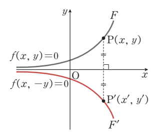
이다. 이것을 $f(x, y)=0$에 대입하면

$$f(x', -y')=0$$

이다. 따라서 점 $P'(x', y')$은 방정식

$$f(x, -y)=0$$

이 나타내는 도형 위의 점이므로 이 방정식이 도형 F'의 방정식이다.

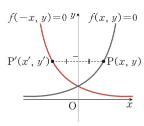


x축에 대한 대칭이동

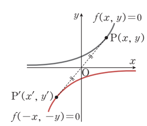
4, 5 같은 방법으로 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축과 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각

$$f(-x, y)=0, \quad f(-x, -y)=0$$

임을 알 수 있다.



y축에 대한 대칭이동



원점에 대한 대칭이동

158

❷ 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 F 위의 점 $P(x, y)$를 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 할 때, x와 x', y와 y'의 관계를 이용하여 대칭이동한 도형 F'의 방정식을 구하는 방법을 유도할 수 있게 한다.

❸ 도형 F를 대칭이동한 도형을 F'이라 할 때, 도형 F'은 도형 F 위의 각 점을 대칭이동한 점들로 이루어진 도형임을 알게 한다.

❹ 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 F를 원점에 대하여 대칭이동한 도형 F'의 방정식은 다음과 같이 얻는다.

도형 F 위의 점 $P(x, y)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면

$$x'=-x, \quad y'=-y$$

이므로

$$x=-x', \quad y=-y'$$

이다. 이것을 $f(x, y)=0$에 대입하면

$$f(-x', -y')=0$$

이다. 따라서 점 $P'(x', y')$은 방정식

$$f(-x, -y)=0$$

이 나타내는 도형 위의 점이므로 이 방정식이 도형 F'의 방정식이다.

❺ 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각 $f(x, -y)=0$, $f(-x, y)=0$, $f(-x, -y)=0$이므로 다음과 같이 이해하게 한다.

(i) x축에 대한 대칭이동: y의 부호가 반대

(ii) y축에 대한 대칭이동: x의 부호가 반대

(iii) 원점에 대한 대칭이동: x, y의 부호가 모두 반대

문제 풀이

문제 1

|주안점| 좌표평면에서 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 $(4, -6)$을

(1) x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, 6)$

(2) y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-4, -6)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-4, 6)$

답 (1) $(4, 6)$ (2) $(-4, -6)$ (3) $(-4, 6)$

지도 자료

1. 좌표축에 대한 선대칭도형과 원점에 대한 점대칭도형

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형이

① $f(x, -y)=f(x, y)$이면

➡ x축에 대한 선대칭도형

② $f(-x, y)=f(x, y)$이면

➡ y축에 대한 선대칭도형

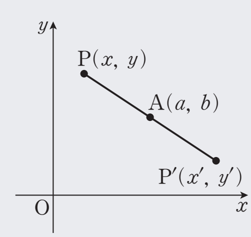
③ $f(-x, -y)=f(x, y)$이면

➡ 원점에 대한 점대칭도형

2. 점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표

점 $P(x, y)$를 점 $A(a, b)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $P'(x', y')$이라 하면 점 A는 선분 PP'의 중점이다. 즉,

$$\frac{x+x'}{2}=a, \quad \frac{y+y'}{2}=b$$



에서

$$x'=2a-x, \quad y'=2b-y$$

이므로 점 P'의 좌표는 $(2a-x, 2b-y)$이다.

생각톡톡 같다.

내용 연구

1 **예제 1**은 대칭이동을 하더라도 도형의 모양은 변하지 않는다는 점을 이용하여 다음과 같이 풀 수도 있다.
원 $(x-3)^2+(y+4)^2=9$는 중심의 좌표가 $(3,\ -4)$, 반지름의 길이가 3인 원이다.

(1) 원의 중심 $(3,\ -4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $(3,\ 4)$이고 반지름의 길이가 3이므로 구하는 원의 방정식은
$$(x-3)^2+(y-4)^2=9$$

(2) 원의 중심 $(3,\ -4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $(-3,\ -4)$이고 반지름의 길이가 3이므로 구하는 원의 방정식은
$$(x+3)^2+(y+4)^2=9$$

(3) 원의 중심 $(3,\ -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 $(-3,\ 4)$이고 반지름의 길이가 3이므로 구하는 원의 방정식은
$$(x+3)^2+(y-4)^2=9$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

생각톡톡 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같을까?

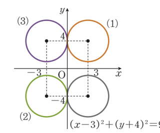
x축, y축, 원점에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을
1. x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ -y)=0$
2. y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ y)=0$
3. 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$

1 **예제 1** 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=9$를 다음에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

(1) x축 (2) y축 (3) 원점

풀이 $(x-3)^2+(y+4)^2=9$에서
(1) y 대신 $-y$를 대입하면
$$(x-3)^2+(-y+4)^2=9$$
즉, $(x-3)^2+(y-4)^2=9$
(2) x 대신 $-x$를 대입하면
$$(-x-3)^2+(y+4)^2=9$$
즉, $(x+3)^2+(y+4)^2=9$
(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$$(-x-3)^2+(-y+4)^2=9$$
즉, $(x+3)^2+(y-4)^2=9$



답 풀이 참조

문제 2 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하시오.

(1) $2x-y+1=0$ (2) $x^2+y^2-4x+6y=0$

문제 3 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 다음 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

159

문제 풀이

문제 2

| 주안점 | 좌표평면에서 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $2x-y+1=0$에서 y 대신 $-y$를 대입하면
$$2x-(-y)+1=0$$
즉, $2x+y+1=0$
$2x-y+1=0$에서 x 대신 $-x$를 대입하면
$$2(-x)-y+1=0$$
즉, $2x+y-1=0$
$2x-y+1=0$에서 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$$2(-x)-(-y)+1=0$$
즉, $2x-y-1=0$

(2) $x^2+y^2-4x+6y=0$에서 y 대신 $-y$를 대입하면
$$x^2+(-y)^2-4x+6(-y)=0$$
즉, $x^2+y^2-4x-6y=0$
$x^2+y^2-4x+6y=0$에서 x 대신 $-x$를 대입하면
$$(-x)^2+y^2-4(-x)+6y=0$$
즉, $x^2+y^2+4x+6y=0$
$x^2+y^2-4x+6y=0$에서 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$$(-x)^2+(-y)^2-4(-x)+6(-y)=0$$
즉, $x^2+y^2+4x-6y=0$

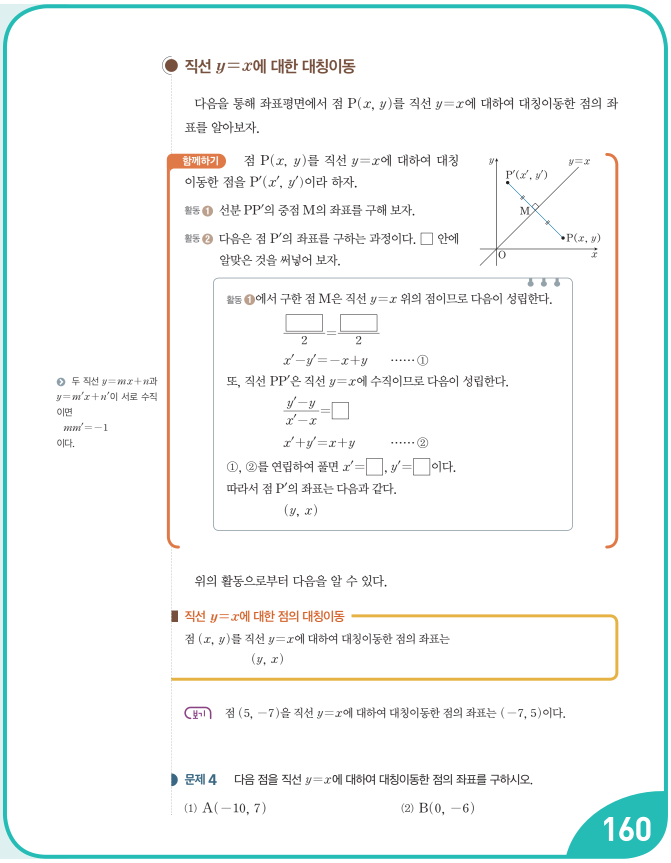
답 풀이 참조

문제 3

| 주안점 | 평행이동한 후 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $(x+2)^2+(y-1)^2=4$에서 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$$(x-1+2)^2+(y-2-1)^2=4$$
즉, $(x+1)^2+(y-3)^2=4$
이 도형을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하기 위해 위의 식에서 y 대신 $-y$를 대입하면
$$(x+1)^2+\{(-y)-3\}^2=4$$
즉, $(x+1)^2+(y+3)^2=4$

답 $(x+1)^2+(y+3)^2=4$



● 직선 $y=x$에 대한 대칭이동

다음을 통해 좌표평면에서 점 P$(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 알아보자.

함께하기 점 P$(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P$'(x',\ y')$이라 하자.

활동 ① 선분 PP$'$의 중점 M의 좌표를 구해 보자.

활동 ② 다음은 점 P$'$의 좌표를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

활동 ①에서 구한 점 M은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\square}{2}=\frac{\square}{2}$$

$$x'-y'=-x+y \qquad \cdots\cdots ①$$

또, 직선 PP$'$은 직선 $y=x$에 수직이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\square$$

$$x'+y'=x+y \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $x'=\square$, $y'=\square$이다.

따라서 점 P$'$의 좌표는 다음과 같다.

$(y,\ x)$

▸ 두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$이 서로 수직이면 $mm'=-1$ 이다.

위의 활동으로부터 다음을 알 수 있다.

직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동

점 $(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(y,\ x)$

보기 점 $(5,\ -7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-7,\ 5)$이다.

문제 4 다음 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) A$(-10,\ 7)$ (2) B$(0,\ -6)$

160

● 직선 $y=x$에 대한 대칭이동

함께하기

| 지도 방향 | 좌표평면에서 점 P$(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P$'(x',\ y')$의 좌표는 직선 $y=x$가 선분 PP$'$을 수직이등분함을 이용하여 구할 수 있음을 이해하게 한다.

| 풀이 | ❶ 두 점 P$(x,\ y)$, P$'(x',\ y')$의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$$

❷ ❶에서 구한 점 M은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\boxed{y+y'}}{2}=\frac{\boxed{x+x'}}{2}$$

$$y+y'=x+x'$$

$$x'-y'=-x+y \qquad \cdots\cdots ①$$

또, 직선 PP$'$은 직선 $y=x$에 수직이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\boxed{-1}$$

$$y'-y=x-x'$$

$$x'+y'=x+y \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $x'=\boxed{y}$, $y'=\boxed{x}$이다.

따라서 점 P$(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P$'$의 좌표는 다음과 같다.

$(y,\ x)$

답 ❶ $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$
❷ $y+y'$, $x+x'$, -1, y, x

문제 풀이

문제 4

| 주안점 | 좌표평면에서 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 점 A$(-10,\ 7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(7,\ -10)$

(2) 점 B$(0,\ -6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

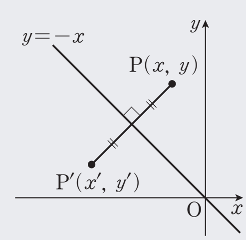
$(-6,\ 0)$

답 (1) $(7,\ -10)$ (2) $(-6,\ 0)$

지도 자료

직선 $y=-x$에 대한 점의 대칭이동

좌표평면에서 점 P$(x,\ y)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면 다음과 같다.



점 P$(x,\ y)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 P$'(x',\ y')$이라 하면 선분 PP$'$의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=-x$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2}=-\frac{x+x'}{2}$$

$$y+y'=-(x+x') \qquad \cdots\cdots ①$$

또, 직선 PP$'$은 직선 $y=-x$에 수직이므로

$$-\frac{y'-y}{x'-x}=-1$$

$$y'-y=x'-x \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$x'=-y$, $y'=-x$

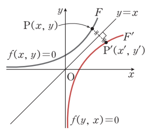
따라서 점 P$(x,\ y)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점 P$'$의 좌표는 다음과 같다.

$(-y,\ -x)$

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형 F'의 방정식을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 도형 F 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면

$$x'=y,\quad y'=x$$



이므로

$$x=y',\quad y=x'$$

이다. 이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(y',\ x')=0$$

이다. 따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식

1 $$f(y,\ x)=0$$

이 나타내는 도형 위의 점이므로 이 방정식이 도형 F'의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

생각톡톡
직선 $y=-x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 무엇일까?

직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y,\ x)=0$$

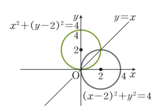
예제 2 원 $(x-2)^2+y^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

풀이 $(x-2)^2+y^2=4$에서 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$$(y-2)^2+x^2=4$$

즉, $x^2+(y-2)^2=4$

답 $x^2+(y-2)^2=4$



문제 5 다음 방정식이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $3x+y+2=0$　　(2) $x^2+y^2-2x+4y=0$

161

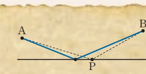
탐구&융합

대칭이동을 이용한 최단 거리

창의·융합 | 추론

고대 그리스의 수학자 헤론(Heron, 10?～75?)은 『거울에 대하여』라는 책에서 다음 문제를 다루고 있다.

직선 l에 대하여 같은 방향에 두 점 A, B가 있을 때, 점 A에서 직선 l 위의 한 점 P를 거쳐 점 B까지 가는 거리, 즉 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치를 정하시오.

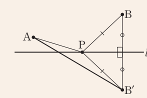


헤론은 직선 l을 거울이라 생각할 때 입사각과 반사각의 크기가 같은 원리를 이용하여, 점 A에서 비춘 빛이 거울에 반사되어 점 B를 통과하게 되는 점 P의 위치를 찾으면 된다고 설명했다.

대칭이동을 이용하여 이 원리를 설명하면, 오른쪽 그림과 같이 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′, 직선 l 위의 점을 P라 할 때,

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$$

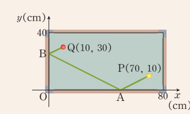
이 성립한다.



따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 선분 AB′의 길이이고, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 l과 선분 AB′의 교점이 됨을 알 수 있다.

(출처: Römer, H., 『Theoretical of Optics: An Introduction』)

탐구 오른쪽 그림은 가로의 길이가 80 cm, 세로의 길이가 40 cm인 직사각형 모양의 미니 당구대를 두 변이 좌표축에 놓이도록 그린 것이다. 점 $\mathrm{P}(70,\ 10)$의 위치에 놓여 있는 노란 공을 쳐서 x축과 y축에 차례대로 부딪히게 한 다음 점 $\mathrm{Q}(10,\ 30)$의 위치에 놓인 빨간 공을 맞히려고 할 때, 다음을 구해 보자. (단, 공의 크기는 무시하며, 공이 당구대의 변에 부딪칠 때의 입사각과 반사각의 크기는 같다.)



(1) 노란 공의 이동 거리

(2) 두 점 A와 B의 좌표

162

내용 연구

1 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$이므로 직선 $y=x$에 대한 대칭이동은

x 대신 y, y 대신 x를 대입

과 같이 이해하게 한다.

생각톡톡 $y=-x$

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | 좌표평면에서 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $3x+y+2=0$에서 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$$3y+x+2=0,\ 즉\ x+3y+2=0$$

(2) $x^2+y^2-2x+4y=0$에서 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

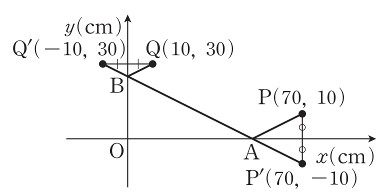
$$y^2+x^2-2y+4x=0,\ 즉\ x^2+y^2+4x-2y=0$$

답 (1) $x+3y+2=0$　(2) $x^2+y^2+4x-2y=0$

탐구&융합 대칭이동을 이용한 최단 거리

| 지도 방향 | 직선 l에 대하여 같은 방향에 두 점 A, B가 있을 때, 두 점 중 한 점을 직선 l에 대하여 대칭이동하면 구하는 거리의 합이 최소가 됨을 이해하게 한다.

| 풀이 | (1) 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 Q를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 Q′이라 하면 노란 공의 이동 거리는 선분 P′Q′의 길이와 같다.



따라서 $\mathrm{P}'(70,\ -10)$, $\mathrm{Q}'(-10,\ 30)$이므로

$$\overline{\mathrm{P'Q'}}=\sqrt{(-10-70)^2+\{30-(-10)\}^2}=40\sqrt{5}\,(\mathrm{cm})$$

(2) 직선 P′Q′의 방정식은

$$y+10=\frac{30-(-10)}{-10-70}(x-70),\ 즉\ y=-\frac{1}{2}x+25$$

따라서 $\mathrm{A}(50,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 25)$이다.

답 (1) $40\sqrt{5}$ cm

(2) 점 A의 좌표는 $(50,\ 0)$, 점 B의 좌표는 $(0,\ 25)$

Ⅲ-4. 도형의 이동

중단원 마무리하기

평행이동

(1) **점의 평행이동**

점 (x, y)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(x+a, y+b)$

(2) **도형의 평행이동**

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-a, y-b)=0$

대칭이동

(1) 어떤 도형을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭인 도형으로 옮기는 것을 **대칭이동**이라고 한다.

(2) **점의 대칭이동**

점 (x, y)를

❶ x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x, -y)$

❷ y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$

❸ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$

❹ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (y, x)

(3) **도형의 대칭이동**

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

❶ x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$

❷ y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$

❸ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, -y)=0$

❹ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$

기본

01 점 $(3,\ -4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2,\ 0)$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

02 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $x-3y+8=0$

(2) $(x-1)^2+y^2=16$

03 점 $(5,\ -2)$를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축 (2) y축

(3) 원점 (4) 직선 $y=x$

04 원 $(x-11)^2+(y+7)^2=9$를 다음에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

(1) x축 (2) y축

(3) 원점 (4) 직선 $y=x$

163

중단원 마무리하기

01

|주안점| 점의 평행이동을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 $(3,\ -4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(3+a,\ -4+b)$

따라서 $3+a=-2,\ -4+b=0$이므로

$a=-5,\ b=4$ 답 $a=-5,\ b=4$

02

|주안점| 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x-3y+8=0$에서 x 대신 $x-2$, y 대신 $y-1$을 대입하면

$(x-2)-3(y-1)+8=0$, 즉 $x-3y+9=0$

(2) $(x-1)^2+y^2=16$에서 x 대신 $x-2$, y 대신 $y-1$을 대입하면

$(x-2-1)^2+(y-1)^2=16$

즉, $(x-3)^2+(y-1)^2=16$

답 (1) $x-3y+9=0$ (2) $(x-3)^2+(y-1)^2=16$

03

|주안점| 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 $(5,\ -2)$를

(1) x축에 대하여 대칭이동하면 $(5,\ 2)$

(2) y축에 대하여 대칭이동하면 $(-5,\ -2)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동하면 $(-5,\ 2)$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(-2,\ 5)$

답 (1) $(5,\ 2)$ (2) $(-5,\ -2)$ (3) $(-5,\ 2)$ (4) $(-2,\ 5)$

04

|주안점| 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $(x-11)^2+(y+7)^2=9$에서

(1) y 대신 $-y$를 대입하면

$(x-11)^2+(-y+7)^2=9$

즉, $(x-11)^2+(y-7)^2=9$

(2) x 대신 $-x$를 대입하면

$(-x-11)^2+(y+7)^2=9$

즉, $(x+11)^2+(y+7)^2=9$

(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$(-x-11)^2+(-y+7)^2=9$

즉, $(x+11)^2+(y-7)^2=9$

(4) x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$(y-11)^2+(x+7)^2=9$

즉, $(x+7)^2+(y-11)^2=9$ 답 풀이 참조

05

|주안점| 주어진 조건을 만족시키는 평행이동에 의해 옮겨지는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 두 점 A, B를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점이 각각 A′, B′과 일치한다고 하면

$-3+m=3,\ 2+n=6$에서 $m=6,\ n=4$

$a+4=4,\ b+6=1$이므로 $a=0,\ b=-5$

따라서 점 $(0,\ -5)$를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(0+6,\ -5+4)$, 즉 $(6,\ -1)$ 답 $(6,\ -1)$

06

|주안점| 직선의 평행이동을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 직선 $y=2x-3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-b=2(x-a)-3$, 즉 $y=2x-2a-3+b$
이 직선이 원래의 직선과 일치해야 하므로

$$-2a+b-3=-3, \quad 2a=b$$

따라서 $\quad \dfrac{b}{a}=2$ 답 2

07

| 주안점 | 주어진 조건을 만족시키는 평행이동에 의해 옮겨지는 원의 방정식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 점 $(1,\ 5)$를 점 $(-1,\ a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2=21$은 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $a-5$만큼 평행이동한다.
$x^2+y^2=21$에서 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-a+5$를 대입하면 $\quad (x+2)^2+(y-a+5)^2=21$
위의 식을 전개하면

$$x^2+y^2+4x-2(a-5)y+(a-5)^2-17=0 \quad \cdots ①$$

①과 $x^2+y^2+bx-8y+c=0$이 같으므로

$$a=9,\ b=4,\ c=-1$$

따라서 $\quad a+b-c=14$ 답 14

08

| 주안점 | 직선의 평행이동과 원과 직선이 접하는 조건을 이용하여 실수 a의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 직선 $3x-4y-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-a)-4y-5=0, \text{ 즉 } 3x-4y-3a-5=0$$

이 직선과 원의 중심 $(-3,\ 2)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$$\frac{|3\times(-3)-4\times2-3a-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1,$$

$$|-3a-22|=5$$

따라서 $\quad a=-9$ 또는 $a=-\dfrac{17}{3}$

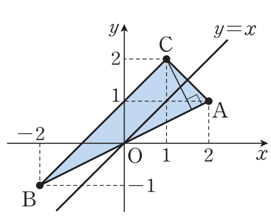
답 -9 또는 $-\dfrac{17}{3}$

09

| 주안점 | 원점 및 직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 점 $A(2,\ 1)$을 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각

$B(-2,\ -1)$,
$C(1,\ 2)$



표준

05 두 점 $A(-3,\ a)$, $B(b,\ 2)$를 각각 $A'(3,\ 4)$, $B'(1,\ 6)$으로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(a,\ b)$가 옮겨지는 점의 좌표를 구하시오.

06 직선 $y=2x-3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원래의 직선과 일치하였다. 이때 $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, $a\neq0$)

07 점 $(1,\ 5)$를 점 $(-1,\ a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2=21$은 원

$$x^2+y^2+bx-8y+c=0$$

으로 옮겨진다. 이때 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하시오.

08 직선 $3x-4y-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하였더니 원

$$(x+3)^2+(y-2)^2=1$$

에 접하였다. 이때 실수 a의 값을 구하시오.

09 점 $A(2,\ 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

164

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$이고
직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{-1-1}{-2-2}(x-2), \text{ 즉 } x-2y=0$$

점 $C(1,\ 2)$와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|1\times1-2\times2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=3$$

답 3

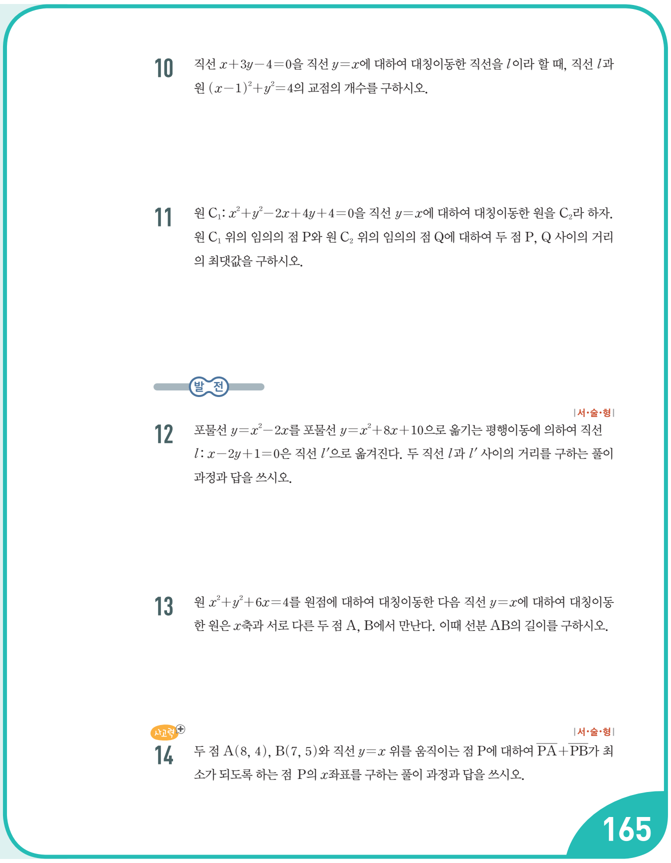
10

| 주안점 | 직선 $y=x$에 대한 직선의 대칭이동, 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 교점의 개수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 직선 l의 방정식은 $\quad 3x+y-4=0$
원 $(x-1)^2+y^2=4$의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리를 원의 반지름의 길이 2와 비교하면

$$\frac{|3+0-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}<2$$

따라서 직선 l과 원 $(x-1)^2+y^2=4$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 개수는 2이다. 답 2



10 직선 $x+3y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 할 때, 직선 l과 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 교점의 개수를 구하시오.

11 원 $C_1: x^2+y^2-2x+4y+4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하자. 원 C_1 위의 임의의 점 P와 원 C_2 위의 임의의 점 Q에 대하여 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

발 전

|서·술·형|

12 포물선 $y=x^2-2x$를 포물선 $y=x^2+8x+10$으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $l: x-2y+1=0$은 직선 l'으로 옮겨진다. 두 직선 l과 l' 사이의 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

13 원 $x^2+y^2+6x=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원은 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 이때 선분 AB의 길이를 구하시오.

사고력+ |서·술·형|

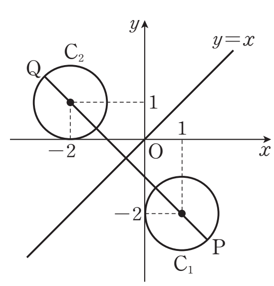
14 두 점 A(8, 4), B(7, 5)와 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$가 최소가 되도록 하는 점 P의 x좌표를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

165

11

| 주안점 | 직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동과 두 점 사이의 거리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 오른쪽 그림과 같이 원 $C_1: (x-1)^2+(y+2)^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 원 $C_2: (x+2)^2+(y-1)^2=1$이므로 $\overline{PQ}$의 최댓값은 두 원의 중심 사이의 거리에 두 원의 반지름의 길이를 모두 더한 것과 같다.



따라서 구하는 최댓값은

$$\sqrt{3^2+3^2}+1+1=3\sqrt{2}+2$$

답 $3\sqrt{2}+2$

12

| 주안점 | 처음의 직선과 주어진 조건을 만족시키는 평행이동에 의해 옮겨지는 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

해결 과정 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$$y-n=(x-m)^2-2(x-m)$$

이므로 $\quad y=x^2-2(m+1)x+m^2+2m+n$

위의 포물선이 포물선 $y=x^2+8x+10$과 일치하므로

$m=-5,\ n=-5$ ▶ 30 %

직선 $l: x-2y+1=0$을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면

$(x+5)-2(y+5)+1=0$이므로

$l': x-2y-4=0$ ▶ 40 %

답 구하기 두 직선 l과 l' 사이의 거리는 직선 $l: x-2y+1=0$ 위의 점 $(-1,\ 0)$과 직선 $l': x-2y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-1-0-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$ ▶ 30 %

13

| 주안점 | 원점에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 원 $x^2+y^2+6x=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하기 위해 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$$x^2+y^2-6x=4 \qquad \cdots\cdots ①$$

원 ①을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하기 위해 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$$x^2+y^2-6y=4 \qquad \cdots\cdots ②$$

$y=0$을 ②에 대입하면

$$x^2=4, \quad x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$이므로 구하는 선분 AB의 길이는 4이다.

답 4

14

| 주안점 | 직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동을 이용하여 선분의 길이의 합이 최소가 되도록 하는 점 P의 x좌표를 구할 수 있게 한다.

해결 과정 점 A(8, 4)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 점 C의 좌표는 $\quad (4,\ 8)$ ▶ 20 %

$\overline{PA}+\overline{PB}$가 최소가 되도록 하는 점 P는 $\overline{BC}$와 직선 $y=x$의 교점이다. 직선 BC의 방정식은

$$y-5=\frac{8-5}{4-7}(x-7),\ \text{즉 } y=-x+12$$ ▶ 50 %

답 구하기 따라서 점 P의 좌표는 두 직선 $y=-x+12$와 $y=x$의 교점의 좌표이므로 $\quad (6,\ 6)$

즉, 구하는 점 P의 x좌표는 6이다. ▶ 30 %

대단원 평가하기

> ## III 대단원 평가하기
>
> 하●●● 중●●● 상●●●
>
> **01**
> 두 점 $A(2, 1)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=x$ 위의 점의 좌표를 구하시오.
>
> **02**
> 두 점 $A(a, 1)$, $B(5, a)$에 대하여 선분 AB의 길이가 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은?
>
> ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5
>
> **03**
> 세 점 $A(-3, 5)$, $B(2, 0)$, $C(-1, k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\angle C=90°$인 직각삼각형이 되도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오.
>
> **04**
> 두 점 $A(2, 4)$, $B(5, -1)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 C와 원점 사이의 거리를 구하시오.
>
> **05**
> 두 점 $A(-5, 5)$, $B(3, 9)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는 (a, b)이다. 이때 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?
>
> ① $\frac{19}{2}$ ② 19 ③ $\frac{57}{2}$ ④ 38 ⑤ $\frac{95}{2}$
>
> **06**
> 세 점 $A(1, 3)$, $B(-3, 7)$, $C(8, 11)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 P, Q, R라 하자. 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 구하시오.
>
> **07**
> 직선 $x+3y-2=0$은 직선 $-x+ay=0$에 평행하고, 직선 $ax-by+3=0$에 수직이다. 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?
>
> ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2
>
> 166

01

|평가 목표| 주어진 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있다.

|풀이| 직선 $y=x$ 위의 점을 $C(a, a)$라 하면

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$(a-2)^2+(a-1)^2=(a-4)^2+(a-5)^2$$

$$-6a+5=-18a+41, \quad 12a=36, \quad a=3$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3, 3)$이다. 답 $(3, 3)$

02

|평가 목표| 두 점 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 실수 a의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $\overline{AB}=\sqrt{(a-5)^2+(1-a)^2}$

$$=\sqrt{2a^2-12a+26}=\sqrt{2(a-3)^2+8}$$

따라서 $a=3$일 때 $\overline{AB}$의 길이는 $2\sqrt{2}$로 최소가 된다.

답 ③

03

|평가 목표| 직각삼각형이 될 수 있는 조건을 이용하여 실수 k의 값을 구할 수 있다.

|풀이| 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$에서

$$50=(k^2-10k+29)+(k^2+9),$$

$$2k^2-10k-12=0, \quad k^2-5k-6=0,$$

$$(k+1)(k-6)=0$$

따라서 $k=-1$ 또는 $k=6$ 답 -1, 6

04

|평가 목표| 외분점의 좌표와 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

|풀이| 두 점 $A(2, 4)$, $B(5, -1)$을 잇는 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{3\times5-2\times2}{3-2}, \frac{3\times(-1)-2\times4}{3-2}\right), \text{ 즉 } (11, -11)$$

따라서 점 $C(11, -11)$과 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{11^2+(-11)^2}=11\sqrt{2}$$ 답 $11\sqrt{2}$

05

|평가 목표| 내분점과 외분점의 좌표를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

|풀이| 두 점 $A(-5, 5)$, $B(3, 9)$를 잇는 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3\times3+1\times(-5)}{3+1}, \frac{3\times9+1\times5}{3+1}\right), \text{ 즉 } (1, 8)$$

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3\times3-1\times(-5)}{3-1}, \frac{3\times9-1\times5}{3-1}\right), \text{ 즉 } (7, 11)$$

선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{8+11}{2}\right), \text{ 즉 } \left(4, \frac{19}{2}\right)$$

따라서 $a=4$, $b=\frac{19}{2}$이므로 $ab=38$ 답 ④

06

|평가 목표| 두 삼각형의 무게중심 사이의 관계를 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.

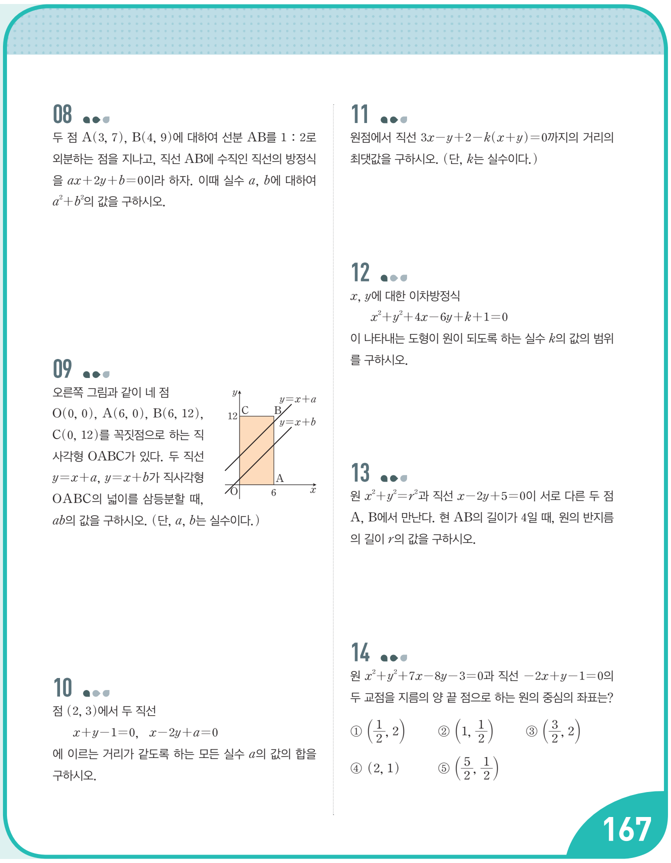
|풀이| 삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심은 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-3)+8}{3}, \frac{3+7+11}{3}\right), \text{ 즉 } (2, 7)$$

답 $(2, 7)$

07

|평가 목표| 두 직선이 서로 평행하거나 수직일 조건을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.



08 ●●●

두 점 $A(3, 7)$, $B(4, 9)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 지나고, 직선 AB에 수직인 직선의 방정식을 $ax+2y+b=0$이라 하자. 이때 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

09 ●●●

오른쪽 그림과 같이 네 점 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(6, 12)$, $C(0, 12)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 OABC가 있다. 두 직선 $y=x+a$, $y=x+b$가 직사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

10 ●●●

점 $(2, 3)$에서 두 직선

$x+y-1=0$, $x-2y+a=0$

에 이르는 거리가 같도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

11 ●●●

원점에서 직선 $3x-y+2-k(x+y)=0$까지의 거리의 최댓값을 구하시오. (단, k는 실수이다.)

12 ●●●

x, y에 대한 이차방정식

$x^2+y^2+4x-6y+k+1=0$

이 나타내는 도형이 원이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

13 ●●●

원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $x-2y+5=0$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 현 AB의 길이가 4일 때, 원의 반지름의 길이 r의 값을 구하시오.

14 ●●●

원 $x^2+y^2+7x-8y-3=0$과 직선 $-2x+y-1=0$의 두 교점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ② $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

④ $(2, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

167

|풀이| 직선 $x+3y-2=0$의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이고 직선 $-x+ay=0$의 기울기는 $\frac{1}{a}$이므로 $\quad a=-3$

직선 $ax-by+3=0$의 기울기는 $\frac{a}{b}$이므로

$-\frac{1}{3}\times\frac{a}{b}=-1$에서 $\quad b=-1$

따라서 구하는 값은 $\quad b-a=-1+3=2$ 답 ⑤

08

|평가 목표| 한 점을 지나고 다른 직선에 수직인 직선의 방정식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

|풀이| 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times4-2\times3}{1-2}, \frac{1\times9-2\times7}{1-2}\right), \text{ 즉 } (2, 5)$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{9-7}{4-3}=2$이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

점 $(2, 5)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

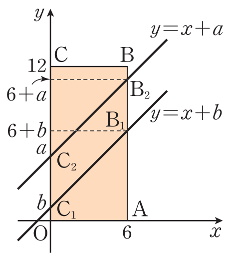
$$y-5=-\frac{1}{2}(x-2), \text{ 즉 } x+2y-12=0$$

따라서 $a=1$, $b=-12$이므로 $\quad a^2+b^2=145$ 답 145

09

|평가 목표| 주어진 조건을 만족시키는 직선의 방정식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

|풀이| 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+b$가 y축과 만나는 점을 C_1, 변 AB와 만나는 점을 B_1이라 하면 □OABC의 넓이가 72이므로 □OAB_1C_1의 넓이는 24이다.



$\frac{1}{2}(b+6+b)\times6=24$에서 $\quad b=1$

같은 방법으로 □C_2B_2BC의 넓이는 24이므로

$\frac{1}{2}\{12-a+(6-a)\}\times6=24$에서 $\quad a=5$

따라서 구하는 값은 $\quad ab=5$ 답 5

10

|평가 목표| 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 실수 a의 값의 합을 구할 수 있다.

|풀이| 점 $(2, 3)$과 직선 $x+y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①$$

점 $(2, 3)$과 직선 $x-2y+a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-6+a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a-4|}{\sqrt{5}} \quad \cdots\cdots ②$$

①과 ②는 같으므로 $\quad 2\sqrt{2}=\frac{|a-4|}{\sqrt{5}}$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad a^2-8a-24=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 실수 a의 값의 합은 8이다. 답 8

11

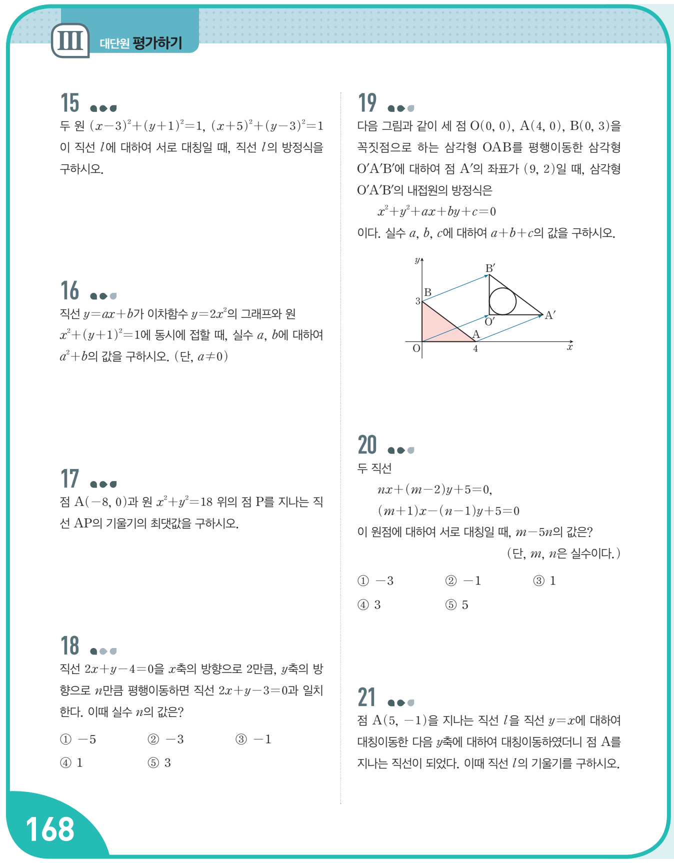
|평가 목표| 원점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있다.

|풀이| 원점과 주어진 직선 사이의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

이때 $2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8$에서

$\sqrt{2(k-1)^2+8}$은 $k=1$일 때 최솟값 $\sqrt{8}$을 가지므로 구하는 거리의 최댓값은 $\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$



III 대단원 평가하기

15 ●●●
두 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$, $(x+5)^2+(y-3)^2=1$이 직선 l에 대하여 서로 대칭일 때, 직선 l의 방정식을 구하시오.

16 ●●●
직선 $y=ax+b$가 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 원 $x^2+(y+1)^2=1$에 동시에 접할 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b의 값을 구하시오. (단, $a\neq0$)

17 ●●●
점 $\mathrm{A}(-8,\ 0)$과 원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 P를 지나는 직선 AP의 기울기의 최댓값을 구하시오.

18 ●●●
직선 $2x+y-4=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $2x+y-3=0$과 일치한다. 이때 실수 n의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

19 ●●●
다음 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB를 평행이동한 삼각형 O′A′B′에 대하여 점 A′의 좌표가 $(9,\ 2)$일 때, 삼각형 O′A′B′의 내접원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

이다. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

20 ●●●
두 직선

$$nx+(m-2)y+5=0,$$
$$(m+1)x-(n-1)y+5=0$$

이 원점에 대하여 서로 대칭일 때, $m-5n$의 값은? (단, m, n은 실수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

21 ●●●
점 $\mathrm{A}(5,\ -1)$을 지나는 직선 l을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 다음 y축에 대하여 대칭이동하였더니 점 A를 지나는 직선이 되었다. 이때 직선 l의 기울기를 구하시오.

168

12

| 평가 목표 | x, y에 대한 이차방정식이 원의 방정식이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구할 수 있다.

| 풀이 | 주어진 방정식을 변형하면

$$(x+2)^2+(y-3)^2=12-k$$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면 $12-k>0$이어야 하므로 $k<12$

답 $k<12$

13

| 평가 목표 | 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$에서 직선 $x-2y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=2,\quad \overline{\mathrm{OH}}=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

직각삼각형 OAH에서

$$r=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$$

답 3

14

| 평가 목표 | 원과 직선의 두 교점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.

| 풀이 | $y=2x+1$을 $x^2+y^2+7x-8y-3=0$에 대입하여 정리하면

$$x^2-x-2=0,\quad (x-2)(x+1)=0$$

에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 직선과 원의 두 교점의 좌표는 $(-1,\ -1)$, $(2,\ 5)$이므로 구하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+2}{2},\ \frac{-1+5}{2}\right),\ 즉\ \left(\frac{1}{2},\ 2\right)$$

답 ①

15

| 평가 목표 | 두 원의 중심을 이은 선분을 수직이등분하는 직선의 방정식을 구할 수 있다.

| 풀이 | 두 원의 중심인 점 $(3,\ -1)$과 점 $(-5,\ 3)$은 직선 l에 대하여 대칭이므로 직선 l은 두 원의 중심을 이은 선분의 수직이등분선이다.

두 점 $(3,\ -1)$, $(-5,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-(-1)}{-5-3}=-\frac{1}{2}$$

이므로 직선 l의 기울기는 2이다.

또, 두 원의 중심을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+(-5)}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right),\ 즉\ (-1,\ 1)$$

따라서 직선 l은 기울기가 2이고 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$$y-1=2(x+1),\ 즉\ y=2x+3$$

답 $y=2x+3$

16

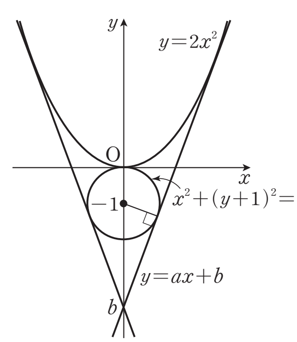
| 평가 목표 | 직선이 원, 이차함수의 그래프와 각각 접하는 조건을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $y=ax+b$를 $y=2x^2$에 대입하여 정리하면

$$2x^2-ax-b=0$$

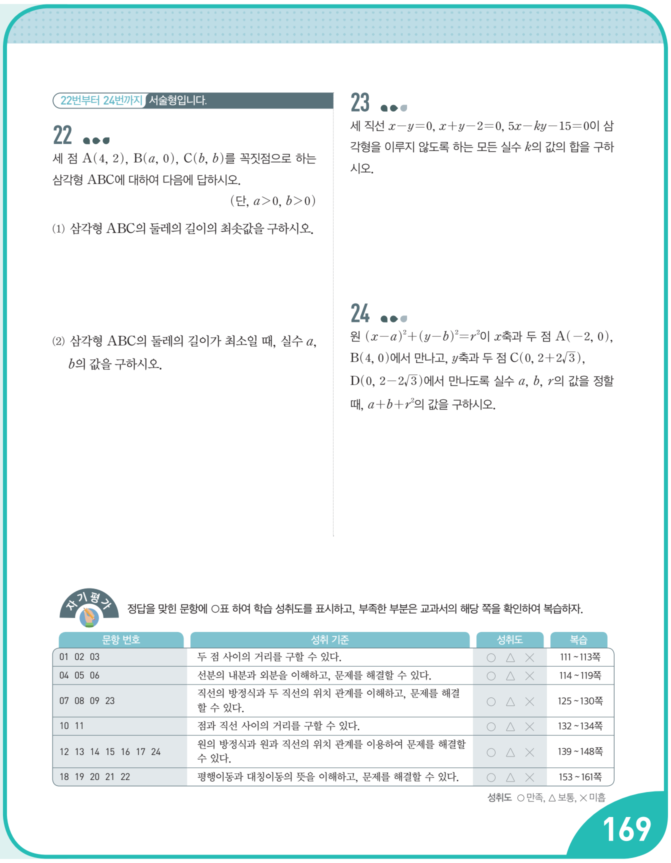
이 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$이어야 하므로

$$a^2=-8b \quad \cdots ①$$



원 $x^2+(y+1)^2=1$과 직선 $y=ax+b$, 즉 $ax-y+b=0$이 접하려면

$$\frac{|1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=1에서\quad a^2+1=b^2+2b+1 \quad \cdots ②$$



22번부터 24번까지 서술형입니다.

22 ●●●

세 점 $A(4, 2)$, $B(a, 0)$, $C(b, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 다음에 답하시오.

(단, $a>0$, $b>0$)

(1) 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

(2) 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소일 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

23 ●●●

세 직선 $x-y=0$, $x+y-2=0$, $5x-ky-15=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

24 ●●●

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 x축과 두 점 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$에서 만나고, y축과 두 점 $C(0, 2+2\sqrt{3})$, $D(0, 2-2\sqrt{3})$에서 만나도록 실수 a, b, r의 값을 정할 때, $a+b+r^2$의 값을 구하시오.

자기평가 정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02 03	두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	○ △ ×	111~113쪽
04 05 06	선분의 내분과 외분을 이해하고, 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	114~119쪽
07 08 09 23	직선의 방정식과 두 직선의 위치 관계를 이해하고, 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	125~130쪽
10 11	점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	○ △ ×	132~134쪽
12 13 14 15 16 17 24	원의 방정식과 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	139~148쪽
18 19 20 21 22	평행이동과 대칭이동의 뜻을 이해하고, 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	153~161쪽

성취도 ○만족, △보통, ×미흡

169

①, ②를 연립하여 풀면

$$b=-10\ (b<0),\quad a^2=80$$

따라서 구하는 값은 $\quad a^2+b=70$

답 70

17

| 평가 목표 | 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 직선의 기울기의 최댓값을 구할 수 있다.

| 풀이 | 직선 AP의 기울기를 m이라 하면 이 직선이 점 $(-8, 0)$을 지나므로

$$y=m(x+8),\ \text{즉}\ mx-y+8m=0$$

직선 AP의 기울기가 최대일 때, 원의 중심인 점 $(0, 0)$과 직선 AP 사이의 거리는 $3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|8m|}{\sqrt{m^2+1}}=3\sqrt{2},\quad 64m^2=18m^2+18,$$

$$m^2=\frac{9}{23},\quad m=\pm\frac{3\sqrt{23}}{23}$$

따라서 직선 AP의 기울기의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{23}}{23}$이다.

답 $\frac{3\sqrt{23}}{23}$

18

| 평가 목표 | 직선의 평행이동을 이용하여 실수 n의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $2x+y-4=0$에서 x 대신 $x-2$, y 대신 $y-n$을 대입하면

$$2(x-2)+(y-n)-4=0$$

즉, $\quad 2x+y-n-8=0$

이 직선이 $2x+y-3=0$과 일치하므로

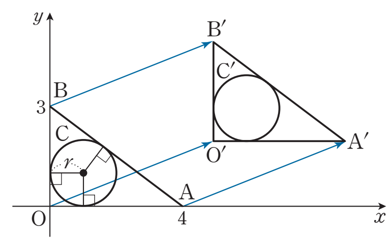
$$-n-8=-3,\quad n=-5$$

답 ①

19

| 평가 목표 | 도형의 평행이동과 원의 방정식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | 두 삼각형 OAB, O′A′B′에 내접하는 원을 각각 C, C′이라 하자. 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C는 x축, y축에 모두 접하고 제1사분면에 중심이 있으므로 중심의 좌표는 (r, r)이다.



두 점 $A(4, 0)$, $B(0, 3)$에 대하여 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1,\ \text{즉}\ 3x+4y-12=0$$

원 C가 직선 AB에 접하므로 원의 중심 (r, r)와 직선 AB 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r와 같다. 즉,

$$\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r,\quad |7r-12|=5r$$

에서 $\quad r=6$ 또는 $r=1$

이때 $0<r<3$이므로 $\quad r=1$

따라서 원 C의 방정식은 $\quad (x-1)^2+(y-1)^2=1$

점 $A(4, 0)$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 $A'(9, 2)$가 되므로 이 평행이동에 의하여 원 C가 평행이동한 원 C′의 방정식은

$$(x-5-1)^2+(y-2-1)^2=1,$$

$$(x-6)^2+(y-3)^2=1$$

에서 $\quad x^2+y^2-12x-6y+44=0$

따라서 $a=-12$, $b=-6$, $c=44$이므로

$$a+b+c=-12+(-6)+44=26$$

답 26

20

| 평가 목표 | 도형의 원점에 대한 대칭이동을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $nx+(m-2)y+5=0$에서 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-nx-(m-2)y+5=0$ …… ①

①과 $(m+1)x-(n-1)y+5=0$이 같으므로

$-n=m+1$, $m-2=n-1$

따라서 $m=0$, $n=-1$이므로 $m-5n=5$ 답 ⑤

21

| 평가 목표 | 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 기울기를 구할 수 있다.

| 풀이 | 직선 l의 기울기를 m이라 하면 이 직선이 점 A$(5, -1)$을 지나므로 그 방정식은

$y+1=m(x-5)$ …… ①

직선 ①을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하기 위해 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$x+1=m(y-5)$ …… ②

직선 ②를 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하기 위해 x 대신 $-x$를 대입하면

$-x+1=m(y-5)$ …… ③

직선 ③이 점 A$(5, -1)$을 지나므로

$-5+1=m(-1-5)$, $m=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

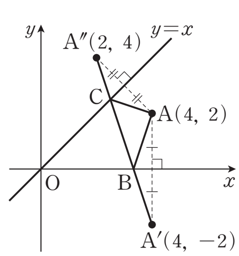
22

| 평가 목표 | x축, 직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이와 관련된 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | (1) 점 B는 x축 위의 점이고, 점 C는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′$(4, -2)$



점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면 A″$(2, 4)$

$\overline{\mathrm{BA'}}=\overline{\mathrm{BA}}$, $\overline{\mathrm{CA''}}=\overline{\mathrm{CA}}$이므로 직선 A′A″이 x축, 직선 $y=x$와 만나는 점이 각각 B, C일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소가 된다. ▶ 30 %

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{(2-4)^2+\{4-(-2)\}^2}$

$=2\sqrt{10}$ ▶ 20 %

(2) 두 점 A′$(4, -2)$, A″$(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-(-2)}{2-4}(x-2)$

즉, $y=-3x+10$ ▶ 20 %

점 B는 직선 A′A″의 x절편이고, 점 C는 직선 A′A″과 직선 $y=x$의 교점이므로

B$\left(\frac{10}{3}, 0\right)$, C$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

따라서 $a=\frac{10}{3}$, $b=\frac{5}{2}$ ▶ 30 %

23

| 평가 목표 | 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 조건을 이용하여 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.

해결 과정 (i) 직선 $5x-ky-15=0$이 다른 두 직선 중 하나와 평행할 때,

$k=-5$ 또는 $k=5$ ▶ 40 %

(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

직선 $5x-ky-15=0$이 나머지 두 직선의 교점 $(1, 1)$을 지나므로 $k=-10$ ▶ 40 %

답 구하기 (i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+5+(-10)=-10$ ▶ 20 %

24

| 평가 목표 | 원에서 현의 수직이등분선의 성질을 이용하여 구한 원의 방정식에서 식의 값을 구할 수 있다.

해결 과정 x축과 만나는 두 점 A, B를 이은 선분의 수직이등분선이 원의 중심을 지나므로 중심의 x좌표는

$a=\frac{-2+4}{2}=1$ ▶ 30 %

y축과 만나는 두 점 C, D를 이은 선분의 수직이등분선이 원의 중심을 지나므로 중심의 y좌표는

$b=\frac{2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}}{2}=2$ ▶ 30 %

원의 중심의 좌표 $(1, 2)$와 점 A$(-2, 0)$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$r^2=(-2-1)^2+(0-2)^2=13$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 값은

$a+b+r^2=16$ ▶ 10 %

수학 이야기

도형의 이동으로 만드는 띠 문양

다음 [그림 1]은 우리나라 전통 공예와 건축물에서 많이 사용하는 띠 문양이고, [그림 2]는 고대 그리스에서 만든 토기의 장식으로 많이 사용했던 띠 문양이다.
이 두 가지 띠 문양의 배열 구조에는 어떤 특징이 있을까?

[그림 1] [그림 2]

띠 문양은 기준이 되는 기본 도형을 평행이동, 대칭이동, 회전이동을 결합하여 한쪽 방향으로 반복적으로 이어 가는 구조이다. 이와 같은 세 가지 도형의 이동의 특성을 이용하여 수학자들은 평면에서 그릴 수 있는 모든 띠 문양은 7가지로 분류할 수 있다는 사실을 알아냈다.

다음은 발자국 모양을 이용하여 만든 7가지 기본 도형과 띠 문양의 구조를 나타낸 것이다. 두 발로 걸어 보면서 여러 가지 띠 문양을 만든 다음 아래의 7가지 규칙과 기본 도형 중에서 어디에 해당하는지 알아보자.

규칙	기본 도형	띠 문양
평행이동		
미끄럼 대칭이동 ⇨ 평행이동		
좌우 대칭이동 ⇨ 평행이동		
상하 대칭이동 ⇨ 평행이동		
좌우 대칭이동 및 미끄럼 대칭이동 ⇨ 평행이동		
상하 대칭이동 및 좌우 대칭이동 ⇨ 평행이동		
회전이동 ⇨ 평행이동		

(출처: Conway, J. 외, 『The Symmetries of Things』)

170

실내 디자인과 도형의 방정식

뿌리가 되는 수학

실내 디자인은 산업 디자인의 한 분야로 주택, 사무실, 상가 건물의 내부 공간을 설계하고 장식하는 것이다. 사람의 생활 공간을 아름답고 쾌적하게 만드는 일뿐만 아니라 실내 환경과 건축에 대한 깊이 있는 이해를 통해 기능적, 구조적, 심미적인 공간을 창조할 수 있도록 하는 것이 중요하다.

실내 디자인은 실내를 하나의 양식으로 디자인하는 것부터 생활 방식, 개인의 능력과 이상에 부합하게 디자인하는 것까지 그 의미가 확장되어 오면서 요즘에는 주거뿐만 아니라 배, 항공기 등의 내부까지 폭넓게 활용되고 있다. 이와 같은 여러 분야에서 효율적인 작업을 하는 데 다양한 기하학적 원리를 활용하게 된다.

먼저 공간 배치나 설계를 위해 도면을 만드는 과정에서 평면좌표가 이용된다. 컴퓨터 설계 프로그램을 이용해 평면 위에 x축과 y축을 설정하고 거리와 크기를 나타내는데, 이렇게 설정된 좌표평면 위에 내부 공간의 위치를 좌표로 표시하여 실제 공간에서 이루어질 작업을 미리 모형화하게 된다. 이 과정에서 도면 위에 표시한 좌표를 통해 실제 작업 공간에서 가구의 크기나 위치, 주변 다른 요소들과의 거리의 차 등 여러 가지 요소를 고려한 시뮬레이션을 진행한다.
이를 통해 사람의 동선을 고려하여 설치할 가구들의 위치와 상대적인 거리, 간격 등을 설정하고 기둥, 난간 등의 실내 장식 요소가 차지할 공간을 미리 계산하여 실제 건축 시 필요한 공간을 예측할 수 있다.

다음으로 내부 시설의 효율적인 배치를 할 때 기하학적 원리를 활용할 수 있다.
예를 들어 2.4 m의 간격을 유지하면서 작동 범위가 서로 겹치지 않도록 천장에 설치할 수 있는 스프링클러의 개수를 구하는 과정에서 원의 성질을 이용할 수 있다. 또, 벽이나 기둥의 겉면을 타일로 무늬를 만들어 장식할 때는 여러 가지 도형의 이동의 성질을 이용할 수 있다.

이처럼 수학과 디자인은 쉽게 연결할 수 없는 분야처럼 보이지만 실내 디자인에서 수학의 기하학적 원리는 효율적으로 작업이 진행되도록 하는 바탕이 된다.

(출처: 커리어넷)

171

수학 이야기 - 도형의 이동으로 만드는 띠 문양

띠 문양이란 일정한 조각이 좌·우로 반복되는 문양을 말하고, 이때 반복되는 도형을 '기본 도형'이라고 한다.
아무리 복잡하고 섬세한 띠 문양이라고 하더라도 기본 도형을 평행이동, 대칭이동, 회전이동하는 세 가지 도형의 이동의 특성을 기본으로 한 7가지 규칙으로 설명할 수 있다.
예를 들어 교과서 170쪽에 제시된 우리 나라 전통 건축물에서 볼 수 있는 **[그림 1]**은 '미끄럼 대칭이동 ⇨ 평행이동'을 이용하여 만든 띠 문양이고, 고대 그리스 토기 장식에서 볼 수 있는 **[그림 2]**는 '평행이동'을 이용하여 만든 띠 문양이다.

뿌리가 되는 수학 - 실내 디자인과 도형의 방정식

실내 디자이너는 주택, 사무실, 상가 건물의 내부 환경을 기능과 용도에 맞게 설계하고 장식하는 일을 한다. 건물의 목적과 기능, 예산 및 건축 형태 등의 특성을 파악하여 디자인 콘셉트를 세우고 세부 일정 및 계획을 수립한다. 또, 공간 구조, 가구나 시설의 배치 및 이용, 색상 등 구체적인 계획에 대하여 고객과 협의하고, 동선 계획과 색채 계획, 조명 계획 등을 세우고 가구와 장식품, 조명 기구 등을 구체적으로 선정하는 일도 한다.
실내 디자이너는 계획하고 결정된 사항들을 컴퓨터 프로그램을 이용하거나 직접 도면에 그리고 표시한다. 디자인이 완성되면 세부 도면을 작성하여 시공업자에게 전달하고 경우에 따라서는 시공 작업을 감독하는 역할을 하기도 한다.

IV 집합과 명제

1. 집합
2. 명제

이 단원에서는

집합의 뜻과 연산 법칙을 이해하고,
명제와 조건의 참과 거짓, 명제의 역과 대우,
충분조건과 필요조건 및 절대부등식의 증명을 알아본다.

1 단원의 개관

지도 목표

1. 집합
- 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있게 한다.
- 두 집합 사이의 포함 관계를 이해하게 한다.
- 합집합과 교집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있게 한다.
- 여집합과 차집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있게 한다.

2. 명제
- 명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해하게 한다.
- 명제의 역과 대우를 이해하고, 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해하게 한다.
- 충분조건과 필요조건을 이해하고 구별할 수 있게 한다.
- 절대부등식의 뜻을 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 집합
- 집합의 연산 법칙은 벤다이어그램으로 확인하는 정도로 간단히 다룬다.

2. 명제
- 명제와 조건의 뜻은 수학적인 문장을 이해하는 수준에서 간단히 다룬다.
- '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제는 구체적인 상황을 이용하여 도입할 수 있다.
- 명제의 증명은 간단한 것만 다룬다.
- 충분조건, 필요조건, 필요충분조건은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
- 증명을 지도할 때는 직관적인 이해로부터 시작하여 점진적으로 형식화하게 한다.
- 대우를 이용한 증명법과 귀류법은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
- 수학의 여러 내용 영역과 연계하여 집합과 명제의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

학습 계통도

배운 내용

[중학교 수학 1]
- 정수와 유리수

[중학교 수학 2]
- 유리수와 순환소수
- 삼각형과 사각형의 성질

[중학교 수학 3]
- 제곱근과 실수

이 단원의 내용

1. 집합
   - 01 집합
   - 02 집합 사이의 포함 관계
   - 03 합집합과 교집합
   - 04 여집합과 차집합

2. 명제
   - 01 명제와 조건
   - 02 명제의 역과 대우
   - 03 충분조건과 필요조건
   - 04 절대부등식

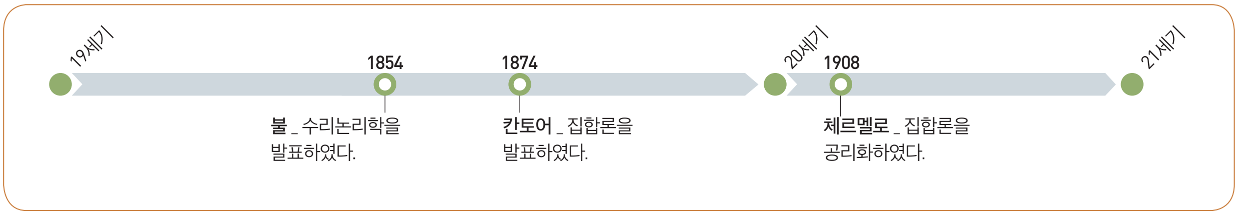
배울 내용

[수학]
- 함수
- 경우의 수

[수학 Ⅰ]
- 지수와 로그
- 등차수열과 등비수열
- 수학적 귀납법

[확률과 통계]
- 확률

2 단원의 이론적 배경



1 집합론의 등장

많은 수학 분야가 여러 사람들이 오랫동안 연구하여 만들어진 결과물인데 비하여 집합론은 단 한 사람, 칸토어(Cantor, G., 1845~1918)에 의해 만들어졌다. 칸토어는 1874년의 논문 「모든 실 대수적 수의 집합의 성질에 대하여(On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers)」에서 집합론의 기본 개념을 발표하였다. 그는 이 논문에서 일대일대응에 의한 두 집합의 기수를 도입하고, 실 대수적 수의 집합의 기수가 자연수의 집합의 기수와 같음을 보였다.

물론, 칸토어 이전에 갈릴레이(Galilei, Galileo, 1564~1642)도 '각각의 자연수마다 그들의 제곱을 하나씩 대응시킬 수 있으므로 자연수의 개수와 그들의 제곱의 개수는 같다.'라고 주장하였는데, 이는 칸토어가 집합의 대등이라는 개념으로 기수(基數, cardinal number)를 정의한 것과 같은 아이디어인 것은 사실이다.


갈릴레이

칸토어의 기본적인 아이디어는 무한집합의 기수에 관한 것인데, 우선 두 집합 A, B가 일대일대응일 때, 즉 전단사함수

$$f : A \longrightarrow B$$

가 존재할 때, A와 B는 대등(對等, equipotent)하다고 하고, 이때 두 집합의 기수가 같다고 정의하며

$$|A| = |B|$$

로 나타낸다.

집합 A가 유한집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$과 대등할 때, A의 기수는 n으로 정한다.

또, 집합 A가 자연수 전체의 집합 N과 대등할 때 A를 가부번집합(可附番集合, denumerable set)이라 하고 이러한 집합의 기수를

$$\aleph_0 \text{(aleph null)}$$

로 정한다. 유한집합과 가부번집합을 통틀어 가산집합(可算集合, countable set)이라 하며, 가산집합이 아닌 집합을 비가산집합(非可算集合, uncountable set)이라고 한다.


칸토어

칸토어는 유리수의 집합 Q는 가산집합이고, 실수의 집합 R는 비가산임을 보였다. 또, 수직선으로 나타낼 수 있는 실수의 집합 R의 기수가 좌표평면 위의 점의 집합 R^2의 기수와 같다는 사실도 보일 수 있었다.

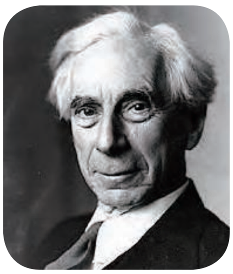
칸토어의 연구는 무한을 직접적으로 다룰 수 있게 했다는 점에서, 또 무한집합의 기수가 모두 같지 않다는 점을 발견한 점에서 경이로운 결과였다.

2 집합론의 역설과 체르멜로 프랭켈의 공리계

칸토어의 집합론은 그 논리적 기반이 충분하지 않아서 다음과 같은 역설(逆說, Paradox) 들이 속속 발견되었으므로 '소박한 집합론(Naive set theory)'으로 불린다.

(1) 칸토어의 역설(1899)

칸토어의 정리에 따르면, 모든 집합의 기수는 그 집합의 부분집합 전체의 집합의 기수보다 항상 작다. 그러나 이는 집합 전체의 집합보다도 큰 기수를 가지는 집합이 있게 되어 모순이다.



러셀

(2) 러셀의 역설(1901)

러셀(Russell, B. A. W., 1871～1970)은 1901년에 다음과 같은 역설을 제시하였다.

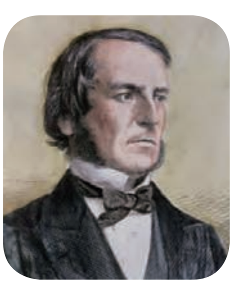
> 자기 자신을 원소로 갖지 않는 모든 집합들의 집합을 A라 하자. 즉,
>
> $A=\{X \mid X$는 집합, $X \notin X\}$
>
> 이다. 여기에서 만일 A가 A의 원소이면 A의 정의에 의하여 $A \notin A$이다. 또, $A \notin A$ 이면 A를 정의한 조건에 의하여 $A \in A$이다.
>
> 즉, A가 A의 원소일 필요충분조건이 A가 A의 원소가 아닌 것이므로 모순이다.

이러한 논리적 결함을 메우기 위해서 체르멜로(Zermelo, E., 1871～1953)와 프랭켈(Fraenkel, A., 1891～1965)은 집합론의 공리화에 착수하여 현재의 체르멜로 프랭켈의 집합론(Zermelo-Fraenkel set theory, ZF)으로 정리했다.

오늘날의 집합론은 이들의 공리계에 선출공리(選出公理, Axiom of choice)를 포함한 것으로 ZFC라고 한다. ZFC에서는 모든 서수의 모임이나, 모든 집합의 모임은 집합이 될 수 없고, 자신을 원소로 가지는 집합도 존재하지 않는다. 따라서 칸토어의 역설이나 러셀의 역설 등은 일어나지 않는다.

3 명제와 논리

형식논리를 수학에 적용하는 방법을 연구하는 분야를 수리논리학(數理論理學, mathematical logic)이라 하는데, 수리논리학은 19세기 중반 불(Boole, G., 1815～1864)과 드모르간(De Morgan, A., 1806～1871)에 의해 그 체계가 만들어졌다.



불

참과 거짓을 가릴 수 있는 문장을 명제(命題, proposition)라 하고, 보통 p, q, r, $\cdots$ 등으로 나타낸다. 또, 명제가 참인 것을 T, 거짓인 것을 F로 나타낸다.

명제 p에 대하여 $\sim p$를 p의 부정명제(否定命題, negation)라 하는데, 그것의 참, 거짓을 오른쪽 표와 같이 정한다.

p	$\sim p$
T	F
F	T

또, 두 명제 p, q에 대하여

'p 또는 q이다.'를 $p \vee q$

'p이고 q이다.'를 $p \wedge q$

'p이면 q이다.'를 $p \longrightarrow q$

'p이면 q이고 q이면 p이다.'를 $p \longleftrightarrow q$

로 나타낸다.

명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 p를 가정(假定), q를 결론(結論)이라 하고, $p \longrightarrow q$가 항상 참이면

$$p \Longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때 p는 q이기 위한 충분조건(充分條件, sufficient condition), q는 p이기 위한 필요조건(必要條件, necessary condition)이라고 한다. 또, 명제 $p \longleftrightarrow q$가 항상 참일 때,

$$p \Longleftrightarrow q$$

와 같이 나타내며, 이때 p는 q이기 위한 필요충분조건(必要充分條件, necessary and sufficient condition)이라고 한다.

전체집합 U에 속하는 변수 x의 값에 따라서 참 또는 거짓인 문장 $p(x)$를 조건명제(條件命題, conditional proposition)라 하는데 $p(x)$가 참인 x들의 집합 즉,

$$P=\{x \mid p(x)\text{는 참}\}$$

을 $p(x)$의 진리집합(眞理集合, truth set)이라고 한다.

조건명제는 명제가 아니지만

'모든 x에 대하여 $p(x)$이다'

는 $P=U$일 때 참이고, 그렇지 않으면 거짓인 명제가 된다. 이것을 기호로

$$\forall x\ p(x)$$

와 같이 나타내며, 이때 $\forall$을 전칭기호(全稱記號, universal quantifier)라고 한다. 또,

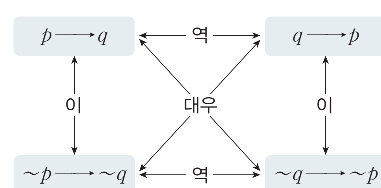
'어떤 x가 존재하여 $p(x)$이다'

는 $P \neq \varnothing$일 때 참이고, 그렇지 않으면 거짓인 명제이다. 이것을 기호로

$$\exists x\ p(x)$$

와 같이 나타내며, 이때 $\exists$을 존재기호(存在記號, existential quantifier)라고 한다.

명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 $q \longrightarrow p$, $\sim p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim p$를 각각 $p \longrightarrow q$의 역(逆, converse), 이(裏, inverse), 대우(對偶, contraposition)라 부르는데, 명제 $p \longrightarrow q$와 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 둘 다 참이거나 아니면 둘 다 거짓이다.



즉, 두 명제의 진릿값이 항상 일치하므로, 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명하기 위해서 그 대우가 참임을 증명해도 된다. 이와 같은 방법을 대우증명법이라고 한다.

명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명하는 또 다른 방법으로, q가 성립하지 않는다면 p에 모순이 됨을 밝히는 방법이 있는데, 이와 같은 방법은 귀류법(歸謬法, reductio ad absurdum)으로 불린다.

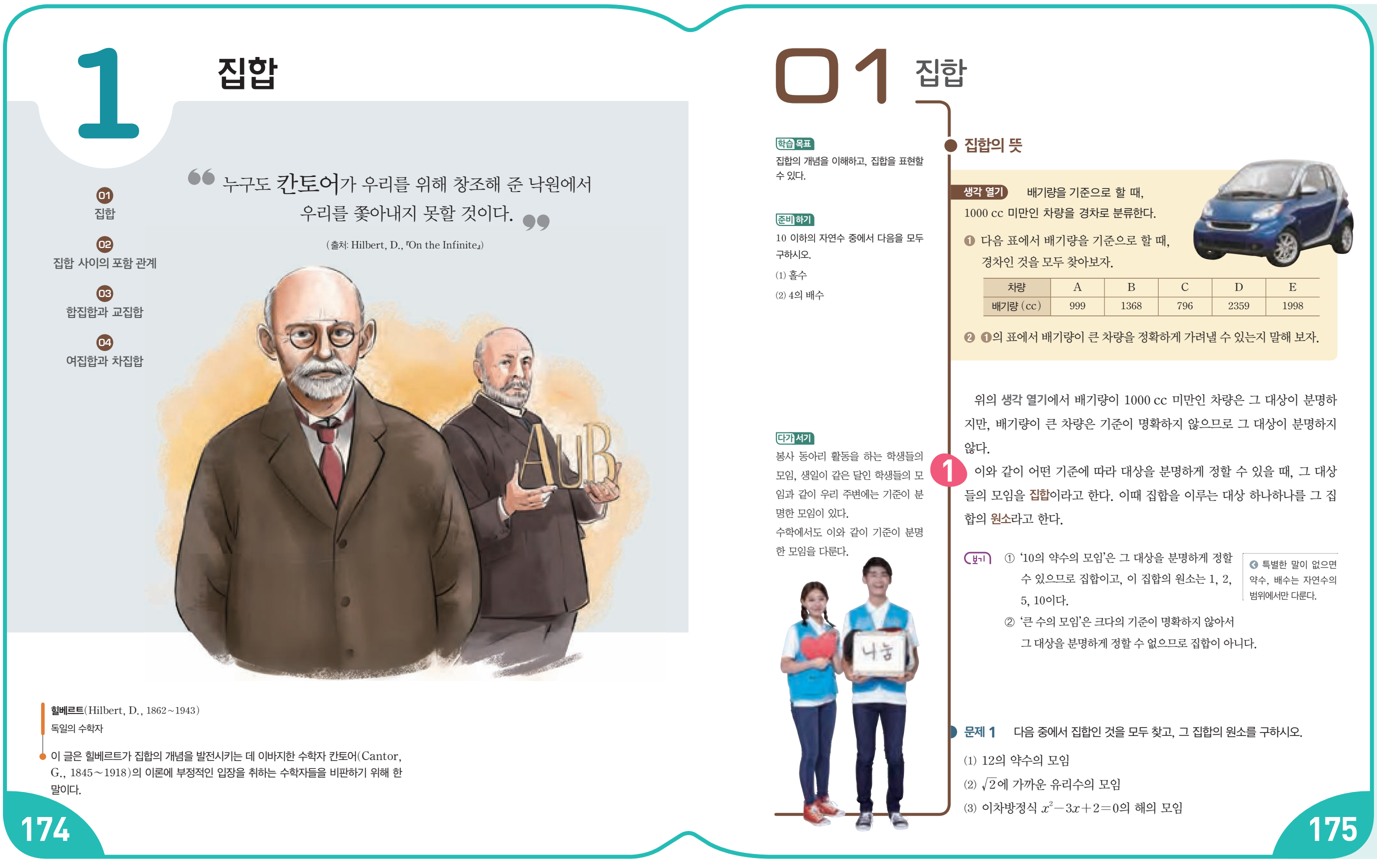
참고 문헌

- Eves, H., 『수학사』, 이우영, 신항균 역, 경문사, 1999
- Merzbach, U. C. and Boyer, C., 『A History of Mathematics, 3rd Edition』, John Wiley & Sons, 2011
- Pinter, C., 『A Book of Set Theory』, Dover, 2014

3 단원의 지도 계획

중단원	소단원	차시 (총 25차시)	교과서 쪽 수	지도 내용	용어와 기호
1. 집합	01 집합	3	175~177	• 집합의 뜻 • 집합의 표현 • 집합의 원소의 개수	집합, 원소, 벤다이어그램, 공집합, $a \in A$, $b \notin A$, $n(A)$, $\varnothing$
	02 집합 사이의 포함 관계	1	178~179	• 부분집합과 진부분집합	부분집합, 진부분집합, $A \subset B$, $A \not\subset B$, $A = B$, $A \neq B$
	03 합집합과 교집합	3	180~183	• 합집합과 교집합 • 집합의 연산 법칙	합집합, 교집합, 서로소, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, $A \cup B$, $A \cap B$
	04 여집합과 차집합	3	184~187	• 여집합과 차집합 • 드모르간의 법칙	전체집합, 여집합, 차집합, 드모르간의 법칙, U, A^C, $A-B$
			188	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	1	189~191	• 중단원 마무리하기	
2. 명제	01 명제와 조건	5	193~198	• 명제와 그 부정 • 조건과 진리집합 • 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓 • '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제 • 정의, 증명, 정리	명제, 부정, 조건, 진리집합, 가정, 결론, 정의, 증명, 정리, $\sim p$, $p \longrightarrow q$
	02 명제의 역과 대우	3	199~201	• 명제의 역과 대우 • 대우를 이용한 증명법 • 귀류법	역, 대우, 귀류법
	03 충분조건과 필요조건	1	202~203	• 충분조건과 필요조건	충분조건, 필요조건, 필요충분조건, $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$
	04 절대부등식	2	204~205	• 절대부등식	절대부등식
			206	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	1	207~209	• 중단원 마무리하기	
대단원 마무리		2	210~213	• 대단원 평가하기	
			214	• 수학 이야기	
			215	• 뿌리가 되는 수학	

※ 실제 지도는 학교의 실정에 따라 알맞게 계획하고 재수정할 수 있다.



1 집합

01 집합
02 집합 사이의 포함 관계
03 합집합과 교집합
04 여집합과 차집합

“누구도 칸토어가 우리를 위해 창조해 준 낙원에서 우리를 쫓아내지 못할 것이다.”

(출처: Hilbert, D., 『On the Infinite』)

힐베르트(Hilbert, D., 1862~1943)
독일의 수학자

이 글은 힐베르트가 집합의 개념을 발전시키는 데 이바지한 수학자 칸토어(Cantor, G., 1845~1918)의 이론에 부정적인 입장을 취하는 수학자들을 비판하기 위해 한 말이다.

174

01 집합

학습 목표
집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

준비하기
10 이하의 자연수 중에서 다음을 모두 구하시오.
(1) 홀수
(2) 4의 배수

다가서기
봉사 동아리 활동을 하는 학생들의 모임, 생일이 같은 달인 학생들의 모임과 같이 우리 주변에는 기준이 분명한 모임이 있다.
수학에서도 이와 같이 기준이 분명한 모임을 다룬다.

집합의 뜻

생각 열기 배기량을 기준으로 할 때, 1000 cc 미만인 차량을 경차로 분류한다.

❶ 다음 표에서 배기량을 기준으로 할 때, 경차인 것을 모두 찾아보자.

차량	A	B	C	D	E
배기량 (cc)	999	1368	796	2359	1998

❷ ❶의 표에서 배기량이 큰 차량을 정확하게 가려낼 수 있는지 말해 보자.

위의 **생각 열기**에서 배기량이 1000 cc 미만인 차량은 그 대상이 분명하지만, 배기량이 큰 차량은 기준이 명확하지 않으므로 그 대상이 분명하지 않다.

1 이와 같이 어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임을 **집합**이라고 한다. 이때 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 한다.

보기 ① ‘10의 약수의 모임’은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이고, 이 집합의 원소는 1, 2, 5, 10이다.
② ‘큰 수의 모임’은 크다의 기준이 명확하지 않아서 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

특별한 말이 없으면 약수, 배수는 자연수의 범위에서만 다룬다.

문제 1 다음 중에서 집합인 것을 모두 찾고, 그 집합의 원소를 구하시오.
(1) 12의 약수의 모임
(2) $\sqrt{2}$에 가까운 유리수의 모임
(3) 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 해의 모임

175

중단원 도입

수학적 대상을 하나의 그룹으로 묶어서 생각할 수 있다는 아이디어는 칸토어(Cantor, G., 1845~1918)에 의해서 이루어졌는데, 이러한 개념을 집합(集合, set)이라고 한다.
이 단원에서는 집합과 원소의 뜻, 집합 사이의 포함 관계, 합집합, 교집합, 여집합, 차집합과 이들 사이에 성립하는 집합의 연산 법칙을 알아본다.

힐베르트

힐베르트(Hilbert, D., 1862~1943)는 1862년 쾨니히스베르크에서 태어난 독일의 수학자이다. 그는 기하학과 해석학에서 뛰어난 업적을 남겼는데, 무엇보다도 수학의 기초를 튼튼히 하기 위해 노력한 수학자로 잘 알려져 있다. 집합론의 역설이 발견되면서 수학이 어떠한 것이어야 하는가에 대한 입장에 따라 수학기초론이 논리주의, 직관주의, 형식주의로 나뉘었는데, 그는 형식주의를 이끌었다. 또, 1926년의 논문 「무한에 대하여(Über das Unendliche)」에서 칸토어가 집합의 개념을 발전시키는 데 중요한 역할을 하였음을 강조하기도 했다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 집합의 개념을 이해할 수 있게 한다.
② 집합을 표현하는 방법으로 원소나열법, 조건제시법, 벤다이어그램이 있음을 알 수 있게 한다.
③ 유한집합, 무한집합, 공집합을 이해할 수 있게 한다.
④ 유한집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 집합의 뜻은 집합을 구분하는 수준에서 간단히 다룬다.
② 집합과 그 원소를 나타내는 방법은 구체적인 예를 통해 이해하고 확인하게 한다.
③ ‘원소나열법’, ‘조건제시법’, ‘유한집합’, ‘무한집합’, ‘서로 같다’ 용어는 교수·학습 상황에서 사용할 수 있다.

용어와 기호

- 집합(集合, set)
- 원소(元素, element)
- 벤다이어그램(Venn diagram)
- 공집합(空集合, empty set)
- $a \in A$
- $b \notin A$
- $n(A)$
- $\varnothing$

집합은 보통 알파벳 대문자 A, B, C, $\cdots$ 로 나타내고, 원소는 알파벳 소문자 a, b, c, $\cdots$ 로 나타낸다.

기호 $\in$은 원소를 뜻하는 element의 첫 글자 e를 기호화한 것으로, 이탈리아의 수학자 페아노(Peano, G., 1858~1932)가 처음 사용했다고 한다.

a가 집합 A의 원소일 때, 'a는 집합 A에 속한다'고 하며, 이것을 기호로

$$a \in A$$

와 같이 나타낸다.

a (원소) $\in$ A (집합)

한편, b가 집합 A의 원소가 아닐 때, 'b는 집합 A에 속하지 않는다'고 하며, 이것을 기호로

$$b \notin A$$

와 같이 나타낸다.

보기 10의 약수의 집합을 A라 할 때, 2는 집합 A의 원소이고 9는 집합 A의 원소가 아니므로 $2 \in A$, $9 \notin A$이다.

문제 2 유리수 전체의 집합을 Q라 할 때, 다음 $\square$ 안에 기호 $\in$, $\notin$ 중에서 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $2 \square Q$ (2) $-\frac{1}{3} \square Q$ (3) $\sqrt{10} \square Q$

집합의 표현

집합을 나타내는 방법을 알아보자.

집합에 속하는 모든 원소를 { } 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법을 원소나열법이라고 한다. 집합을 원소나열법으로 나타낼 때, 원소를 나열하는 순서는 생각하지 않으며 같은 원소는 중복하여 쓰지 않는다.

예를 들어 100 이하의 자연수 중에서 4의 배수의 집합을 원소나열법으로

$$\{4, 8, 12, \cdots, 100\}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

원소의 개수가 많고, 원소 사이에 일정한 규칙이 있을 때는 '$\cdots$'을 사용하여 원소의 일부를 생략하기도 한다.

또, 집합의 원소들이 갖는 공통된 성질을 조건으로 제시하여 집합을 나타내는 방법을 조건제시법이라고 한다.

2 예를 들어 집합 $\{2, 3, 5, 7\}$을 조건제시법으로

$$\{x \mid x\text{는 10 이하의 소수}\}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

원소를 대표하는 문자
$\{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$
원소들이 갖는 공통된 성질

176

준비하기

| 주안점 | 자연수 중에서 특정 조건에 해당하는 수를 구할 수 있는지 확인한다.

답 (1) 1, 3, 5, 7, 9 (2) 4, 8

집합의 뜻

평가 기준

- 상 집합을 다양한 방식으로 표현하고, 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다.
- 중 집합에서 원소인 것과 아닌 것을 구분하여 기호로 표현할 수 있다.
- 하 집합인 것과 아닌 것을 구분할 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 어떤 기준이 그 대상을 명확하게 구분할 수 있게 하는지 판단할 수 있게 한다.

1 경차는 배기량이 1000 cc 미만인 차량이므로 A, C이다.

2 '배기량이 큰 차량'은 크다의 기준이 명확하지 않으므로 정확하게 가려낼 수 없다.

내용 연구

1 어떤 기준에 따라 대상을 명확하게 구분할 수 있을 때, 그 대상의 모임을 집합이라 하고 각각의 대상이 그 집합의 원소임을 여러 가지 예를 통해 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 집합인 것을 찾고, 집합의 원소를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) '12의 약수의 모임'은 그 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이고, 원소는 1, 2, 3, 4, 6, 12이다.

(2) '$\sqrt{2}$에 가까운 유리수의 모임'은 가깝다의 기준이 명확하지 않아서 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

(3) '이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 해의 모임'은 그 대상을 분명히 정할 수 있으므로 집합이고, 원소는 1, 2이다.

답 집합: (1), (3)

(1)의 원소는 1, 2, 3, 4, 6, 12

(3)의 원소는 1, 2

문제 2

| 주안점 | 집합과 원소 사이의 관계를 기호로 나타낼 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 2는 유리수이므로 집합 Q의 원소이다.

$$2 \in Q$$

(2) $-\frac{1}{3}$은 유리수이므로 집합 Q의 원소이다.

$$-\frac{1}{3} \in Q$$

(3) $\sqrt{10}$은 무리수이다. 즉, 유리수가 아니므로 집합 Q의 원소가 아니다.

$$\sqrt{10} \notin Q$$

답 (1) $\in$ (2) $\in$ (3) $\notin$

집합의 표현

내용 연구

2 원소나열법으로 나타낸 집합을 조건제시법으로 나타내는 방법은 여러 가지가 있을 수 있음을 이해하게 한다.

예를 들어 $A=\{1, 3\}$을 조건제시법으로

$A=\{x \mid x$는 3의 약수$\}$ 또는 $A=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$

과 같이 나타낼 수 있다.

내용 연구

1 벤다이어그램에서는 원소를 구별하기 위해 쉼표 대신 원소들 사이에 간격을 두어 나타냄을 알게 한다.

문제 풀이

문제 3

|주안점| 집합을 원소나열법과 조건제시법으로 나타낼 수 있게 한다.

|풀이| (1) 원소가 9의 약수이므로　　$\{x \mid x$는 9의 약수$\}$

(2) 원소가 5의 배수이므로　　$\{x \mid x$는 5의 배수$\}$

(3) $(x+1)(x-1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로

$\{-1, 1\}$

(4) 원소가 1부터 99까지의 수 중에서 홀수이므로

$\{1, 3, 5, \cdots, 99\}$

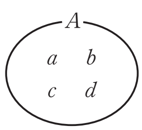
답 (1) $\{x \mid x$는 9의 약수$\}$　(2) $\{x \mid x$는 5의 배수$\}$

(3) $\{-1, 1\}$　　(4) $\{1, 3, 5, \cdots, 99\}$

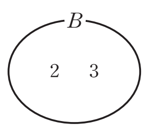
문제 4

|주안점| 집합을 벤다이어그램으로 나타낼 수 있게 한다.

답 (1)



(2)



집합의 원소의 개수

내용 연구

2 집합을 원소의 개수에 따라 유한집합과 무한집합으로 구분할 수 있게 한다.

3 원소의 개수는 유한집합에서만 생각하고, 무한집합에서는 생각하지 않는다.

생각톡톡 $\varnothing$은 원소가 하나도 없는 집합이고, 집합 $\{0\}$은 0을 원소로 갖는 원소가 1개인 집합이다.

문제 풀이

문제 5

|주안점| 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $n(A)=3$　　　(2) $n(A)=50$

문제 3　다음 집합에서 원소나열법으로 나타낸 것은 조건제시법으로, 조건제시법으로 나타낸 것은 원소나열법으로 나타내시오.

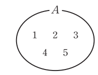
(1) $\{1, 3, 9\}$　　(2) $\{5, 10, 15, \cdots\}$

(3) $\{x \mid x^2-1=0\}$　　(4) $\{x \mid x$는 1 이상 100 이하의 홀수$\}$

벤(Venn, J., 1834~1923)
영국의 논리학자로 벤다이어그램을 고안했다.

1 집합을 나타낼 때 그림을 이용하기도 한다.

예를 들어 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$를 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



이와 같은 방법으로 집합을 나타낸 그림을 **벤다이어그램**이라고 한다.

문제 4　다음 집합을 벤다이어그램으로 나타내시오.

(1) $A=\{a, b, c, d\}$　　(2) $B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$

집합의 원소의 개수

2 원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고, 원소가 무수히 많은 집합을 무한집합이라고 한다. 예를 들어 집합 $\{2, 3, 5\}$는 원소가 3개인 유한집합이고, 자연수 전체의 집합은 무한집합이다.

3 집합 A가 유한집합일 때, 집합 A의 원소의 개수를 기호로

$$n(A)$$

와 같이 나타낸다.

$n(A)$의 n은 개수를 뜻하는 number의 첫 글자이다.

한편, 원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$\varnothing$$

과 같이 나타낸다. 공집합은 $n(\varnothing)=0$인 유한집합으로 생각한다.

생각톡톡 $\varnothing$과 집합 $\{0\}$의 다른 점은 무엇일까?

문제 5　다음 집합 A에 대하여 $n(A)$를 구하시오.

(1) $A=\{1, 2, 4\}$　　(2) $A=\{2, 4, 6, \cdots, 100\}$

(3) $A=\{x \mid x$는 $x^2=-1$인 실수$\}$　　(4) $A=\{x \mid x^2-2x+1=0\}$

177

---

(3) $x^2=-1$을 만족시키는 실수는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

따라서　　$n(A)=0$

(4) $A=\{1\}$이므로　　$n(A)=1$

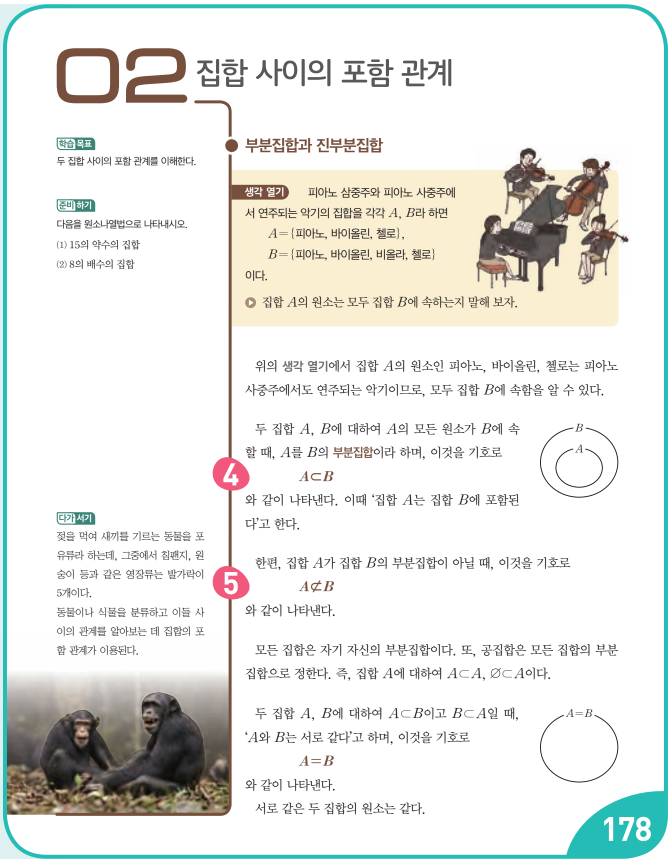
답 (1) 3　(2) 50　(3) 0　(4) 1

읽기 자료

소박한 집합론

칸토어(Cantor, G., 1845~1918)의 아이디어로 만들어진 집합론은 대수학, 해석학, 위상수학 등 수학의 모든 분야에서 확고한 기반을 구축하고 있다.

그런데 칸토어의 집합론은 '소박한 집합론(Naive set theory)'으로 불릴 만큼 그 논리적 근거가 충분하지 않아서 많은 사람들의 공격을 받기도 했다. 그중에 대표적인 사람은 그의 스승 크로네터(Kronecker, L., 1823~1891)였는데, 그는 칸토어의 집합론 자체를 의미없는 것으로 여겨 인정하지 않았다. 크로네커의 계속된 공격으로 칸토어는 1884년에 신경쇠약에 의한 발작을 일으키기도 했는데, 결국 1918년 할레(Halle)의 정신 병원에서 생을 마감했다고 한다.



02 집합 사이의 포함 관계

학습 목표
두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.

준비하기
다음을 원소나열법으로 나타내시오.
(1) 15의 약수의 집합
(2) 8의 배수의 집합

부분집합과 진부분집합

생각 열기 피아노 삼중주와 피아노 사중주에서 연주되는 악기의 집합을 각각 A, B라 하면

$A=\{$피아노, 바이올린, 첼로$\}$,

$B=\{$피아노, 바이올린, 비올라, 첼로$\}$

이다.

▶ 집합 A의 원소는 모두 집합 B에 속하는지 말해 보자.

위의 생각 열기에서 집합 A의 원소인 피아노, 바이올린, 첼로는 피아노 사중주에서도 연주되는 악기이므로, 모두 집합 B에 속함을 알 수 있다.

4 두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 **부분집합**이라 하며, 이것을 기호로

$A \subset B$

와 같이 나타낸다. 이때 '집합 A는 집합 B에 포함된다'고 한다.

5 한편, 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 이것을 기호로

$A \not\subset B$

와 같이 나타낸다.

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. 또, 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 정한다. 즉, 집합 A에 대하여 $A \subset A$, $\varnothing \subset A$이다.

두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$일 때, 'A와 B는 서로 같다'고 하며, 이것을 기호로

$A=B$

와 같이 나타낸다.

서로 같은 두 집합의 원소는 같다.

다가서기
젖을 먹여 새끼를 기르는 동물을 포유류라 하는데, 그중에서 침팬지, 원숭이 등과 같은 영장류는 발가락이 5개이다.
동물이나 식물을 분류하고 이들 사이의 관계를 알아보는 데 집합의 포함 관계가 이용된다.

178

소단원 지도 개관

지도 목표

① 두 집합 사이의 포함 관계를 이해하고, 부분집합과 진부분집합의 뜻을 알게 한다.

② 서로 같은 집합의 뜻을 이해하고, 기호로 나타낼 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 집합 사이의 포함 관계는 예를 통해 간단히 다루고 벤 다이어그램을 통해 직관적으로 이해하게 한다.

② 부분집합의 개수는 구체적인 예를 통해 다루고, 일반화하지는 않는다.

③ 공집합과 자기 자신은 모든 집합의 부분집합임을 논리적으로 설명하기보다는 직관적으로 받아들이게 한다.

용어와 기호

- 부분집합(部分集合, subset)
- 진부분집합(眞部分集合, proper subset)
- $A \subset B$
- $A \not\subset B$
- $A=B$
- $A \neq B$

준비하기

|주안점| 자연수 중에서 특정 조건에 해당하는 수의 집합을 구하고, 원소나열법으로 나타낼 수 있는지 확인한다.

답 (1) $\{1, 3, 5, 15\}$ (2) $\{8, 16, 24, \cdots\}$

● 부분집합과 진부분집합

평가 기준

상	두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 표현하고, 예를 들어 설명할 수 있다.
중	조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다.
하	벤다이어그램이나 원소나열법으로 표현된 두 집합 사이의 포함 관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 다양한 악기를 집합으로 나타내어 한 집합의 모든 원소가 다른 집합에 속하는 경우를 직관적으로 이해하게 한다.

▶ 집합 A의 원소는 모두 집합 B에 속한다.

내용 연구

4 기호 $\in$, $\notin$은 원소와 집합 사이의 관계를 나타낼 때 사용하고 기호 $\subset$, $\not\subset$은 집합과 집합 사이의 관계를 나타낼 때 사용함을 구분하고, 혼동하지 않게 한다.
|오개념 바로잡기| $A=\{a, b\}$일 때, $\{a\} \subset A$로 나타내고 $\{a\} \in A$ 또는 $a \subset A$ 등으로 나타내지 않게 한다.

5 집합 A의 원소 중에서 집합 B에 속하지 않는 것이 하나라도 있으면 $A \not\subset B$임을 알게 한다.

지도 자료

포함 관계와 순서 관계

공집합이 아닌 집합 X의 부분집합 사이의 포함 관계는 다음과 같은 성질을 갖는다.
X의 임의의 세 부분집합 A, B, C에 대하여
(1) 반사적(反射的, reflexive)
$A \subset A$
(2) 반대칭적(反對稱的, antisymmetric)
$A \subset B$, $B \subset A$이면 $A=B$
(3) 추이적(推移的, transitive)
$A \subset B$, $B \subset C$이면 $A \subset C$
(1), (2), (3)을 만족시키는 관계를 순서 관계(order relation)라 하는데, 이러한 맥락에서 집합의 포함 관계는 순서 관계의 일종임을 알 수 있다.

내용 연구

❶ 두 집합 A, B에 대하여 $A \neq B$인 것은 $A \not\subset B$이거나 $B \not\subset A$인 경우임을 알게 한다.

❷ 두 집합 A, B에 대하여 이들의 포함 관계를 두 집합의 원소를 비교하여 확인할 수 있음을 알게 한다.

❸ 두 집합 A, B에 대하여 A가 B의 진부분집합이면 $A \subset B$이고 B의 원소 중에서 A의 원소가 아닌 것이 존재함을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 집합 사이의 포함 관계를 기호로 나타내고, 서로 같은 집합을 찾을 수 있게 한다.

|풀이| (1) $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 $\quad A \subset B$

(2) $x(x-1)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

$B=\{0, 1\}$이므로 $\quad A \subset B$이고 $B \subset A$

따라서 $\quad A=B$

(3) $(x-1)(x-3)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

즉 $A=\{1, 3\}$이고, $B=\{1, 3\}$이므로

$A \subset B$이고 $B \subset A$

따라서 $\quad A=B$

(4) $2x-7 \leq 0$에서 $x \leq \dfrac{7}{2}$이므로 $\quad A=\left\{x \,\middle|\, x \leq \dfrac{7}{2}\right\}$

$(x-3)(x+1) \leq 0$에서 $\quad -1 \leq x \leq 3$

$B=\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$이므로 $\quad B \subset A$

(1)~(4)에서 $A=B$인 것은 (2), (3)이다.

답 (1) $A \subset B$ (2) $A \subset B$, $B \subset A$
(3) $A \subset B$, $B \subset A$ (4) $B \subset A$
$A=B$인 것: (2), (3)

문제 2

|주안점| 집합의 부분집합의 개수와 진부분집합의 개수를 구할 수 있게 한다.

답 (1)

원소의 개수	부분집합
0	$\varnothing$
1	$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$
2	$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$
3	$\{a, b, c\}$

(2) 부분집합의 개수: 8, 진부분집합의 개수: 7

❶ 또, 두 집합 A와 B가 서로 같지 않을 때, 이것을 기호로

$$A \neq B$$

와 같이 나타낸다.

기호 ⊂는 독일의 수학자 슈뢰더(Schröder, E., 1841~1902)가 처음 사용했다고 한다.

❷ 보기 ① 두 집합 $A=\{2, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$에 대하여 집합 A의 모든 원소 2, 5가 집합 B에 속하므로 $A \subset B$이다.
② 두 집합 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x \mid x$는 4의 약수$\}$에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $A=B$이다.

문제 1 다음 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 $A \subset B$ 또는 $B \subset A$로 나타내시오. 또, $A=B$인 것을 모두 찾으시오.

(1) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $\quad B=\{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$
(2) $A=\{0, 1\}$, $\quad B=\{x \mid x^2-x=0\}$
(3) $A=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$, $\quad B=\{x \mid x$는 3의 약수$\}$
(4) $A=\{x \mid 2x-7 \leq 0\}$, $\quad B=\{x \mid x^2-2x-3 \leq 0\}$

❸ 두 집합 A, B에 대하여 A가 B의 부분집합이지만 서로 같지 않을 때, 즉

$$A \subset B\text{이고 } A \neq B$$

일 때, A를 B의 **진부분집합**이라고 한다.

문제 2 집합 $A=\{a, b, c\}$의 부분집합을 구하려고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 집합 A의 부분집합을 원소의 개수에 따라 모두 써넣어 오른쪽 표를 완성하시오.
(2) 집합 A의 부분집합의 개수와 진부분집합의 개수를 구하시오.

원소의 개수	부분집합
0	$\varnothing$
1	
2	
3	

문제 3 세 영어 단어 late, later, latter를 이루는 알파벳의 집합을 각각 A, B, C라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계를 조사하여 두 집합 A, B가 각각 집합 C의 진부분집합인지 말하시오.

179

문제 3

|주안점| 알파벳의 집합 사이의 포함 관계를 조사하게 한다.

|풀이| $A=\{\text{l, a, t, e}\}$, $B=\{\text{l, a, t, e, r}\}$, $C=\{\text{l, a, t, e, r}\}$에서 $A \subset C$이지만 $A \neq C$이므로 집합 A는 집합 C의 진부분집합이고, $B=C$이므로 집합 B는 집합 C의 진부분집합이 아니다.

답 풀이 참조

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 합집합과 교집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있게 한다.
③ 집합의 서로소를 이해하게 한다.
④ 유한집합의 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이해하고, 구할 수 있게 한다.
⑤ 합집합과 교집합에 대한 연산 법칙을 이해하게 한다.

▌지도상의 유의점

① 합집합과 교집합은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.

03 합집합과 교집합

학습 목표
합집합과 교집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.

준비하기
20 이하의 자연수 중에서 다음을 모두 구하시오.
(1) 짝수
(2) 3의 배수
(3) 6의 배수

합집합과 교집합

생각 열기 ABO식 혈액형에서 A 항원만 있으면 A형, B 항원만 있으면 B형이라 하고, A 항원과 B 항원이 모두 있으면 AB형, 두 항원이 모두 없으면 O형으로 분류한다.

❶ A 항원 또는 B 항원을 가진 사람의 혈액형을 모두 말해 보자.

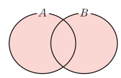
❷ A 항원과 B 항원을 모두 가진 사람의 혈액형을 말해 보자.

4 두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **합집합**이라 하며, 이것을 기호로

$A \cup B$

와 같이 나타낸다. A와 B의 합집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 또는 $x \in B\}$



$A \cup B$

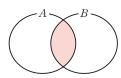
다가서기
우리나라의 축구 국가 대표 팀 중에는 월드컵 팀과 올림픽 팀이 있는데, 이 두 팀에 공통으로 소속되어 있는 선수가 있을 수도 있다.
집합에서도 두 집합에 공통으로 속하는 원소의 집합을 생각할 수 있다.

5 또, 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **교집합**이라 하며, 이것을 기호로

$A \cap B$

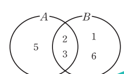
와 같이 나타낸다. A와 B의 교집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 그리고 $x \in B\}$



$A \cap B$

6 보기 두 집합 $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$에 대하여
$A \cup B=\{1, 2, 3, 5, 6\}$,
$A \cap B=\{2, 3\}$



180

② 유한집합의 합집합과 교집합의 원소의 개수를 직접 구하고, 비교해 보면서 집합 사이의 관계를 이해하게 한다.

③ 집합의 연산 법칙은 논리적인 설명보다 벤다이어그램을 통해 직관적으로 이해하는 정도로 다룬다.

용어와 기호

- 합집합(合集合, union)
- 교집합(交集合, intersection)
- 서로소(一素, disjoint)
- 교환법칙(交換法則, commutative law)
- 결합법칙(結合法則, associative law)
- 분배법칙(分配法則, distributive law)
- $A \cup B$
- $A \cap B$

준비하기

| 주안점 | 자연수 중에서 특정한 조건에 해당하는 수를 나열해 보고, 공통으로 해당하는 수를 추론할 수 있는지 확인한다.

답 (1) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20
(2) 3, 6, 9, 12, 15, 18
(3) 6, 12, 18

합집합과 교집합

평가 기준

상	집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
중	주어진 집합에 대하여 합집합과 교집합의 연산을 할 수 있다.
하	벤다이어그램으로 표현된 두 집합의 합집합과 교집합을 말할 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 4가지 혈액형에 있는 항원을 비교하여 합집합과 교집합을 직관적으로 이해하게 한다.

❶ A 항원이 있는 혈액형은 A형과 AB형, B 항원이 있는 혈액형은 B형과 AB형이므로 A 항원 또는 B 항원을 가진 사람의 혈액형은 A형, B형, AB형이다.

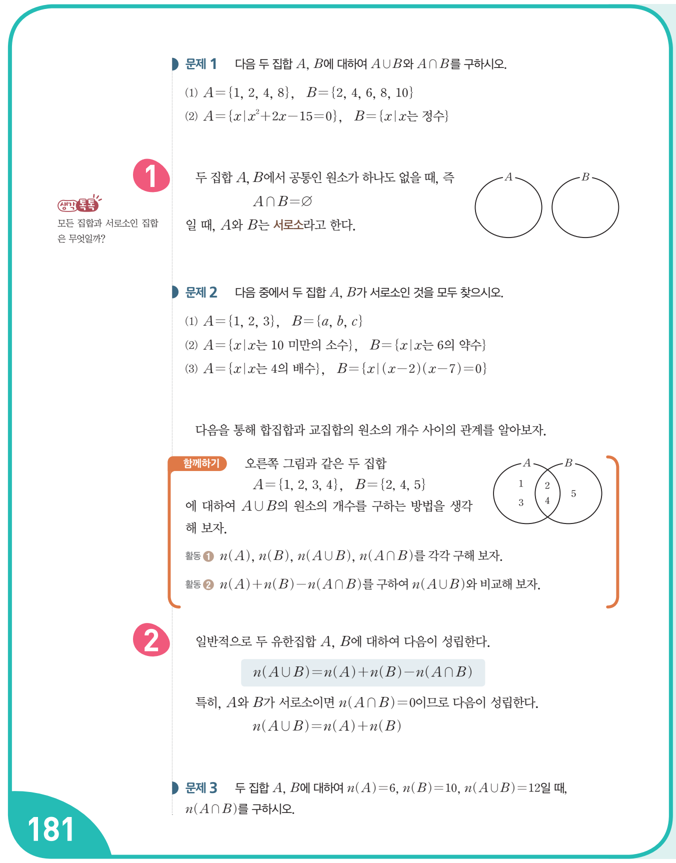
❷ 두 항원을 모두 가진 사람의 혈액형은 AB형이다.

내용 연구

4 두 집합 A, B의 합집합을 조건제시법으로 나타내면 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 또는 $x \in B\}$이다. 이때 '또는'은 '이거나'라는 뜻으로서 '$x \in A$ 또는 $x \in B$'는 '$x \in A$ 그리고 $x \in B$', '$x \in A$ 그리고 $x \notin B$', '$x \notin A$ 그리고 $x \in B$'의 세 가지 경우를 모두 포괄한다.
즉, $A \cup B$는 두 집합 A, B의 모든 원소를 합쳐 놓은 집합이라는 뜻이다.

5 두 집합 A, B의 교집합을 조건제시법으로 나타내면 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 그리고 $x \in B\}$이다. 이때 '그리고'는 '동시에'라는 뜻으로서 '$x \in A$ 그리고 $x \in B$'는 x가 두 집합 A, B에 모두 속한다는 뜻이다.
즉, $A \cap B$는 두 집합 A, B에 공통으로 속하는 원소의 집합이라는 뜻이다.

6 두 집합의 합집합과 교집합을 구하고, 이것을 벤다이어그램으로 확인할 수 있게 한다.
| 오개념 바로잡기 | A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A, B의 합집합, A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A, B의 교집합이라 할 때, 합집합의 정의와 교집합의 정의에서 사용된 '모든'의 뜻이 같지 않음을 이해하게 한다. 합집합에서의 '모든'은 'A, B에 속하는 원소를 통틀어'라는 뜻이고, 교집합에서의 '모든'은 'A, B에 공통으로 속하는'의 뜻임을 알게 한다.



문제 1 다음 두 집합 A, B에 대하여 $A\cup B$와 $A\cap B$를 구하시오.

(1) $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(2) $A=\{x\,|\,x^2+2x-15=0\}$, $B=\{x\,|\,x$는 정수$\}$

생각톡톡 모든 집합과 서로소인 집합은 무엇일까?

1 두 집합 A, B에서 공통인 원소가 하나도 없을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, A와 B는 **서로소**라고 한다.

문제 2 다음 중에서 두 집합 A, B가 서로소인 것을 모두 찾으시오.

(1) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$

(2) $A=\{x\,|\,x$는 10 미만의 소수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 6의 약수$\}$

(3) $A=\{x\,|\,x$는 4의 배수$\}$, $B=\{x\,|\,(x-2)(x-7)=0\}$

다음을 통해 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 알아보자.

함께하기 오른쪽 그림과 같은 두 집합

$$A=\{1, 2, 3, 4\},\quad B=\{2, 4, 5\}$$

에 대하여 $A\cup B$의 원소의 개수를 구하는 방법을 생각해 보자.

활동 1 $n(A)$, $n(B)$, $n(A\cup B)$, $n(A\cap B)$를 각각 구해 보자.

활동 2 $n(A)+n(B)-n(A\cap B)$를 구하여 $n(A\cup B)$와 비교해 보자.

2 일반적으로 두 유한집합 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

특히, A와 B가 서로소이면 $n(A\cap B)=0$이므로 다음이 성립한다.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

문제 3 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=6$, $n(B)=10$, $n(A\cup B)=12$일 때, $n(A\cap B)$를 구하시오.

181

내용 연구

1 두 자연수의 공약수가 1뿐일 때 이 두 수는 서로소(relatively prime)라 하지만 집합에서는 두 집합에 공통인 원소가 하나도 없을 때 이 두 집합을 서로소(disjoint)라 함을 알게 한다.

2 두 유한집합의 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 예를 통해 이해하게 한다.
두 유한집합 A, B에 대하여 $A\cap B$는 A에도 속하고 B에도 속하는 원소들의 집합이므로 $n(A\cup B)$는 $n(A)$와 $n(B)$의 합에서 $n(A\cap B)$를 빼야 함을 알게 한다.

생각톡톡 어떤 집합과 항상 서로소인 집합은 공집합이다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 두 집합의 합집합과 교집합을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 집합 A에 속하거나 집합 B에 속하는 원소는 1, 2, 4, 6, 8, 10이므로

$$A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

두 집합 A, B에 모두 속하는 원소는 2, 4, 8이므로

$$A\cap B=\{2, 4, 8\}$$

(2) $(x+5)(x-3)=0$에서

$$x=-5 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $A=\{-5, 3\}$

이때 집합 A의 원소는 정수이므로 모두 집합 B에 속한다.

따라서 $A\cup B=\{x\,|\,x$는 정수$\}$

두 집합 A, B에 모두 속하는 원소는 집합 A의 원소이므로 $A\cap B=\{-5, 3\}$

답 (1) $A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $A\cap B=\{2, 4, 8\}$
(2) $A\cup B=\{x\,|\,x$는 정수$\}$, $A\cap B=\{-5, 3\}$

문제 2

|주안점| 두 집합 사이의 공통인 원소를 구하여 서로소인 것을 찾을 수 있게 한다.

|풀이| (1) $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.

(2) $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$$A\cap B=\{2, 3\}$$

$A\cap B\neq\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

(3) $A=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$, $B=\{2, 7\}$에서

$A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.

답 (1), (3)

문제 3

|주안점| 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이용하여 교집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$12=16-n(A\cap B)$이므로

$$n(A\cap B)=4$$

답 4

함께하기

|지도 방향| 두 집합의 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이해하게 한다.

|풀이| 1 $n(A)=4$, $n(B)=3$,
$n(A\cup B)=5$, $n(A\cap B)=2$

2 $n(A)+n(B)-n(A\cap B)=5$이고 1에서
$n(A\cup B)=5$이므로 다음이 성립한다.

$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=n(A\cup B)$$

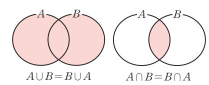
답 풀이 참조

집합의 연산 법칙

3 두 집합 A, B에 대하여

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

가 성립하고, 이것을 각각 합집합과 교집합에 대한 **교환법칙**이라고 한다.



4 또, 세 집합 A, B, C에 대하여

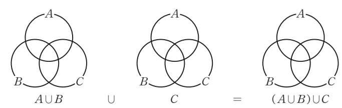
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

가 성립하고, 이것을 각각 합집합과 교집합에 대한 **결합법칙**이라고 한다.

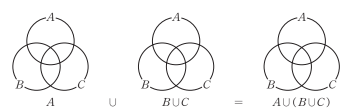
다음을 통해 합집합에 대한 결합법칙을 알아보자.

함께하기 세 집합 A, B, C에 대하여 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인해 보자.

활동 ① 다음 벤다이어그램에 $A\cup B$와 C를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $(A\cup B)\cup C$를 색칠해 보자.



활동 ② 다음 벤다이어그램에 A와 $B\cup C$를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $A\cup(B\cup C)$를 색칠한 다음 활동 ①의 결과와 비교해 보자.



문제 4 세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하시오.

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

182

집합의 연산 법칙

내용 연구

3 두 집합 A, B에 대하여

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$$

가 성립하는데, 이를 각각 합집합과 교집합에 대한 교환법칙이라 함을 알게 하고, 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

4 세 집합 A, B, C에 대하여

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

가 성립하는데, 이를 각각 합집합과 교집합에 대한 결합법칙이라 함을 알게 하고, 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

|참고| 두 집합 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A\cup A=A$, $\quad A\cap A=A$

(2) $A\cup\varnothing=A$, $\quad A\cap\varnothing=\varnothing$

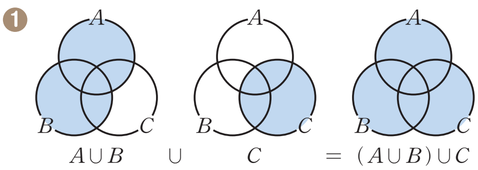
(3) $A\cup(A\cap B)=A$

(4) $A\cap(A\cup B)=A$

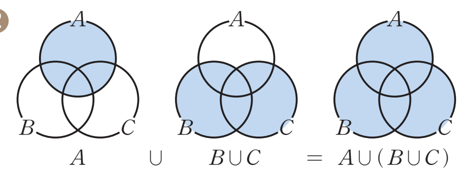
함께하기

|지도 방향| 합집합에 대한 결합법칙을 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

|풀이| ①



②



따라서 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$가 성립한다.

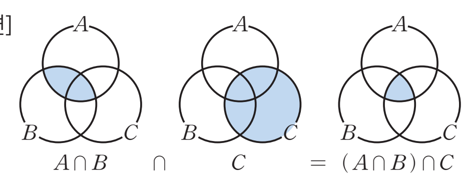
답 풀이 참조

문제 풀이

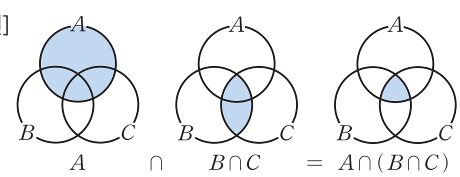
문제 4

|주안점| 교집합에 대한 결합법칙을 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

|풀이| [좌변]



[우변]



따라서 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$가 성립한다.

답 풀이 참조

지도 자료

집합의 연산 법칙과 수의 연산 법칙 (1) - 교환법칙, 결합법칙

집합에서 ∪과 ∩에 대한 연산 법칙은 다음과 같이 수에서 +와 ×에 대한 연산 법칙과 매우 유사한 부분이 있다.

	집합의 연산	수의 연산
교환 법칙	$A\cup B=B\cup A$	$a+b=b+a$
	$A\cap B=B\cap A$	$a\times b=b\times a$
결합 법칙	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(a+b)+c$ $=a+(b+c)$
	$(A\cap B)\cap C$ $=A\cap(B\cap C)$	$(a\times b)\times c$ $=a\times(b\times c)$

내용 연구

1 분배법칙은 세 집합에 대한 합집합과 교집합의 연산 사이의 관계를 나타낸 것이다. 세 집합 A, B, C에 대하여

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

가 성립하는데, 이것을 집합의 연산에 대한 분배법칙이라 함을 알게 하고, 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

2 세 집합 A, B, C에 대하여

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

는 연산을 하는 순서에 관계없이 그 결과가 같으므로 이것을 각각 $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$로 나타낼 수 있음을 알게 한다.

| 오개념 바로잡기 | $(A\cup B)\cap C$와 $A\cup(B\cap C)$는 서로 같은 집합이 아님을 유의하도록 한다. 즉, 결합법칙과 분배법칙을 혼동하지 않게 한다. 예를 들어

$$A=\{1,\ 2\},\quad B=\{2,\ 3\},\quad C=\{1\}$$

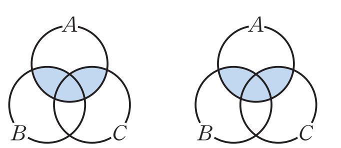
일 때, $(A\cup B)\cap C=\{1,\ 2,\ 3\}\cap\{1\}=\{1\}$이지만 $A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2\}\cup\varnothing=\{1,\ 2\}$이다.
따라서 $(A\cup B)\cap C\neq A\cup(B\cap C)$이다.

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | 집합의 연산에 대한 분배법칙을 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

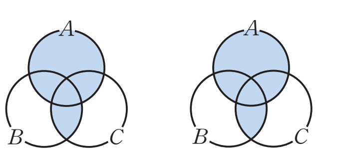
| 풀이 | (1)



$A\cap(B\cup C)$　　$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

따라서 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$가 성립한다.

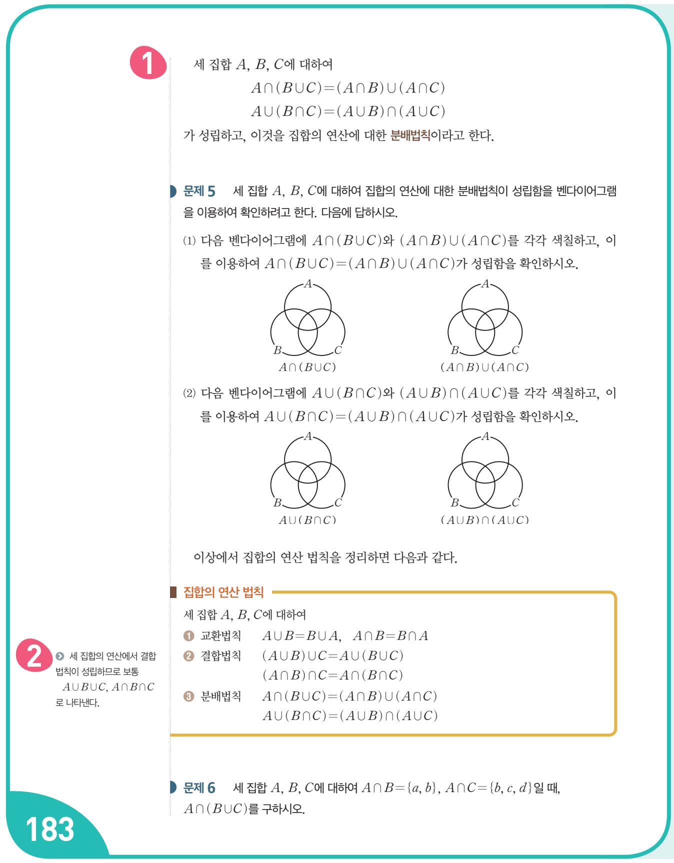
(2)



$A\cup(B\cap C)$　　$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

따라서 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$가 성립한다.

답 풀이 참조



1 세 집합 A, B, C에 대하여

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

가 성립하고, 이것을 집합의 연산에 대한 **분배법칙**이라고 한다.

문제 5 세 집합 A, B, C에 대하여 집합의 연산에 대한 분배법칙이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하려고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 다음 벤다이어그램에 $A\cap(B\cup C)$와 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$가 성립함을 확인하시오.

$A\cap(B\cup C)$　　$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2) 다음 벤다이어그램에 $A\cup(B\cap C)$와 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$가 성립함을 확인하시오.

$A\cup(B\cap C)$　　$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

이상에서 집합의 연산 법칙을 정리하면 다음과 같다.

2 세 집합의 연산에서 결합법칙이 성립하므로 보통 $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$로 나타낸다.

집합의 연산 법칙

세 집합 A, B, C에 대하여

① 교환법칙　$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$

② 결합법칙　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
　　　　　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

③ 분배법칙　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
　　　　　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

문제 6 세 집합 A, B, C에 대하여 $A\cap B=\{a,\ b\}$, $A\cap C=\{b,\ c,\ d\}$일 때, $A\cap(B\cup C)$를 구하시오.

183

문제 6

| 주안점 | 집합의 연산에 대한 분배법칙을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 집합을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 |

$$\begin{aligned}A\cap(B\cup C)&=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\&=\{a,\ b\}\cup\{b,\ c,\ d\}\\&=\{a,\ b,\ c,\ d\}\end{aligned}$$

답 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$

지도 자료

집합의 연산 법칙과 수의 연산 법칙 (2) - 분배법칙

집합에서의 분배법칙

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

는 수에서의 분배법칙

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

와 유사함을 알 수 있다.
그런데 집합에서는

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

가 성립하지만 수에서는

$$a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$$

가 성립하지 않음을 유의한다.

04 여집합과 차집합

학습 목표
여집합과 차집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.

준비하기
두 집합
$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$
에 대하여 다음을 구하시오.
(1) $A\cup B$
(2) $A\cap B$

여집합과 차집합

생각 열기 전체 스포츠 종목의 집합을 U, 그중에서 구기 종목의 집합을 A라 하자.

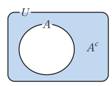
▶ U에 속하지만 A에 속하지 않는 원소를 3개 이상 말해 보자.

3 어떤 집합에 대하여 그 부분집합을 생각할 때, 처음의 집합을 **전체집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$U$$

와 같이 나타낸다.

4 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 **여집합**이라 하며, 이것을 기호로



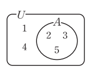
$$A^C$$

와 같이 나타낸다. A의 여집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

5 $$A^C=\{x\,|\,x\in U \text{ 그리고 } x\notin A\}$$

A^C의 C는 여집합을 뜻하는 complement의 첫 글자이다.

보기 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여
$A=\{2, 3, 5\}$의 여집합은
$A^C=\{1, 4\}$



다가서기
스팸 메일은 수신자의 동의 없이 일방적으로 전달되는 메일로서, 수신을 원하지 않을 경우 스팸 메일을 제외한 메일만 받도록 설정할 수 있다. 집합에서도 어떤 특정한 원소들을 제외한 원소의 집합을 생각할 수 있다.

문제 1 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 집합의 여집합을 구하시오.

(1) $A=\{2, 4, 8\}$ (2) $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

184

소단원 지도 개관

지도 목표

① 전체집합, 여집합, 차집합의 뜻을 이해하게 한다.
② 여집합과 차집합을 구할 수 있게 한다.
③ 여집합과 차집합의 성질을 이해하고, 그 연산을 할 수 있게 한다.
④ 드모르간의 법칙이 성립함을 이해하게 한다.

지도상의 유의점

① 여집합과 차집합은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
② 여집합과 차집합의 성질, 드모르간의 법칙은 벤다이어그램을 이용하여 직관적으로 확인하는 정도로 다룬다.

용어와 기호

• 전체집합(全體集合, universal set)
• 여집합(餘集合, complement)
• 차집합(差集合, difference set)
• 드모르간의 법칙(-法則, De Morgan's law)
• U • A^C • $A-B$

준비하기

|주안점| 합집합과 교집합을 구할 수 있는지 확인한다.

답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ (2) $\{2, 6\}$

여집합과 차집합

평가 기준

상 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
중 주어진 집합에 대하여 여집합과 차집합의 연산을 할 수 있다.
하 벤다이어그램으로 표현된 두 집합의 여집합과 차집합을 말할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 스포츠 종목 중에서 구기 종목에 속하지 않는 경기 종목을 이용하여 어떤 집합에서 제외되는 원소를 이해할 수 있게 한다.

▶ 예시 태권도, 사이클, 양궁

내용 연구

3 전체집합은 편의상 우리가 다루고자 하는 대상을 제한하여 정하는 것으로 모든 원소들 전체의 집합만이 전체집합이 아니라 어느 집합이든 전체집합이 될 수 있음을 알게 한다.

4 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 A에 속하지 않는 모든 원소의 집합이 A의 여집합이므로 전체집합이 달라지면 여집합도 달라짐을 이해하게 한다.

5 주어진 집합의 여집합을 조건제시법으로 나타낼 수 있게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 주어진 집합의 여집합을 구할 수 있게 한다.

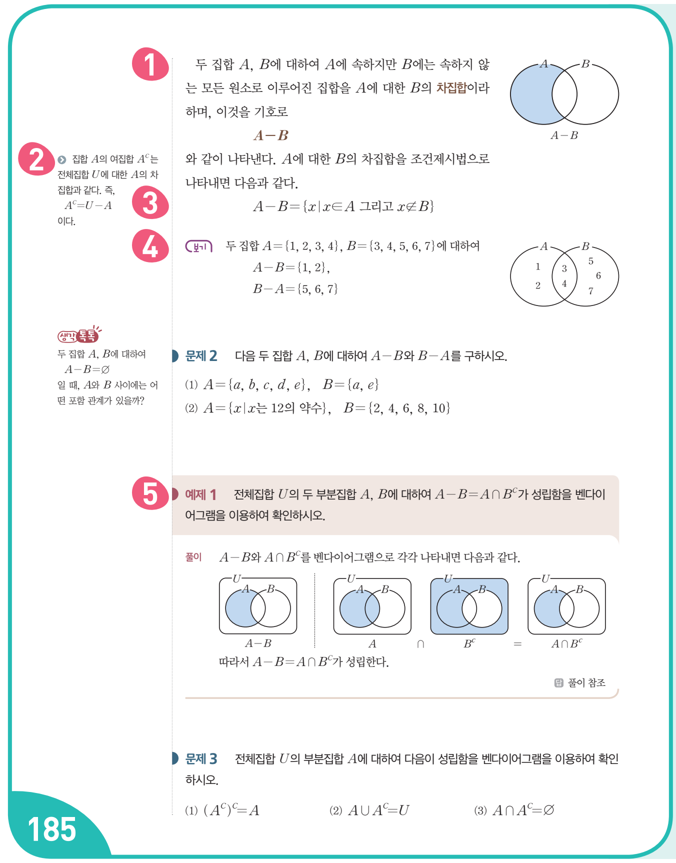
|풀이| (1) 전체집합 U를 원소나열법으로 나타내면

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

따라서 $A^C=U-A=\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

(2) $B^C=U-B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

답 (1) $A^C=\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
(2) $B^C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$



두 집합 A, B에 대하여 A에 속하지만 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 **차집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$A-B$$

와 같이 나타낸다. A에 대한 B의 차집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 그리고 } x\notin B\}$$

집합 A의 여집합 A^C는 전체집합 U에 대한 A의 차집합과 같다. 즉, $A^C=U-A$ 이다.

보기 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여
$A-B=\{1, 2\}$,
$B-A=\{5, 6, 7\}$

생각톡톡 두 집합 A, B에 대하여 $A-B=\varnothing$ 일 때, A와 B 사이에는 어떤 포함 관계가 있을까?

문제 2 다음 두 집합 A, B에 대하여 $A-B$와 $B-A$를 구하시오.

(1) $A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{a, e\}$

(2) $A=\{x \mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

예제 1 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A-B=A\cap B^C$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하시오.

풀이 $A-B$와 $A\cap B^C$를 벤다이어그램으로 각각 나타내면 다음과 같다.

$A-B$ | A $\cap$ B^C $=$ $A\cap B^C$

따라서 $A-B=A\cap B^C$가 성립한다.

답 풀이 참조

문제 3 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 다음이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하시오.

(1) $(A^C)^C=A$ (2) $A\cup A^C=U$ (3) $A\cap A^C=\varnothing$

185

내용 연구

❶ 집합 $A-B$는 집합 A에서 집합 B의 원소를 제외한 나머지 원소의 집합이다. 집합 A에서 제외되는 원소는 두 집합 A, B의 공통인 원소임을 이해하고, 이를 벤다이어그램을 이용하여 확인하게 한다.

| 오개념 바로잡기 | $A-B$는 집합 A에서 집합 B를 빼는 것이 아니라 집합 A와 집합 B의 공통인 부분을 제외하는 것임을 이해하게 한다.

❷ 전체집합 U의 부분집합 B에 대하여 B^C와 $U-B$는 같은 집합임을 이해하게 한다.

| 오개념 바로잡기 | 일반적으로 여집합에 대한 내용은 반드시 전체집합이 전제되는 상황에서만 논할 수 있음을 유의하도록 한다.

❸ 차집합을 조건제시법으로 나타낼 수 있게 한다.

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 그리고 } x\notin B\}$$
$$=\{x \mid x\in A \text{ 그리고 } x\in B^C\}=A\cap B^C$$

❹ 일반적으로 차집합에 대한 교환법칙이 성립하지 않음을 알게 한다.

❺ 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A-B=A\cap B^C$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

생각톡톡 $A-B=\varnothing$이면 집합 A에 속한 원소는 모두 집합 B에 속한다. 따라서 $A\subset B$이다.

문제 풀이

문제 2

| 주안점 | 주어진 집합에 대하여 차집합을 구하고, 차집합에 대한 교환법칙이 성립하지 않음을 이해하게 한다.

| 풀이 | (1) $A-B=\{b, c, d\}$, $B-A=\varnothing$

(2) A는 12의 약수이므로 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

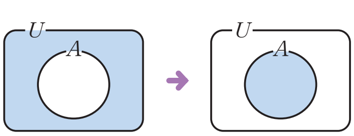
따라서 $A-B=\{1, 3, 12\}$, $B-A=\{8, 10\}$

답 풀이 참조

문제 3

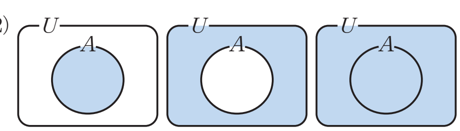
| 주안점 | 여집합과 차집합의 여러 가지 성질을 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

| 풀이 | (1)



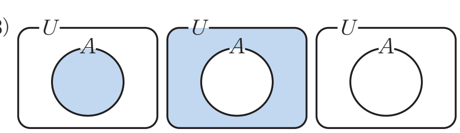
A^C → $(A^C)^C=A$

(2)



A $\cup$ A^C $=$ U

(3)



A $\cap$ A^C $=$ $\varnothing$

답 풀이 참조

지도 자료

차집합과 여집합의 성질

(1) 두 집합 A, B에 대하여 $A-B=A-(A\cap B)$

(2) 전체집합 U가 유한집합일 때, 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$이므로

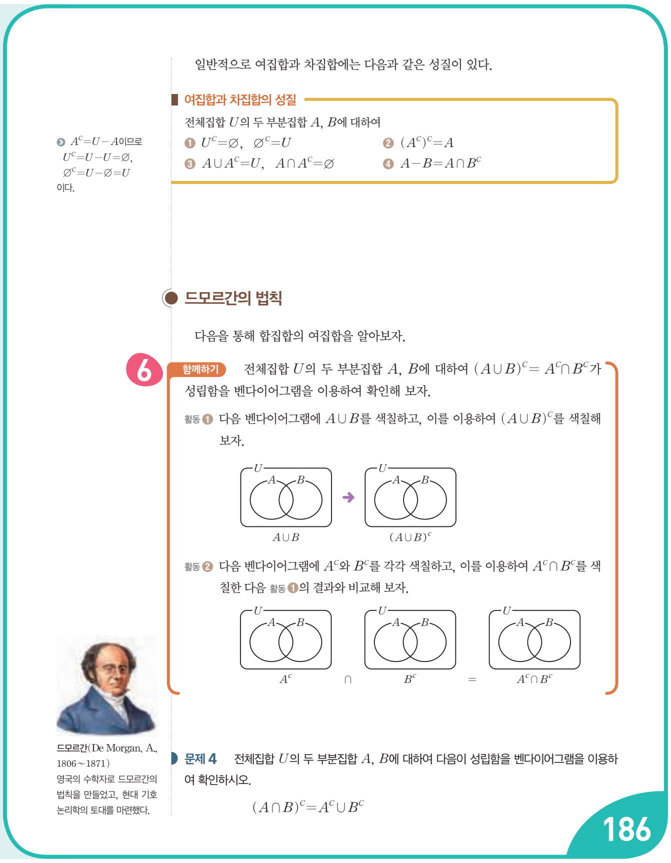
$$n(A^C)=n(U)-n(A)$$

② $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$$=n(A\cup B)-n(B)$$

특히, $B\subset A$이면 $A\cap B=B$이므로

$$n(A-B)=n(A)-n(B)$$



일반적으로 여집합과 차집합에는 다음과 같은 성질이 있다.

여집합과 차집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

❶ $U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$ ❷ $(A^C)^C=A$

❸ $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$ ❹ $A-B=A\cap B^C$

$A^C=U-A$이므로 $U^C=U-U=\varnothing$, $\varnothing^C=U-\varnothing=U$ 이다.

드모르간의 법칙

다음을 통해 합집합의 여집합을 알아보자.

6 함께하기 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인해 보자.

활동 ❶ 다음 벤다이어그램에 $A\cup B$를 색칠하고, 이를 이용하여 $(A\cup B)^C$를 색칠해 보자.

$A\cup B$ → $(A\cup B)^C$

활동 ❷ 다음 벤다이어그램에 A^C와 B^C를 각각 색칠하고, 이를 이용하여 $A^C\cap B^C$를 색칠한 다음 활동 ❶의 결과와 비교해 보자.

A^C $\cap$ B^C $=$ $A^C\cap B^C$

드모르간(De Morgan, A., 1806~1871)
영국의 수학자로 드모르간의 법칙을 만들었고, 현대 기호 논리학의 토대를 마련했다.

문제 4 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 확인하시오.

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

186

드모르간의 법칙

내용 연구

6 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 드모르간의 법칙이 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다. 또,

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$$

에서 $x\notin(A\cup B)$는 $x\notin A$ 그리고 $x\notin B$이며,

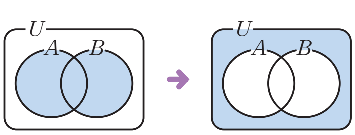
$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

에서 $x\notin(A\cap B)$는 $x\notin A$ 또는 $x\notin B$임을 알게 한다.

함께하기

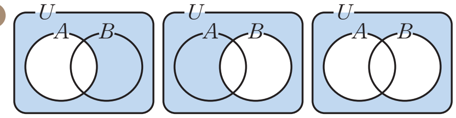
|지도 방향| 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 드모르간의 법칙 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

|풀이| ❶



$A\cup B$ → $(A\cup B)^C$

❷



A^C $\cap$ B^C $=$ $A^C\cap B^C$

따라서 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$가 성립한다.

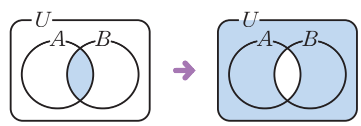
답 풀이 참조

문제 풀이

문제 4

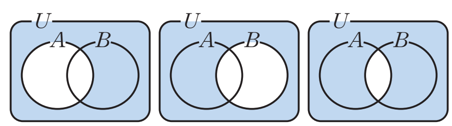
|주안점| 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 드모르간의 법칙 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$가 성립함을 벤다이어그램을 이용하여 이해하게 한다.

|풀이| [좌변]



$A\cap B$ → $(A\cap B)^C$

[우변]



A^C $\cup$ B^C $=$ $A^C\cup B^C$

따라서 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$가 성립한다.

답 풀이 참조

지도 자료

드모르간의 법칙과 차집합

여집합에 대한 내용은 대부분의 경우 반드시 전체집합이 전제되어 있는 상황에서만 가능하다.
하지만 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여
$A^C=U-A$와 같이 여집합은 차집합으로 나타낼 수 있음을 이해하면 전체집합이 전제되어 있지 않은 경우, 일반적으로 차집합에 대해서도 다음과 같이 드모르간의 법칙과 유사한 정리를 만들 수 있다.

세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.
(1) $C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$
(2) $C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$
(3) $C-(A-B)=(C\cap B)\cup(C-A)$
(4) $C-(C-A)=C\cap A$

내용 연구

❶ 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 성립하는 드모르간의 법칙은 합집합의 여집합, 교집합의 여집합 사이의 관계를 나타내는 성질임을 이해할 수 있게 한다.

❷ 전체집합 U가 유한집합일 때, 그 부분집합 A에 대하여

$$n(A^C)=n(U)-n(A)$$

임을 알게 하고, 여집합과 차집합의 성질, 드모르간의 법칙, 집합의 연산 법칙을 이용하여 유한집합의 원소의 개수를 구하는 방법을 이해할 수 있게 한다.

|참고| 드모르간의 법칙을 다음과 같이 논리적으로 확인할 수 있다.

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

• $(A\cup B)^C=\{x\,|\,x\in(A\cup B)^C\}$
$=\{x\,|\,x\notin(A\cup B)\}$
$=\{x\,|\,x\notin A$이고 $x\notin B\}$
$=\{x\,|\,x\notin A\}\cap\{x\,|\,x\notin B\}$
$=\{x\,|\,x\in A^C\}\cap\{x\,|\,x\in B^C\}$
$=A^C\cap B^C$

• $(A\cap B)^C=\{x\,|\,x\in(A\cap B)^C\}$
$=\{x\,|\,x\notin(A\cap B)\}$
$=\{x\,|\,x\notin A$ 또는 $x\notin B\}$
$=\{x\,|\,x\notin A\}\cup\{x\,|\,x\notin B\}$
$=\{x\,|\,x\in A^C\}\cup\{x\,|\,x\in B^C\}$
$=A^C\cup B^C$

또, 드모르간의 법칙은 세 집합 A, B, C에 대하여 다음과 같이 확장시켜 적용할 수도 있다.

• $(A\cup B\cup C)^C=\{(A\cup B)\cup C\}^C$
$=(A\cup B)^C\cap C^C$
$=A^C\cap B^C\cap C^C$

• $(A\cap B\cap C)^C=\{(A\cap B)\cap C\}^C$
$=(A\cap B)^C\cup C^C$
$=A^C\cup B^C\cup C^C$

문제 풀이

문제 5

|주안점| 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 집합의 연산과 관련된 등식을 벤다이어그램을 이용하는 방법과 집합의 연산 법칙을 이용하는 방법으로 각각 설명할 수 있게 한다.

1 일반적으로 다음이 성립하는데, 이것을 **드모르간의 법칙**이라고 한다.

드모르간의 법칙
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
❶ $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ ❷ $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

탐구 **문제 5** 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$(A-B)\cup(A\cup B)^C=B^C$$

가 성립함을 다음 두 가지 방법으로 설명하시오.

(1) 벤다이어그램을 이용하는 방법 (2) 집합의 연산 법칙을 이용하는 방법

2 **예제 2** 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(U)=40,\ \ n(A)=21,\ \ n(B)=17,\ \ n(A\cup B)=34$$

일 때, $n(A^C\cup B^C)$를 구하시오.

풀이 드모르간의 법칙에 의하여 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로
$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
그런데 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$34=21+17-n(A\cap B)$, 즉 $n(A\cap B)=4$
따라서 $n(A^C\cup B^C)=n(U)-n(A\cap B)=40-4=36$ 답 36

문제 6 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

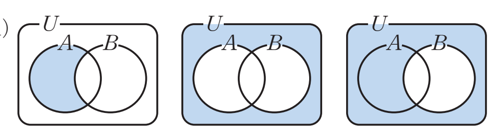
$$n(U)=45,\ \ n(A)=25,\ \ n(B)=16,\ \ n(A\cap B)=6$$

일 때, $n(A^C\cap B^C)$를 구하시오.

문제 7 어느 고등학교 1학년 학생 30명이 동굴 탐사를 하려고 하는데, 준비물을 점검해 보니 손전등을 가져오지 않은 학생이 12명, 머리 전등을 가져오지 않은 학생이 8명이었다. 손전등과 머리 전등을 모두 가져온 학생이 15명일 때, 손전등과 머리 전등 중에서 어느 것도 가져오지 않은 학생 수를 구하시오.

187

|풀이| (1)



(2) $(A-B)\cup(A\cup B)^C=(A\cap B^C)\cup(A\cup B)^C$
$=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$
$=(A\cup A^C)\cap B^C$
$=U\cap B^C$
$=B^C$

답 풀이 참조

문제 6

|주안점| 드모르간의 법칙을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=25+16-6=35$

이고, $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로
$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=45-35=10$ 답 10

탐구 & 융합 문제 해결에 유용한 집합

창의·융합 | 정보 처리

집합은 수학적 문제를 해결하는 데 필요한 간결하고 논리적인 방법을 제공해 주기 때문에 유용하게 활용될 수 있다. 다음의 몇 가지 예를 통해 그 방법을 알아보자.

자연수의 공약수

두 자연수 a와 b의 공약수는 a의 약수인 동시에 b의 약수이다. 따라서 a, b의 약수의 집합을 각각 A, B라 하면 a와 b의 공약수의 집합은 $A\cap B$이므로, a와 b의 공약수의 개수는

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

로 구할 수 있다. 또, a와 b의 최대공약수는 $A\cap B$에 속하는 가장 큰 원소임을 알 수 있다.

연립부등식의 해

연립부등식의 해를 구하는 것은, 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해의 집합을 구한 다음 이들의 교집합을 구하는 것과 같다. 예를 들어 연립부등식

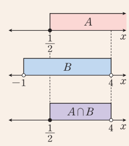
$$\begin{cases} 2x-1\geq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3x-4<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

에서 ①과 ②의 해의 집합을 각각 A와 B라 하면,

$$A=\left\{x\,\middle|\,x\geq\frac{1}{2}\right\},\quad B=\{x\,|\,-1<x<4\}$$

이므로 주어진 연립부등식의 해의 집합은 다음과 같다.

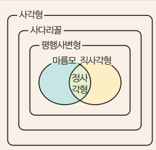
$$A\cap B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leq x<4\right\}$$



사각형 사이의 관계

사다리꼴: 한 쌍의 대변이 평행한 사각형
평행사변형: 두 쌍의 대변이 평행한 사각형
직사각형: 네 각의 크기가 모두 같은 평행사변형
마름모: 네 변의 길이가 모두 같은 평행사변형
정사각형: 네 변의 길이가 모두 같은 직사각형

위의 여러 가지 사각형의 뜻으로부터 오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램으로 나타내면 사각형 사이의 관계를 쉽게 확인할 수 있다.



188

문제 7

| 주안점 | 집합의 연산 법칙을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 동굴 탐사를 하는 학생 전체의 집합을 U, 손전등을 가져온 학생들의 집합을 A, 머리 전등을 가져온 학생들의 집합을 B라 하면, 손전등과 머리 전등 중에서 어느 것도 가져오지 않은 학생들의 집합은 $A^C\cap B^C$이다.

$$n(U)=30,\quad n(A^C)=12,$$
$$n(B^C)=8,\quad n(A\cap B)=15$$

에서

$$n(A)=n(U)-n(A^C)=30-12=18$$
$$n(B)=n(U)-n(B^C)=30-8=22$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ &=18+22-15=25 \end{aligned}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} n(A^C\cap B^C)&=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B) \\ &=30-25=5 \end{aligned}$$

즉, 손전등과 머리 전등 중에서 어느 것도 가져오지 않은 학생은 5명이다.

답 5

탐구&융합 ➝ 문제 해결에 유용한 집합

| 지도 방향 | 구체적인 예를 통해 집합의 유용성을 인식하게 한다.

- 자연수의 공약수의 개수

  두 자연수의 약수의 개수를 더하면 최대공약수의 약수의 개수가 두 번 더해진다. 따라서 두 자연수의 공약수의 개수는 약수의 개수를 더한 다음 최대공약수의 약수의 개수를 빼야 한다.

  이와 같은 관계는 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이용하여 설명할 수 있다.

- 연립부등식의 해

  연립부등식의 해는 각 부등식의 해를 구하고, 이들을 하나의 수직선에 나타내어 그 공통부분을 찾으면 된다. 이와 같은 관계를 집합으로 표현하면 연립부등식의 해의 집합은 각 부등식의 해의 집합의 교집합과 같음을 알 수 있다.

- 사각형 사이의 관계

  직사각형이면서 마름모인 것은 정사각형이다. 또, 직사각형이나 마름모는 평행사변형이고, 평행사변형은 사다리꼴이다.

  이와 같은 관계는 벤다이어그램을 이용하여 집합의 포함 관계로 나타내면 직관적으로 이해할 수 있다.

지도 자료

드모르간의 법칙과 포함배제의 원리

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립한다.

이와 같은 관계를 두 집합의 포함배제의 원리라고 한다.

또, 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대해서도

$$\begin{aligned} &n(A\cup B\cup C) \\ &=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C) \\ &\qquad -n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

가 성립한다.

한편, 드모르간의 법칙에 의하여

$$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$$

이므로

$$\begin{aligned} &n(A^C\cap B^C) \\ &=n((A\cup B)^C) \\ &=n(U)-n(A\cup B) \\ &=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B) \end{aligned}$$

가 성립한다.

중단원 마무리하기

01

|주안점| 집합인 것과 집합이 아닌 것을 구분할 수 있게 한다.

|풀이| (1) '인구가 많은 도시의 모임'은 많다의 기준이 명확하지 않아서 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

(2) '우리 반에서 안경을 쓴 학생의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

(3) '작은 짝수의 모음'은 작다의 기준이 명확하지 않아서 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

(4) '일의 자리 숫자가 5인 자연수의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

답 (1) × (2) ○ (3) × (4) ○

02

|주안점| 조건제시법으로 나타낸 집합을 원소나열법으로 나타낼 수 있게 한다.

|풀이| (1) 14의 약수는 1, 2, 7, 14이므로

$\{1,\ 2,\ 7,\ 14\}$

(2) $(x+1)(x-4)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 $\{-1,\ 4\}$

답 (1) $\{1,\ 2,\ 7,\ 14\}$ (2) $\{-1,\ 4\}$

03

|주안점| 집합 사이의 포함 관계를 기호로 나타낼 수 있게 한다.

|풀이| (1) $B=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$

따라서 $A\subset B$

(2) 4의 약수는 1, 2, 4이므로 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$

따라서 $B\subset A$

답 (1) $A\subset B$ (2) $B\subset A$

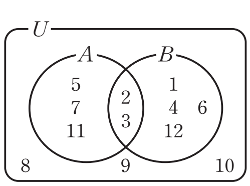
04

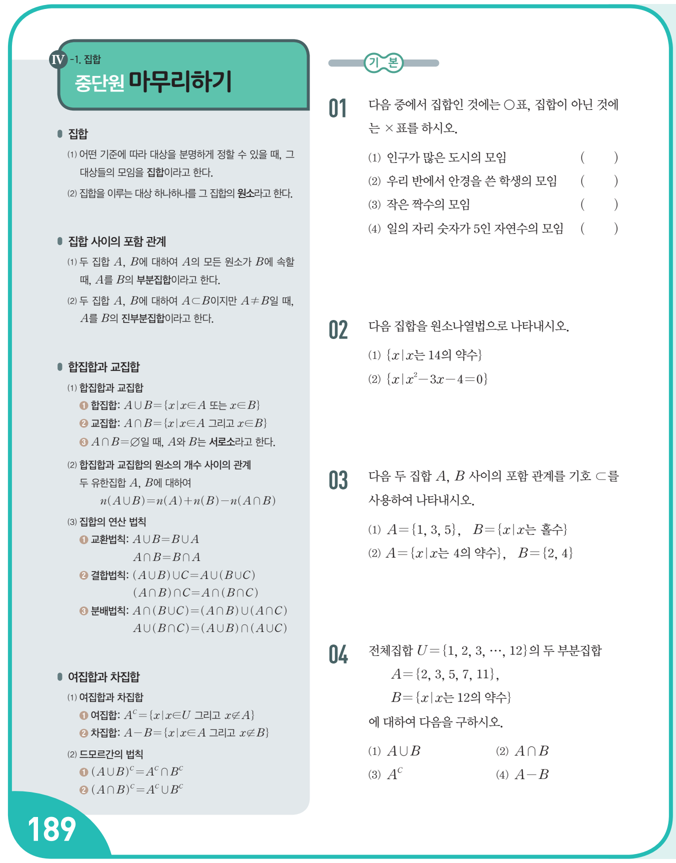
|주안점| 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 합집합, 교집합, 여집합, 차집합을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

따라서 전체집합 U와 두 부분집합 A와 B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




Ⅳ-1. 집합

중단원 마무리하기

집합

(1) 어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임을 **집합**이라고 한다.

(2) 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 한다.

집합 사이의 포함 관계

(1) 두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 **부분집합**이라고 한다.

(2) 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이지만 $A\neq B$일 때, A를 B의 **진부분집합**이라고 한다.

합집합과 교집합

(1) **합집합과 교집합**

❶ **합집합**: $A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 또는 $x\in B\}$

❷ **교집합**: $A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $x\in B\}$

❸ $A\cap B=\varnothing$일 때, A와 B는 **서로소**라고 한다.

(2) **합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계**

두 유한집합 A, B에 대하여

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(3) **집합의 연산 법칙**

❶ **교환법칙**: $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

❷ **결합법칙**: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

❸ **분배법칙**: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

여집합과 차집합

(1) **여집합과 차집합**

❶ **여집합**: $A^C=\{x\,|\,x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$

❷ **차집합**: $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$

(2) **드모르간의 법칙**

❶ $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

❷ $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

189

기본

01 다음 중에서 집합인 것에는 ○표, 집합이 아닌 것에는 ×표를 하시오.

(1) 인구가 많은 도시의 모임 ( )

(2) 우리 반에서 안경을 쓴 학생의 모임 ( )

(3) 작은 짝수의 모임 ( )

(4) 일의 자리 숫자가 5인 자연수의 모임 ( )

02 다음 집합을 원소나열법으로 나타내시오.

(1) $\{x\,|\,x$는 14의 약수$\}$

(2) $\{x\,|\,x^2-3x-4=0\}$

03 다음 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 기호 $\subset$를 사용하여 나타내시오.

(1) $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{x\,|\,x$는 홀수$\}$

(2) $A=\{x\,|\,x$는 4의 약수$\}$, $B=\{2,\ 4\}$

04 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$의 두 부분집합

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$,

$B=\{x\,|\,x$는 12의 약수$\}$

에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A\cup B$ (2) $A\cap B$

(3) A^C (4) $A-B$

(1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12\}$

(2) $A\cap B=\{2,\ 3\}$

(3) $A^C=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

(4) $A-B=\{5,\ 7,\ 11\}$

답 (1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12\}$ (2) $\{2,\ 3\}$
(3) $\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$ (4) $\{5,\ 7,\ 11\}$

05

|주안점| 주어진 집합과 서로소인 집합을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 집합 A와 서로소인 집합에는 A의 원소인 a, d, e가 속할 수 없다.

따라서 구하는 집합은 $\{b,\ c\}$의 부분집합과 같으므로

$\varnothing$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{b,\ c\}$

답 $\varnothing$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{b,\ c\}$

06

|주안점| 주어진 조건을 만족시키는 집합을 구할 수 있게 한다.

문제 이해 $A\cap X=\varnothing$에서 두 집합 X와 A는 서로소이고, $B\cup X=B$에서 $X\subset B$이다. ▶ 30 %

표준

05 전체집합 $U=\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 집합 $A=\{a, d, e\}$와 서로소인 집합을 모두 구하시오.

|서·술·형|

06 두 집합 $A=\{x|x$는 5의 약수$\}$, $B=\{x|x$는 10의 약수$\}$에 대하여

$$A\cap X=\varnothing,\quad B\cup X=B$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

07 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=16$, $n(B)=13$, $n(A-B)=9$일 때, $n(A\cup B)$를 구하시오.

08 50 이하의 자연수 중에서 자연수 k의 배수의 집합을 A_k로 나타낼 때, 세 집합 A_2, A_3, A_5에 대하여 $n(A_5\cap(A_2\cup A_3))$을 구하시오.

09 전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A\cap B^C=\{1, 5\},\quad (A\cap B)^C=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

일 때, 집합 A를 구하시오.

190

해결 과정 $A=\{1, 5\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로 X는 집합 B의 부분집합 중에서 A와 서로소인 집합, 즉 $B-A=\{2, 10\}$의 부분집합과 같다. ▶ 40 %

답 구하기 따라서 조건을 만족시키는 집합 X는 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{10\}$, $\{2, 10\}$이고, 그 개수는 4이다. ▶ 30 %

07

| 주안점 | 두 집합의 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$에서

$$n(A\cap B)=16-9=7$$

따라서 구하는 원소의 개수는

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\ &=16+13-7=22 \end{aligned}$$

답 22

08

| 주안점 | 자연수의 성질과 집합의 연산 법칙을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 50 이하의 자연수 중에서 자연수 k의 배수의 집합이 A_k이므로 $A_k\cap A_l$은 k의 배수인 동시에 l의 배수인 수, 즉 두 자연수 k와 l의 공배수의 집합이다. 따라서

$$A_5\cap A_2=A_{10},\ A_5\cap A_3=A_{15}$$

에서

$$\begin{aligned} A_5\cap(A_2\cup A_3)&=(A_5\cap A_2)\cup(A_5\cap A_3)\\ &=A_{10}\cup A_{15} \end{aligned}$$

이때

$$A_{10}=\{10, 20, 30, 40, 50\},$$
$$A_{15}=\{15, 30, 45\}$$

이므로

$$A_{10}\cup A_{15}=\{10, 15, 20, 30, 40, 45, 50\}$$

따라서 구하는 원소의 개수는

$$\begin{aligned} n(A_5\cap(A_2\cup A_3))&=n(A_{10}\cup A_{15})\\ &=7 \end{aligned}$$

답 7

09

| 주안점 | 여집합과 차집합의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 집합을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$에 대하여 $A\cap B=\{3, 7, 9\}$이므로

$$\begin{aligned} A&=A\cap U\\ &=A\cap(B\cup B^C)\\ &=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\\ &=\{3, 7, 9\}\cup\{1, 5\}\\ &=\{1, 3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

답 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

10

| 주안점 | 드모르간의 법칙을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $U=\{1, 2, 3, \cdots, 24\}$,

$$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\},$$
$$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

에 대하여 $A\cap B=\{3, 6, 9, 18\}$이므로

$$n(A\cap B)=4$$

이고, $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

$$\begin{aligned} n(A^C\cup B^C)&=n((A\cap B)^C)\\ &=24-4\\ &=20 \end{aligned}$$

답 20

11

| 주안점 | 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 집합의 연산과 관련된 등식을 설명할 수 있게 한다.

| 풀이 | $(A-B)-C=(A\cap B^C)-C$

$$=(A\cap B^C)\cap C^C$$
$$=A\cap(B^C\cap C^C)$$
$$=A\cap(B\cup C)^C$$

답 풀이 참조

12

| 주안점 | 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

| 풀이 | 선호도 조사에 참여한 학생 전체의 집합을 U, 두 가지 안 A, B를 택한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 A 안과 B 안을 모두 택한 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$$n(U)=50,\quad n(A)=28,\quad n(B)=35$$
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=28+35-n(A\cap B)$$

그런데 $n(A\cup B)\le n(U)=50$이므로

$$n(A\cap B)\ge 13$$

또, $n(A\cap B)$가 최대인 경우는 $A\cap B=A$, 즉 $n(A\cap B)=28$일 때이므로

$$13\le n(A\cap B)\le 28$$

따라서 구하는 최댓값은 28, 최솟값은 13이다.

답 최댓값: 28, 최솟값: 13

13

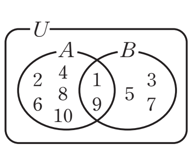
| 주안점 | 집합의 연산 법칙을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 집합을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 $A-B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이고,

$$(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$$
$$=\varnothing\cup(B-A)$$
$$=B-A$$
$$=\{3, 5, 7\}$$

▶ 50 %

오른쪽 벤다이어그램과 같이 $A\cap B$에 두 원소 1, 9가 모두 속할 때, 집합 A의 원소의 개수가 최대이다.



▶ 20 %

답 구하기 따라서 구하는 집합 B는

$$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

▶ 30 %

10 전체집합 $U=\{x\mid x\text{는 24 이하의 자연수}\}$의 두 부분집합

$$A=\{x\mid x\text{는 3의 배수}\},\quad B=\{x\mid x\text{는 18의 약수}\}$$

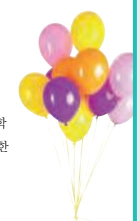
에 대하여 $n(A^C\cup B^C)$를 구하시오.

11 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

$$(A-B)-C=A\cap(B\cup C)^C$$

가 성립함을 설명하시오.

발전



12 어느 학교 학생 50명을 대상으로 학교 축제 홍보 포스터를 선정하기 위하여 두 가지 안 A, B에 대해 선호도 조사를 했더니 A 안을 택한 학생은 28명, B 안을 택한 학생은 35명이었다. A 안과 B 안을 모두 택한 학생 수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

| 서·술·형 |

13 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A-B=\{x\mid x\text{는 짝수}\},\quad (A\cup B)\cap A^C=\{x\mid x\text{는 홀수인 소수}\}$$

가 성립한다. 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때, 집합 B를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

사고력+

14 100 미만의 자연수 중에서 7의 배수가 아니고, 5로 나누었을 때의 나머지가 3이 아닌 자연수의 개수를 구하시오.

191

14

| 주안점 | 드모르간의 법칙을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 100 미만의 자연수 전체의 집합을 U, 7의 배수의 집합을 A, 5로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수의 집합을 B라 하면

$$n(U)=99,\quad n(A)=14,$$
$$n(B)=20,\quad n(A\cap B)=3$$

7의 배수가 아니고, 5로 나누었을 때의 나머지가 3이 아닌 자연수의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로

$$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$$
$$=n(U)-n(A\cup B)$$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$$n(A\cup B)=14+20-3$$
$$=31$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=99-31$$
$$=68$$

답 68

2 명제

01 명제와 조건

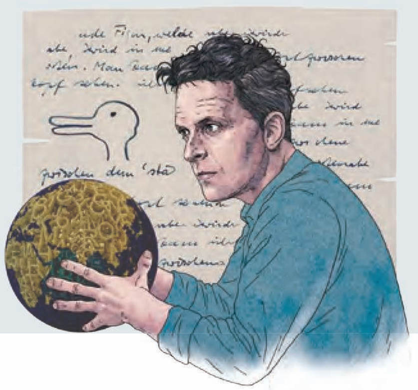
02 명제의 역과 대우

03 충분조건과 필요조건

04 절대부등식

❝ 수학의 증명은
반드시 **명료**해야 한다. ❞

(출처: Wittgenstein, L., 『Remarks on the Foundations of Mathematics』)



비트겐슈타인(Wittgenstein, L., 1889~1951)
오스트리아 태생인 영국의 논리학자, 수리 철학 및 언어 철학자

이 글은 비트겐슈타인의 사후인 1956년에 출간된 『수학의 기초에 관한 고찰』이라는 책에서 수학적 증명이 논리적으로 엄밀해야 함을 강조한 표현으로, 그의 사상은 후에 인문학과 사회 과학의 여러 분야에 큰 영향을 끼쳤다.

192

중단원 도입

고대 그리스에서 이미 형식논리가 발전되었는데, 아리스토텔레스(Aristoteles, B.C. 384~B.C.322)가 그 결과들을 일상 언어를 써서 체계화한 것을 고전논리학(classical logic)이라고 부른다.

그런데 일상 언어의 의미의 모호성은 엄밀한 수학의 논리로서는 부적당하기 때문에 수학에서는 기호적 언어가 도입되고 기호논리학(symbolic logic) 또는 수리논리학(mathematical logic)이 탄생되었다.

명제(命題, proposition)는 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이며, 명제가 참임을 밝히는 과정을 증명(證明, proof 또는 demonstration)이라고 한다.

이 단원에서는 논증의 구조를 분석하는 논리적 판단, 수학과 명제의 연관성에 대하여 학습하는 것이 목적이므로 명제와 조건 및 그 부정, 명제의 증명과 정리, 가정과 결론으로 이루어진 명제 $p \longrightarrow q$의 참과 거짓의 판별, 역, 대우 등 명제 사이의 관계, 충분조건과 필요조건, 절대부등식의 증명에 대하여 알아본다.

비트겐슈타인

비트겐슈타인(Wittgenstein, L., 1889~1951)은 오스트리아의 빈에서 태어나 영국에서 활동한 논리학자이자 수리 철학자 및 언어 철학자이다. 그는 원래 항공 공학에 뜻을 두었지만, 수학의 기초에 관심을 갖게 되어 프레게(Frege, G., 1848~1925)의 권유로 케임브리지 대학교의 러셀(Russell, B. A. W., 1871~1970) 밑에서 공부했다고 전해진다. 1956년에 출간된 『수학의 기초에 관한 고찰(Remarks on the Foundations of Mathematics)』은 비트겐슈타인이 1937년부터 1944년 사이에 집필한 것으로, 케임브리지 대학교에서 1939년부터 강의한 내용을 그 강의를 수강한 사람들이 책으로 편집한 것이다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 명제와 그 부정의 뜻을 이해할 수 있게 한다.
② 조건의 뜻을 알고, 그 진리집합을 구할 수 있게 한다.
③ 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.
④ '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제를 이해할 수 있게 한다.
⑤ 정의, 증명, 정리의 뜻을 이해하고, 간단한 증명을 할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 명제와 조건의 뜻은 수학적인 문장을 이해하는 수준에서 간단히 다룬다.
② '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제는 구체적인 상황을 이용하여 도입할 수 있다.
③ 명제의 증명은 간단한 것만 다룬다.
④ 증명을 지도할 때는 직관적인 이해로부터 시작하여 점진적으로 형식화하게 한다.

용어와 기호

- 명제(命題, proposition)
- 부정(不定, indefinite)
- 조건(條件, condition)
- 진리집합(眞理集合, truth set)
- 가정(假定, assumption)
- 결론(結論, conclusion)
- 정의(定義, definition)
- 증명(證明, proof)
- 정리(定理, theorem)
- $\sim p$
- $p \longrightarrow q$

▌준비하기

| 주안점 | 조건제시법으로 나타낸 전체집합의 부분집합을 원소나열법으로 나타낼 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | 전체집합 U는 $x<4$인 자연수이므로

$U=\{1,\ 2,\ 3\}$

부분집합 A는 $x^2+2x-3=0$에서

$(x-1)(x+3)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=-3$

이때 집합 A는 전체집합 U의 부분집합이므로

$A=\{1\}$

답 $A=\{1\}$

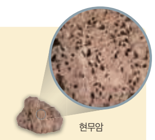
01 명제와 조건

학습 목표
명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다.

준비하기
전체집합 $U=\{x\,|\,x<4\text{인 자연수}\}$의 부분집합 $A=\{x\,|\,x^2+2x-3=0\}$을 원소나열법으로 나타내시오.

● 명제와 그 부정

생각 열기 마그마나 용암이 식은 후 굳어서 만들어진 암석인 화성암에는 현무암, 화강암 등이 있고, 바다 또는 호수 밑바닥에 퇴적물이 쌓인 후 굳어서 만들어진 암석인 퇴적암에는 사암, 이암 등이 있다.


현무암


사암

▶ 다음 문장 중에서 참, 거짓을 판별할 수 있는 것을 말해 보자.

① 현무암은 화성암이다.
② 화성암은 퇴적암이다.
③ 사암은 단단한 암석이다.

1 위의 **생각 열기**에서 ①은 참이고 ②는 거짓이다. 이와 같이 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**라고 한다.

한편, ③은 단단하다의 기준이 명확하지 않아서 참인지 거짓인지 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

다가서기
사람의 주장 중에는 '내 말이 옳다.'와 같이 참인지 거짓인지 판별하기 어려운 것이 있고, 때로는 참인 것처럼 보이는 것이 나중에는 거짓으로 드러나는 경우도 있다.
수학에서는 참 또는 거짓을 분명히 판별할 수 있는 문장이나 식을 다룬다.

2 (보기) ① '유리수는 실수이다.'는 참인 명제이다.
② '$2^2>5$'는 거짓인 명제이다.
③ '인생은 아름답다.'는 아름답다의 기준이 명확하지 않아서 참인지 거짓인지 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

문제 1 다음 중에서 명제를 모두 찾고, 명제인 것은 참, 거짓을 판별하시오.

(1) π는 유리수이다.
(2) 한강은 긴 강이다.
(3) $2+3=5$
(4) 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset(A\cup B)$이다.

193

● 명제와 그 부정

평가 기준
상 조건의 진리집합을 구하고, '모든', '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓을 판단하여 그 이유를 설명할 수 있다.
중 조건의 진리집합을 구할 수 있다.
하 명제와 조건을 구분할 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 과학에서 사용하는 문장의 참, 거짓을 판별해 보고, 판별할 수 있는 문장과 없는 문장 사이에 어떤 차이가 있는지 생각해 봄으로써 명제의 뜻을 이해하게 한다.

▶ ①: 참
②: 거짓
③: '사암은 단단한 암석이다.'는 단단하다의 기준이 명확하지 않으므로 참인지 거짓인지 판별할 수 없다.

내용 연구

1 명제는 참, 거짓을 명확하게 구분할 수 있는 문장이나 식이므로 주관적인 판단이 개입된 문장은 명제가 될 수 없음을 이해하게 한다.

2 일상생활이나 수학에서 사용하는 문장이나 식 중에서 참인 것과 거짓인 것, 참인지 거짓인지 판별할 수 없는 것들의 구체적인 예를 통해 명제의 뜻을 직관적으로 이해하게 한다.

또, 방정식 $2x+4=5$, 부등식 $x-3\leq 1$과 같이 특정한 x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지는 식도 명제가 될 수 없음을 알게 한다.

그러나 $(x-1)^2=x^2-2x+1$과 같이 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식인 항등식은 명제임을 알게 하고, 변수가 들어 있는 식이나 문장을 모두 명제가 될 수 없다고 잘못 생각하지 않도록 유의하게 한다.

3 명제의 부정의 뜻을 알고, 기호를 사용하여 $\sim p$와 같이 나타낼 수 있게 한다.

4 명제 p의 참, 거짓과 그 부정 $\sim p$의 참, 거짓의 관계를 이해하게 하고, 명제의 부정의 부정은 원래의 명제와 같음을 알게 한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 명제의 뜻을 이해하고, 명제인 것을 찾아 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

명제는 보통 알파벳 소문자 $p, q, r, \cdots$ 로 나타낸다.

명제 p에 대하여 'p가 아니다.'를 명제 p의 **부정**이라 하며, 이것을 기호로

$$\sim p$$

3 와 같이 나타낸다.

명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

4 또, $\sim p$의 부정 $\sim(\sim p)$는 p이다.

보기 ① 명제 '3은 홀수이다.'는 참이고, 그 부정 '3은 홀수가 아니다.'는 거짓이다.
② 명제 '$1>4$'는 거짓이고, 그 부정 '$1\leq 4$'는 참이다.

문제 2 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 7은 소수이다. (2) $2\leq\sqrt{2}$

조건과 진리집합

5 변수 x를 포함하는 문장 'x는 10의 약수이다.'는 그 자체로는 참, 거짓을 판별할 수 없지만, x의 값이 정해지면 참, 거짓을 판별할 수 있다. 예를 들어 $x=2$이면 참이고 $x=3$이면 거짓이다.

변수 x를 포함하는 조건을 $p(x), q(x), r(x), \cdots$로 나타내는데, 이를 간단히 $p, q, r, \cdots$ 로 나타내기도 한다.

이와 같이 변수를 포함하는 문장이나 식 중에서 변수의 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있는 것을 **조건**이라고 한다.

명제의 부정과 마찬가지로, 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 조건 p의 **부정**이라 하며, 이것을 기호로

$$\sim p$$

와 같이 나타낸다.

전체집합 U의 원소 중에서 조건 p를 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 조건 p의 **진리집합**이라고 한다. 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

조건 p에 대하여 $\sim(\sim p)$는 p이다.

6 보기 전체집합 U가 자연수 전체의 집합일 때, 조건 'p: x는 홀수이다.'에 대하여
① p의 진리집합은 $P=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$
② $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

문제 3 전체집합 U가 자연수 전체의 집합일 때, 조건 'p: $x\leq 8$'에 대하여 p의 진리집합과 $\sim p$의 진리집합을 구하시오.

194

|풀이| (1) π는 유리수가 아니므로 거짓인 명제이다.

(2) '한강은 긴 강이다.'는 길다의 기준이 명확하지 않아서 참인지 거짓인지 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

(3) $2+3=5$가 성립하므로 참인 명제이다.

(4) 두 집합 A, B에 대하여 항상

$$A\subset(A\cup B)$$

이므로 참인 명제이다.

답 명제: (1), (3), (4)
(1) 거짓 (3) 참 (4) 참

문제 2

|주안점| 주어진 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 부정: 7은 소수가 아니다.
7은 소수이므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

(2) 부정: $2>\sqrt{2}$
부등식 $2>\sqrt{2}$는 성립하므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

답 풀이 참조

조건과 진리집합

내용 연구

5 일반적으로 조건은 명제가 아니다.
'x는 10의 약수이다.'라는 변수 x를 포함하는 문장은 x의 값이 정해져 있지 않으면 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
그런데 $x=2$이면
'2는 10의 약수이다.'
이므로 참인 명제가 된다.
또, $x=3$이면
'3은 10의 약수이다.'
이므로 거짓인 명제가 된다.
즉, 'x는 10의 약수이다.'라는 문장은 x의 값이 주어지면 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제가 된다. 따라서 위의 문장은 변수 x의 값이 정해지면 그 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 조건이 된다.
|오개념 바로잡기| 조건의 진리집합은 전체집합이 무엇인지에 따라 달라질 수 있음을 주의한다.
이를테면 전체집합이 유리수 전체의 집합일 때는 조건 p: $x^2=2$의 진리집합이 공집합이지만, 전체집합이 실수 전체의 집합일 때는 조건 p의 진리집합이 $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$이다.

6 간단한 조건을 예로 들어 진리집합의 뜻을 직관적으로 이해하게 한다. 또, 조건 p의 진리집합을 P라 하면 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C임을 통해 조건과 그 조건의 부정의 진리집합 사이의 관계를 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 3

|주안점| 조건과 그 부정의 진리집합을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$$P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$\sim p$의 진리집합은

$$P^C=\{9, 10, 11, \cdots\}$$

즉, $P^C=\{x\,|\,x>8\text{인 자연수}\}$

답 p의 진리집합: $P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$\sim p$의 진리집합: $P^C=\{x\,|\,x>8\text{인 자연수}\}$

● 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

내용 연구

1. 명제 'p이면 q이다.'를 기호를 사용하여 $p \longrightarrow q$와 같이 나타낼 수 있게 하고, 간단한 예를 통해 가정과 결론을 찾을 수 있게 한다.

2. 명제 $p \longrightarrow q$는 조건 p가 거짓이면 조건 q의 참, 거짓에 관계없이 항상 참이지만 여기서는 조건 p가 참인 경우만 다룬다.
   | 오개념 바로잡기 | 명제 $p \longrightarrow q$에서 조건 p가 참이 되는 모든 경우에 q가 참일 때만 $p \longrightarrow q$는 참이 된다. 즉, 조건 p가 참이 되는 어느 특정한 경우에 q가 참인 경우가 있다고 하더라도 $p \longrightarrow q$는 참이 된다고 할 수 없음을 이해하게 한다. 예를 들어 명제
   '$x^2>1$이면 $x>1$이다.'
   에서 $x=2$일 때 $x^2>1$이 참이고, $x>1$도 참이므로 주어진 명제가 참이라고 판단하는 것은 옳지 않다. $x=-2$일 때 $x^2>1$은 참이지만 $x>1$은 거짓이기 때문이다.
   따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 p가 참이 되는 '모든' 경우에 q가 참이 되어야 한다는 것을 예를 통해 이해하게 한다.

3. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 두 집합 P, Q의 포함 관계를 이용하여 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓을 판별함을 알게 한다.

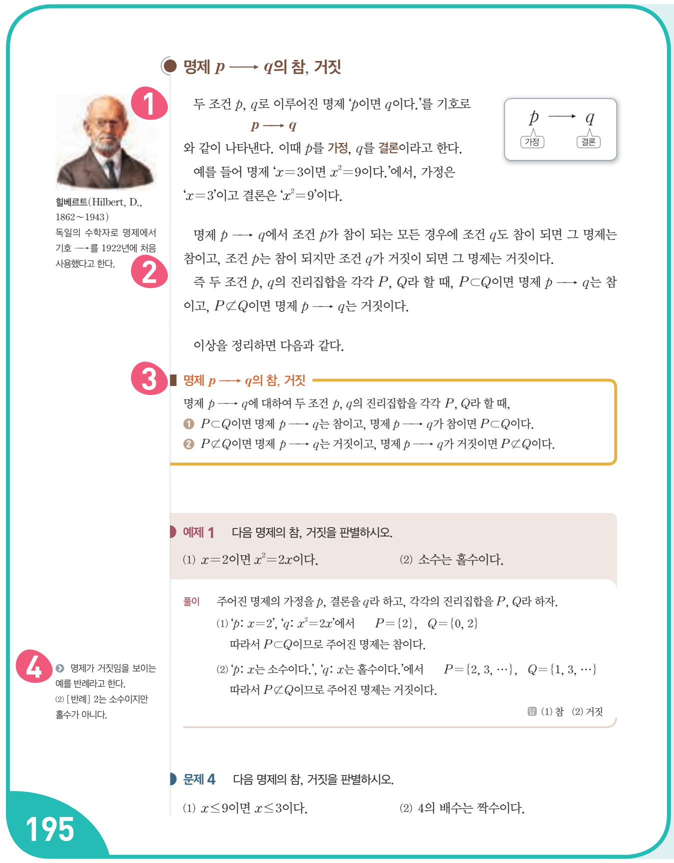
4. 반례(counterexample)는 명제가 거짓임을 보이는 예이다. 예를 들어 **예제 1** (2)의 풀이에서 $2 \in P$이지만 $2 \notin Q$이므로 2는 반례가 된다. 따라서 명제가 참임을 보일 때는 증명을 하고, 명제가 거짓임을 보일 때는 반례를 들게 한다. 이때 주어진 명제에 대한 반례가 여러 개 있는 경우에는 반례를 하나만 보이면 됨을 알게 한다.

문제 풀이

문제 4

| 주안점 | 두 조건의 진리집합을 구하고, 두 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

| 풀이 | 주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하고, 각각의 진리집합을 P, Q라 하자.



● 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

1 두 조건 p, q로 이루어진 명제 'p이면 q이다.'를 기호로

$$p \longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때 p를 **가정**, q를 **결론**이라고 한다.

예를 들어 명제 '$x=3$이면 $x^2=9$이다.'에서, 가정은 '$x=3$'이고 결론은 '$x^2=9$'이다.

힐베르트(Hilbert, D., 1862~1943)
독일의 수학자로 명제에서 기호 ⟶를 1922년에 처음 사용했다고 한다.

2 명제 $p \longrightarrow q$에서 조건 p가 참이 되는 모든 경우에 조건 q도 참이 되면 그 명제는 참이고, 조건 p는 참이 되지만 조건 q가 거짓이 되면 그 명제는 거짓이다.

즉 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고, $P \not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

3 **명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓**

명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때,
❶ $P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이다.
❷ $P \not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이고, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다.

예제 1 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $x=2$이면 $x^2=2x$이다. (2) 소수는 홀수이다.

풀이 주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하고, 각각의 진리집합을 P, Q라 하자.
(1) 'p: $x=2$', 'q: $x^2=2x$'에서 $P=\{2\}$, $Q=\{0, 2\}$
따라서 $P \subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
(2) 'p: x는 소수이다.', 'q: x는 홀수이다.'에서 $P=\{2, 3, \cdots\}$, $Q=\{1, 3, \cdots\}$
따라서 $P \not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 (1) 참 (2) 거짓

4 명제가 거짓임을 보이는 예를 반례라고 한다.
(2) [반례] 2는 소수이지만 홀수가 아니다.

문제 4 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $x \le 9$이면 $x \le 3$이다. (2) 4의 배수는 짝수이다.

195

(1) 'p: $x \le 9$', 'q: $x \le 3$'에서

$$P=\{x \mid x \le 9\}, \quad Q=\{x \mid x \le 3\}$$

따라서 $P \not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(2) 'p: x는 4의 배수이다.', 'q: x는 짝수이다.'에서

$$P=\{4, 8, 12, \cdots\}, \quad Q=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$$

따라서 $P \subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

읽기 자료

불과 드모르간의 수리논리

19세기 중반 영국의 수학자 불(Boole, G., 1815~1864)은 1847년 『논리의 수학적 분석(Mathematical Analysis of Logic)』에서 논리를 대수화하여 불대수(Boolean algebra)를 개발함으로써 논리를 수학의 범주로 가져왔다는 평가를 받고 있다.
'수학적 귀납법'이라는 용어를 만든 것으로 유명한 드모르간(De Morgan, A., 1806~1871)은 1847년 『형식적 논리학(Formal Logic)』 등의 저서를 통해 수리논리학을 발전시켰다.

‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 명제

생각 열기 다음은 ‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 문장이다.

①	②	③	④
모든 동물은 다리가 4개 있다.	어떤 새는 날지 못한다.	모든 자연수는 양수이다.	어떤 자연수는 음수이다.

▶ 위의 문장의 참, 거짓을 판별해 보자.

5 일반적으로 조건 p는 참, 거짓을 판별할 수 없지만, 조건 p 앞에 ‘모든’이나 ‘어떤’이 있으면 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제이다.

‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 명제의 참, 거짓을 알아보자.

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, 전체집합 U에서 명제

‘모든 x에 대하여 p이다.’ ……①

가 참이라는 것은, U에 속하는 모든 원소 x에 대하여 p가 참임을 뜻한다.

6 따라서 ①은 $P=U$이면 참이고, $P\neq U$이면 거짓이다.

또, 전체집합 U에서 명제

‘어떤 x에 대하여 p이다.’ ……②

가 참이라는 것은, U의 원소 중에서 p가 참이 되게 하는 x가 존재함을 뜻한다.

7 따라서 ②는 $P\neq\varnothing$이면 참이고, $P=\varnothing$이면 거짓이다.

▶ ‘어떤 x에 대하여 p이다.’를 ‘p인 x가 있다.’로 표현할 수도 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 명제의 참, 거짓

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때,

❶ $P=U$이면 ‘모든 x에 대하여 p이다.’는 참이고, $P\neq U$이면 ‘모든 x에 대하여 p이다.’는 거짓이다.

❷ $P\neq\varnothing$이면 ‘어떤 x에 대하여 p이다.’는 참이고, $P=\varnothing$이면 ‘어떤 x에 대하여 p이다.’는 거짓이다.

196

● ‘모든’이나 ‘어떤’을 포함한 명제

생각 열기

|지도 방향| ‘모든’을 포함한 문장은 주어진 대상 전체에 대해 성립할 때 참이고, ‘어떤’을 포함한 문장은 주어진 대상 중 하나만 성립하면 참이라는 것을 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.

▶ ① ‘모든 동물은 다리가 4개 있다.’는 닭과 같이 다리가 2개인 동물이 있으므로, 거짓인 문장이다.

② ‘어떤 새는 날지 못한다.’는 타조와 같이 날지 못하는 새가 있으므로, 참인 문장이다.

③ ‘모든 자연수는 양수이다.’는 모든 자연수는 양의 정수이므로, 참인 문장이다.

④ ‘어떤 자연수는 음수이다.’는 자연수 중에 음수는 존재하지 않으므로 거짓인 문장이다.

내용 연구

5 일반적으로 조건 p는 명제가 아니지만 조건 p 앞에 ‘모든’이나 ‘어떤’이 있으면 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제가 됨을 이해하게 한다.

6 전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, 명제

‘모든 x에 대하여 p이다.’

가 참이려면 전체집합의 모든 원소가 조건 p를 만족시켜야 하므로 $P=U$이다.

따라서 $P\neq U$이면 명제

‘모든 x에 대하여 p이다.’

는 거짓인 명제가 됨을 알게 한다.

|오개념 바로잡기| 명제 ‘모든 x에 대하여 p이다.’의 반례가 없으면 이 명제는 참이다.

7 명제

‘어떤 x에 대하여 p이다.’

가 참이려면 전체집합의 원소 중에서 조건 p를 만족시키는 원소가 적어도 하나는 있어야 하므로 $P\neq\varnothing$이다. 따라서 $P=\varnothing$이면 명제

‘어떤 x에 대하여 p이다.’

는 거짓인 명제가 됨을 알게 한다.

|오개념 바로잡기| 명제 ‘어떤 x에 대하여 p이다.’의 진리집합의 원소가 하나라도 있으면 이 명제는 참이다.

지도 자료

‘모든’이나 ‘어떤’의 다양한 표현

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, 명제

‘모든 x에 대하여 p이다.’

가 참이라는 것은 U의 모든 원소 x에 대하여 조건 p가 참임을 뜻하고, 명제

‘어떤 x에 대하여 p이다.’

가 참이라는 것은 U의 원소 중 조건 p가 참이 되게 하는 x가 존재함을 뜻한다.

여기에서 ‘모든’이나 ‘어떤’과 동일한 뜻을 나타내는 표현은 매우 다양해서 자칫하면 혼동을 일으킬 염려가 있으므로 정리를 해 두는 것이 좋다.

‘모든 x에 대하여(for all x)’와 같은 표현은 ‘모든 x에 대하여(for every x)’, ‘각각의 x에 대하여(for each x)’, ‘임의의 x에 대하여(for arbitrary x)’, ‘어떤 x에 대하여도(for any x)’ 등이 있다. 이때 ‘어떤 x에 대하여도’는 ‘어떤 x에 대하여’가 아닌 ‘모든 x에 대하여’와 같은 뜻임을 유의하도록 한다.

또, ‘어떤 x에 대하여(for some x)’와 같은 표현은 ‘하나의 x에 대하여(for an x)’, ‘적어도 하나의 x에 대하여(for at least one x)’, ‘…인 x가 있다.(there is an x)’, ‘…인 x가 존재한다.(there exists an x)’ 등이 있다.

1 (보기) 전체집합 U가 실수 전체의 집합일 때,

① 명제 '모든 x에 대하여 $x^2-x=0$이다.'에서 조건 'p: $x^2-x=0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\{0, 1\}$이고 $P\neq U$이므로 이 명제는 거짓이다.

② 명제 '어떤 x에 대하여 $x^2-x=0$이다.'에서 조건 'p: $x^2-x=0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\{0, 1\}$이고 $P\neq\varnothing$이므로 이 명제는 참이다.

① [반례] $x=2$이면 x는 실수이지만 $x^2-x\neq0$이다.

문제 5 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이다.

(2) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=-4$이다.

2 이제 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 부정을 알아보자.

명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 'p가 아닌 x가 있다.', 즉

'어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'

이다. 또, '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 'p인 x가 없다.', 즉

'모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'

이다.

$P=U$의 부정은 $P\neq U$, 즉 $P^C\neq\varnothing$이고, $P\neq\varnothing$의 부정은 $P=\varnothing$, 즉 $P^C=U$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

'모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 부정

1. '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.
2. '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

3 (보기) ① 명제 '모든 실수 x에 대하여 $|x|<0$이다.'의 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $|x|\geq0$이다.'이다.

② 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2+2x=0$이다.'의 부정은 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x\neq0$이다.'이다.

문제 6 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1<0$이다.

(2) 어떤 사다리꼴은 평행사변형이다.

197

내용 연구

1. 진리집합을 이용하여 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓을 판별하는 것을 구체적인 예를 통해 직관적으로 이해하게 한다.

2. 명제

   '모든 x에 대하여 p이다.'

   의 부정은 'p가 아닌 x가 적어도 하나는 있다.'이므로 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 알게 한다.

   또, 명제

   '어떤 x에 대하여 p이다.'

   의 부정은 'p인 x가 하나도 없다.'이므로 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 알게 한다.

3. '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 부정을 구체적인 예를 통해 직관적으로 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 조건 'p: $x^2+1>0$'의 진리집합을 P라 하면 $P=U$이다. 따라서 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이다.'는 참인 명제이다.

(2) 조건 'p: $x^2=-4$'의 진리집합을 P라 하면 $P=\varnothing$이다. 따라서 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2=-4$이다.'는 거짓인 명제이다.

| 참고 | (1) 이차방정식 $x^2+1=0$의 판별식 D가 $D<0$이므로 이차부등식 $x^2+1>0$의 해는 모든 실수이다.

(2) 모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq0$이므로 $x^2=-4$, 즉 $x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

답 (1) 참 (2) 거짓

문제 6

| 주안점 | '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 부정: 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+x+1\geq0$이다.

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

(2) 부정: 모든 사다리꼴은 평행사변형이 아니다.

평행사변형인 사다리꼴이 존재하므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

답 풀이 참조

지도 자료

명제의 부정과 진리집합

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'가 참이라는 것은 U의 모든 원소 x에 대하여 조건 p가 참임을 뜻하는데, 이것은 $U\subset P$, 즉 $P=U$인 경우를 말한다. 즉, 위의 명제는 $P=U$이면 참, $P\neq U$이면 거짓이다. 따라서 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'가 거짓인 경우는 $P\neq U$, 즉 $P^C\neq\varnothing$인 경우이고, 이때 명제 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'는 참이다.

또, 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'가 참인 경우인 $P=U$, 즉 $P^C=\varnothing$인 경우에 명제 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'는 거짓이다. 따라서 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정이 명제 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 알 수 있다.

마찬가지 방법으로 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 명제 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 $P=\varnothing$이면 $P^C=U$, $P\neq\varnothing$이면 $P^C\neq U$임을 이용하여 알 수 있다.

정의, 증명, 정리

4 우리가 사용하는 용어의 뜻은 여러 가지로 나타낼 수 있으나, 제각기 다른 방법으로 나타내면 의사소통이 정확하게 이루어지지 않는다. 따라서 용어의 뜻을 한 가지로 정하여 사용해야 한다.

5 '두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라고 한다.'와 같이 용어의 뜻을 명확하게 정한 것을 그 용어의 **정의**라고 한다.

6 한편, 정의나 명제의 가정 또는 이미 옳다고 밝혀진 성질을 이용하여 어떤 명제가 참임을 설명하는 것을 **증명**이라고 한다.

또, '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.'와 같이 참임이 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 다른 명제를 증명할 때 이용할 수 있는 것을 **정리**라고 한다.

예제 2 다음 명제가 참임을 증명하시오.

'자연수 n에 대하여 n^2+n은 짝수이다.'

이해 $n=1$일 때, $1^2+1=1\times(1+1)=1\times2=2$이므로 1^2+1은 짝수

$n=2$일 때, $2^2+2=2\times(2+1)=2\times3=6$이므로 2^2+2는 짝수

증명 일반적으로 $n^2+n=n(n+1)$이 성립한다. 이때 n이 홀수이면 $n+1$은 짝수이고, n이 짝수이면 $n+1$은 홀수이다. 그런데 짝수와 홀수의 곱은 짝수이므로, 어느 경우이든 $n(n+1)$은 짝수이다.

따라서 자연수 n에 대하여 n^2+n은 짝수이다.

문제 7 다음 명제가 참임을 증명하시오.

'자연수 n에 대하여 n^2+3n은 짝수이다.'

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음은 어느 이발사의 주장인데, 이것을 '이발사의 역설'이라고 한다.

"나는 스스로 면도를 하는 사람들 외에는 모두 면도해 줍니다."

활동 ① 이 이발사는 자신의 면도를 할 수 있는지 판단해 보자.

활동 ② 명제와 관련된 다른 역설도 조사해 보자.

198

정의, 증명, 정리

내용 연구

4 용어의 뜻이 한 가지로 정해지지 않으면 여러 가지로 해석되어 혼란을 줄 수 있으므로 의사소통을 정확하게 하기 위해서는 용어의 뜻을 한 가지로 정하는 것이 필요하다는 것을 이해하게 한다.

5 정의, 증명, 정리는 중학교에서 학습한 삼각형, 사각형, 원에 대한 성질과 관련된 친숙한 예를 통해 이해하게 한다.

|참고| 여러 가지 도형의 정의

① 이등변삼각형: 두 변의 길이가 같은 삼각형

② 원: 평면 위의 한 점에서 일정한 거리에 있는 모든 점들의 집합

③ 직각삼각형: 한 각이 직각인 삼각형

④ 사다리꼴: 마주보는 한 쌍의 변이 서로 평행인 사각형

6 정의나 명제의 가정 또는 확실한 성질을 이용하여 어떤 명제의 타당성을 보이는 것이 증명임을 알게 한다.

문제 풀이

문제 7

|주안점| 짝수와 홀수의 성질을 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있게 한다.

|이해| $n=1$일 때, $1^2+3\times1=1\times(1+3)=4$이므로

$1^2+3\times1$은 짝수

$n=2$일 때, $2^2+3\times2=2\times(2+3)=10$이므로

$2^2+3\times2$은 짝수

|증명| 일반적으로 $n^2+3n=n(n+3)$이 성립한다. 이때 n이 홀수이면 $n+3$은 짝수이고, n이 짝수이면 $n+3$은 홀수이다. 그런데 짝수와 홀수의 곱은 짝수이므로, 어느 경우이든 $n(n+3)$은 짝수이다. 따라서 자연수 n에 대하여 n^2+3n은 짝수이다.

생각 넓히기

|지도 방향| 명제와 관련된 논리적 역설 중 하나인 '이발사의 역설'을 활용하여 주어진 문장이 역설이 되는 이유를 논리적으로 설명하게 함으로써 명제의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

|풀이| ① 이발사가 자신의 면도를 한다면, 스스로 면도를 하는 사람이 되므로 선언한 문장에 위배된다.
반대로 이발사가 자신의 면도를 하지 않는다면, 스스로 면도를 하지 않는 사람이 되므로 선언한 문장에 따라 스스로 면도를 해야 한다.

② 예시 크레타인의 역설로 "모든 크레타인은 거짓말만 한다."라고 어느 크레타인이 말했다는 것이다.

답 풀이 참조

지도 자료

이발사의 역설

영국의 수학자인 러셀(Russell, B. A. W., 1871~1970)은 1910년 화이트헤드(Whitehead, A. N., 1861~1947)와 함께 『수학 원리(Principia Mathematica)』를 저술하며 수학을 이용해 논리학의 기초를 닦고자 하였다. 그는 집합론에 대한 '러셀의 역설(Russell's paradox)'로도 유명하다. 1919년 책 『논리적 원자론(The Philosophy of Logical Atomism)』에서는 그것을 다음과 같은 형태로 모방할 수 있다고 했는데, 이것을 '이발사의 역설(Baber's Paradox)'이라고 부른다.

> 스스로 면도하지 않는 사람들 모두를, 그리고 오직 그들만을 면도해 주는 이발사는 스스로 면도할까?

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 명제의 역과 대우 사이의 관계를 이해하게 한다.

② 명제와 그 대우의 참, 거짓 사이의 관계를 이해하게 한다.

③ 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해하고, 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있게 한다.

▌지도상의 유의점

① 명제의 역, 대우 사이의 관계를 그림을 이용하여 직관적으로 이해하게 한다.

② 명제의 참, 거짓을 판별하기 까다롭거나 모호한 경우에는 명제의 대우를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있도록 지도한다.

③ 명제의 증명은 간단한 것만 다루고, 대우를 이용한 증명법과 귀류법은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.

▌용어와 기호

- 역(逆, converse)
- 대우(對偶, contraposition)
- 귀류법(歸謬法, reduction to absurdity)

▌준비하기

|주안점| 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) 모든 정삼각형은 세 변의 길이가 같으므로 이등변삼각형이다. (참)

(2) 이등변삼각형은 두 변의 길이가 같으므로 이등변삼각형 중에는 정삼각형이 아닌 것이 있다. (거짓)

답 (1) 참 (2) 거짓

● 명제의 역과 대우

평가 기준
상 명제의 역과 대우를 말하고, 참, 거짓을 판단할 수 있다.
중 명제의 역과 대우를 말할 수 있다.
하 명제의 역을 말할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 마름모와 평행사변형 사이의 관계에 대한 명제에서 가정과 결론을 찾고, 가정과 결론을 바꾼 명제에 대해 생각해 보게 한다.

❶ 가정: □ABCD는 마름모이다.
결론: □ABCD는 평행사변형이다.

❷ □ABCD가 평행사변형이면 □ABCD는 마름모이다.

02 명제의 역과 대우

학습 목표
명제의 역과 대우를 이해하고, 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.

준비 하기
다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.
(1) 정삼각형은 이등변삼각형이다.
(2) 이등변삼각형은 정삼각형이다.

● 명제의 역과 대우

생각 열기 다음은 마름모와 평행사변형 사이의 관계에 대한 명제이다.

'□ABCD가 마름모이면 □ABCD는 평행사변형이다.'

❶ 위의 명제에서 가정과 결론을 찾아보자.
❷ 가정과 결론을 서로 바꾼 명제를 문장으로 나타내어 보자.

1 위의 생각 열기에서와 같이 명제 $p \longrightarrow q$에서 가정과 결론을 서로 바꾼 명제

$$q \longrightarrow p$$

를 명제 $p \longrightarrow q$의 **역**이라고 한다.

2 또한, 명제 $p \longrightarrow q$에서 가정과 결론을 각각 부정하여 서로 바꾼 명제

$$\sim q \longrightarrow \sim p$$

를 명제 $p \longrightarrow q$의 **대우**라고 한다.

3 명제와 그 역, 대우 사이의 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{tikzcd}
p \longrightarrow q \arrow[rr, leftrightarrow, "역"] \arrow[drr, leftrightarrow, "대우"] & & q \longrightarrow p \arrow[dll, leftrightarrow] \\
\sim p \longrightarrow \sim q \arrow[rr, leftrightarrow, "역"'] & & \sim q \longrightarrow \sim p
\end{tikzcd}$$

다가서기
'가는 말이 고와야 오는 말도 곱다.'라는 속담에서 '가는 말'과 '오는 말'을 서로 바꾸면 '오는 말이 고와야 가는 말도 곱다.'이다.
이와 같이 명제에서도 가정과 결론을 서로 바꾼 명제를 생각할 수 있다.

보기 명제 '$x=1$이면 $x^2=1$이다.'의 역과 대우는 다음과 같다.
① 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다.
② 대우: $x^2 \neq 1$이면 $x \neq 1$이다.

문제 1 다음 명제의 역과 대우를 말하시오.
(1) $x>4$이면 $\sqrt{x}>2$이다.
(2) 직사각형은 정사각형이다.

199

내용 연구

❶ 명제의 역, 대우도 명제임을 알고 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

❷ 주어진 명제의 대우를 말할 때는 가정과 결론을 각각 부정하여 순서를 바꾸어야 함을 알게 한다.

❸ $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$, $\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow \sim q$를 도식화하여 명제와 그 역, 대우 사이의 관계를 쉽게 이해하게 한다. 이때 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$를 명제 $p \longrightarrow q$의 '이(裏, inverse)'라 하는데, 현행 교육과정에서는 사용하지 않도록 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 주어진 명제의 역과 대우를 말할 수 있게 한다.

답 (1) 역: $\sqrt{x}>2$이면 $x>4$이다.
대우: $\sqrt{x} \le 2$이면 $x \le 4$이다.
(2) 역: 정사각형은 직사각형이다.
대우: 정사각형이 아니면 직사각형이 아니다.

대우를 이용한 증명법

4 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이다. 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이므로

$$Q^C \subset P^C$$

이다. 따라서 명제 $p \longrightarrow q$의 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

일반적으로 다음이 성립한다.

5 $P \subset Q$이더라도 $Q \subset P$가 아닐 수 있으므로, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이더라도 그 역 $q \longrightarrow p$는 참이 아닌 경우가 있다.

명제와 그 대우의 참, 거짓

① 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
② 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 거짓이다.

6 명제가 참이면 그 대우도 참이고 대우가 참이면 처음의 명제도 참이므로, 어떤 명제가 참임을 증명할 때는 그 대우가 참임을 증명해도 된다.

예제 1 대우를 이용하여 다음 명제가 참임을 증명하시오.

'자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'

증명 주어진 명제의 대우는 '자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'이다.
n이 홀수이면 $n=2k+1$ (k는 0 또는 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

이므로 n^2도 홀수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

문제 2 대우를 이용하여 다음 명제가 참임을 증명하시오.

'자연수에 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.'

문제 3 대우를 이용하여 다음 명제가 참임을 증명하시오.

'$ab \neq 0$이면 $a \neq 0$이고 $b \neq 0$이다.'

'p이고 q'의 부정은 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'이다.

200

대우를 이용한 증명법

평가 기준
상 대우를 이용하여 주어진 명제를 증명할 수 있다.
중 주어진 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정을 완성할 수 있다.
하 명제의 부정 또는 대우를 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

내용 연구

4 명제 $p \longrightarrow q$와 그 대우의 참, 거짓을 진리집합 사이의 포함 관계와 연관시켜 이해하게 한다.

5 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이지만 $Q \subset P$인지는 알 수 없으므로 $q \longrightarrow p$가 참인지도 알 수 없다. 즉, 어떤 명제가 참이라고 해서 그 역이 반드시 참이 되는 것은 아니며, 어떤 명제가 거짓이더라도 그 역은 참이 되는 경우도 있음을 알게 한다.

6 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 직접 증명하기 어려울 때, 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참임을 증명하여 원래 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명할 수 있음을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 2

|주안점| 주어진 명제의 대우를 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있게 한다.

|증명| 주어진 명제의 대우는

'자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'

이다.
n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때

$$n^2=(2k)^2=4k^2=2\times 2k^2$$

이므로 n^2도 짝수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

문제 3

|주안점| 주어진 명제의 대우를 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있게 한다.

|증명| 주어진 명제의 대우는

'$a=0$ 또는 $b=0$이면 $ab=0$이다.'

이다.
$a=0$이면 b의 값에 관계없이 $ab=0$이고, $b=0$이면 a의 값에 관계없이 $ab=0$이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

지도 자료

진리집합과 역, 대우의 참, 거짓

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, P, Q의 포함 관계에 따라 명제 $p \longrightarrow q$와 그 역과 대우의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

(i) $P \subset Q$ ($P \neq Q$)일 때,
명제 $p \longrightarrow q$, 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이고,
역 $q \longrightarrow p$, 역의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

(ii) $Q \subset P$ ($P \neq Q$)일 때,
명제 $p \longrightarrow q$, 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 거짓이고,
명제의 역 $q \longrightarrow p$, 역의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

(iii) $P=Q$일 때,
명제 $p \longrightarrow q$, 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, 역 $q \longrightarrow p$, 역의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 모두 참이다.

귀류법

평가 기준
상 귀류법을 이용하여 주어진 명제를 증명할 수 있다.
중 주어진 명제를 귀류법을 이용하여 증명하는 과정을 완성할 수 있다.
하 귀류법을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

내용 연구

1 귀류법은 어떤 명제가 참임을 직접 증명하기 어려울 때 이용하는 방법으로, 명제 $p \longrightarrow q$에서 가정 p가 참이고 결론 q가 참이 아니라고 가정하면 모순임을 보여 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명하는 방법임을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 4

|주안점| 귀류법을 이용하여 주어진 명제를 증명할 수 있게 한다.

|증명| $1+\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 가정하면 $1+\sqrt{2}$는 유리수이므로

$1+\sqrt{2}=a$ (a는 유리수)

로 나타낼 수 있다. 즉, $\sqrt{2}=a-1$이고 유리수끼리의 뺄셈은 유리수이므로 $a-1$은 유리수이다.

그런데 좌변의 $\sqrt{2}$는 무리수이므로 모순이다.

따라서 $1+\sqrt{2}$는 무리수이다.

수학 이야기 귀류법으로 증명한 소수의 무한성

소수의 개수가 무한하다는 사실은 그리스의 수학자 유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)의 『원론(Elements)』 제9권의 20번째 명제이므로 흔히 유클리드의 정리로 불린다.

현재까지 알려진 가장 큰 소수는 2016년 1월 7일에 발견된 $2^{74207281}-1$로, 가장 큰 메르센 소수로 알려져 있다. 메르센 수는 17세기 프랑스의 수학자 메르센(Mersenne, M., 1588~1648)이 제시한 2^n-1 꼴의 수인데, 이 중에서 소수인 것을 메르센 소수라고 한다. 월트만(Woltman, G., 1957~)이 1996년에 개설한 가장 큰 메르센 소수 찾기 누리집(www.mersenne.org)에서 소수에 대한 정보를 얻을 수 있는데, 이 누리집에 따르면 1996년까지 $2^{1398269}-1$을 발견한 이후 2016년을 기준으로 모두 15개의 메르센 소수를 발견했다고 한다.

귀류법

1 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제 또는 명제의 결론을 부정하면 모순이 생긴다는 것을 보여도 된다. 이와 같이 증명하는 방법을 **귀류법**이라고 한다.

예제 2 귀류법을 이용하여 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하시오.

증명 $\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 가정하면 $\sqrt{2}$는 유리수이므로

$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 나타낼 수 있다. 즉 $n=\sqrt{2}m$이고, 양변을 제곱하면

$n^2=2m^2$

이때 n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다.

따라서 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$4k^2=2m^2$, 즉 $2k^2=m^2$

이때 m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다.

그런데 m, n이 모두 짝수이므로 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

문제 4 귀류법을 이용하여 $1+\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하시오.

수학 이야기 귀류법으로 증명한 소수의 무한성

가장 큰 소수를 찾을 수 있을까?

2016년까지 알려진 가장 큰 소수는 $2^{74207281}-1$로, 무려 22338618 자리 수라고 한다. 그런데 소수는 무수히 많으므로 이 소수도 가장 큰 소수는 아니고, 다만 우리가 더 큰 소수를 아직 발견하지 못했을 뿐이다.

오른쪽은 귀류법을 이용하여 소수가 무수히 많음을 증명한 것이다.

소수가 유한개만 있다고 가정하고, 그 유한개의 소수를 $p_1, p_2, \cdots, p_n$이라 하자. 새로운 수 $N=p_1\times p_2\times \cdots \times p_n+1$을 만들면, N은 1보다 크고 모든 소수 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 중의 어느 것과도 같지 않으므로 합성수이다. 그러므로 N은 어느 하나의 소수 $p_m\,(1\le m\le n)$으로 나누어떨어져야 한다. 그런데 $N=p_1\times p_2\times \cdots \times p_n+1$을 p_m으로 나누면 1이 남으므로 모순이다. 따라서 소수는 무수히 많다.

201

지도 자료

여러 가지 증명법

(1) 직접증명법과 간접증명법

① 직접증명법(direct proof)

명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명할 때, 정의, 공리, 정리 등을 이용하여 가정 p로부터 결론 q를 직접 이끌어 내는 방법

② 간접증명법(indirect proof)

명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명할 때, 명제와 동치인 다른 꼴의 명제를 이용하여 간접적으로 증명하는 것으로, 다음과 같은 방법이 있다.

(i) 대우 증명법(proof by contraposition)

명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명할 때, 그 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$를 증명하는 방법

(ii) 귀류법(reduction to absurdity)

명제가 거짓이라고 가정하면 모순이 생기는 것을 보여 그 명제가 참임을 증명하는 방법

(2) 수학적 귀납법(mathematical induction)

자연수 n에 대한 명제 P_n이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명할 때, P_1이 성립함을 보이고, P_k가 성립한다고 가정하면 P_{k+1}도 성립함을 이용하여 증명하는 방법

03 충분조건과 필요조건

학습 목표
충분조건과 필요조건을 이해하고 구별할 수 있다.

준비하기
다음 명제 중에서 참인 것을 찾으시오.
(1) a가 정수이면 a^2은 자연수이다.
(2) a가 실수이면 $a^2 \geq 0$이다.

다가서기
사람이 생존하는 데 물을 섭취하는 것이 반드시 필요하다. 하지만, 사람이 생존하는 데 물을 섭취하는 것만으로는 충분하다고 할 수는 없다. 명제에서도 이와 같이 필요한 조건과 충분한 조건을 생각할 수 있다.

● 충분조건과 필요조건

생각 열기 우리나라 성인의 비타민 C 하루 필요량은 75 mg, 권장 섭취량은 100 mg이라고 한다. 다음 표는 식품 100 g당 비타민 C 함유량을 나타낸 것이다.

식품	시금치	양배추	키위	딸기	피망	브로콜리
비타민 C 함유량 (mg/100 g)	35	160	69	62	76	120

(출처: 최연배, 『식품학총론』/ 한국 영양 학회, 『2015 한국인 영양소 섭취기준』)

▶ 위의 표에서 100 g당 비타민 C 함유량이 성인의 하루 권장 섭취량을 채우는 데 충분한 식품을 말해 보자.

명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로

$$p \Longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때

p는 q이기 위한 **충분조건**,
q는 p이기 위한 **필요조건**

이라고 한다.

p이기 위한 필요조건
$p \Longrightarrow q$
q이기 위한 충분조건

또, 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$일 때, 이것을 기호로

$$p \Longleftrightarrow q$$

와 같이 나타낸다.

2 이때 p는 q이기 위한 **필요충분조건**이라고 한다. 이 경우에 q도 p이기 위한 필요충분조건이다.

예를 들어 'a는 4의 배수 $\Longrightarrow$ a는 2의 배수'에서
'a는 4의 배수'는 'a는 2의 배수'이기 위한 충분조건,
'a는 2의 배수'는 'a는 4의 배수'이기 위한 필요조건
이다. 또, 'a는 짝수 $\Longleftrightarrow$ a는 2의 배수'에서
'a는 짝수'는 'a는 2의 배수'이기 위한 필요충분조건
이다.

202

소단원 지도 개관

지도 목표

① 충분조건과 필요조건, 필요충분조건을 이해하고 구별할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 충분조건, 필요조건, 필요충분조건은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
② 충분조건, 필요조건의 '충분', '필요'는 일상생활에서 사용하는 뜻과 다소 차이가 있으므로 '명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이다.'와 같이 형식적인 방법으로 알게 한다.
③ 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하여 충분조건과 필요조건을 생각할 수 있게 한다.

용어와 기호

- 충분조건(充分條件, sufficient condition)
- 필요조건(必要條件, necessary condition)
- 필요충분조건(必要充分條件, necessary and sufficient condition)
- $p \Longrightarrow q$
- $p \Longleftrightarrow q$

준비하기

|주안점| 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $a=0$일 때, a는 정수이지만 $a^2=0$이므로 자연수가 아니다. 따라서 주어진 명제는 거짓이다.
(2) a가 실수일 때, a^2은 항상 0 이상이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (2)

● 충분조건과 필요조건

평가 기준

상	충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 판별하고, 조건의 진리집합 사이의 관계를 설명할 수 있다.
중	충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 판별할 수 있다.
하	충분조건, 필요조건, 필요충분조건의 뜻을 말할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| '필요', '충분'이라는 용어를 예를 통해 생각해 봄으로써 충분조건과 필요조건을 쉽게 받아들일 수 있게 한다.

▶ 성인의 하루 권장 섭취량 100 mg을 채우는 데 충분한 식품은 160 mg인 양배추, 120 mg인 브로콜리이다.

내용 연구

2 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건일 때, $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$이므로 q도 p이기 위한 필요충분조건임을 알게 한다.

|참고| p가 q이기 위한 필요충분조건일 때 p와 q는 동치(同値, equivalent)라고 한다.

|오개념 바로잡기| 두 조건 p, q에 대하여 명제를 나타내는 기호 $p \longrightarrow q$와 $p \longrightarrow q$가 참임을 나타내는 기호 $p \Longrightarrow q$를 혼동하지 않게 한다. 예를 들어 명제

'$x^2>2 \longrightarrow x>2$'

는 거짓인 명제이므로

'$x^2>2 \Longrightarrow x>2$'

와 같이 나타낼 수 없다.

1 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P \subset Q$이면 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이고, q는 p이기 위한 필요조건이다.
특히, $P=Q$이면 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

예제 1 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 어떤 조건인지 말하시오.

(1) p: x는 10의 약수이다. q: x는 5의 약수이다.

(2) p: $x^2 \leq 4$ q: $|x| \leq 2$

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(1) $P=\{1, 2, 5, 10\}$, $Q=\{1, 5\}$이므로 $Q \subset P$이고 $P \not\subset Q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

(2) $P=\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Q=\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$이므로 $P=Q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 필요조건 (2) 필요충분조건

문제 1 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 어떤 조건인지 말하시오.

(1) p: $x=4$ q: $x^2=4x$

(2) p: $x-2<3$ q: $-2(x-3)>-4$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음은 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$는 $A-B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건임을 증명한 것이다.

(i) '$A \subset B \Longrightarrow A-B=\varnothing$'의 증명
$A \subset B$이면 A의 원소 중에서 B에 속하지 않는 원소가 없으므로 $A-B=\varnothing$이다.
(ii) '$A-B=\varnothing \Longrightarrow A \subset B$'의 증명
$A-B=\varnothing$이면 A의 모든 원소가 B에 속하므로 $A \subset B$이다.
(i)과 (ii)에서 $A \subset B$는 $A-B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건이다.

활동 ▶ 위와 같은 방법으로 두 집합 A, B에 대하여 $A \cap B=A$는 $A \subset B$이기 위한 필요충분조건임을 증명해 보자.

203

내용 연구

1 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 $q \longrightarrow p$가 거짓일 때

$$P \subset Q, \ Q \not\subset P$$

이다. 이때 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. 또 q는 p이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 두 조건 p, q의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인지 말할 수 있게 한다.

| 풀이 | 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(1) $P=\{4\}$이고, 조건 q에서 $x^2-4x=0$이므로

$$x=0 \text{ 또는 } x=4$$

즉, $Q=\{0, 4\}$

따라서 $P \subset Q$이고 $Q \not\subset P$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

(2) 조건 p에서 $x-2<3$을 정리하면

$$x<5$$

조건 q에서 $-2(x-3)>-4$를 정리하면

$$x<5$$

즉, $P=\{x \mid x<5\}$, $Q=\{x \mid x<5\}$

따라서 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 충분조건
(2) 필요충분조건

생각 넓히기

| 지도 방향 | 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 필요충분조건임을 증명하려면 $p \Longrightarrow q$와 $q \Longrightarrow p$를 모두 증명해야 함을 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.

| 증명 | (i) '$A \cap B=A \Longrightarrow A \subset B$'의 증명
$A \cap B=A$이면 A의 모든 원소가 B에 속하므로 $A \subset B$이다.

(ii) '$A \subset B \Longrightarrow A \cap B=A$'의 증명
$A \subset B$이면 A의 원소 중에서 B에 속하지 않는 원소가 없으므로 $A \cap B=A$이다.

(i), (ii)에서 $A \cap B=A$는 $A \subset B$이기 위한 필요충분조건이다.

읽기 자료

삼단논법

추론의 기본적인 형식 중 하나인 삼단논법(三段論法, syllogism)은 이미 알려진 하나 또는 둘 이상의 일반적인 명제로부터 새로운 명제를 이끌어 내는 방법이다. 고대 그리스의 철학자인 아리스토텔레스(Aristoteles, B.C. 384~B.C. 322)가 연역적 논증의 기본 방법으로 제시한 것으로 2개의 전제와 1개의 결론으로 형성된다.

예를 들어

인간은 모두 죽는다. (대전제)
소크라테스는 인간이다. (소전제)
따라서 소크라테스는 죽는다. (결론)

와 같은 논법이다. 삼단논법 중 일부를 소개하면 다음과 같다.

(1) 긍정식(肯定式, modus ponens): 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 p가 참이면 q가 참이라고 결론을 내리는 방법

(2) 부정식(否定式, modus tollens): 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 $\sim q$가 참이면 $\sim p$가 참이라고 결론을 내리는 방법

(3) 조건삼단논법(條件三段論法, hypothetical syllogism): 명제 $p \longrightarrow q$가 참이고 $q \longrightarrow r$가 참이면 $p \longrightarrow r$가 참이라고 결론을 내리는 방법

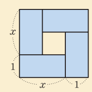
04 절대부등식

학습 목표
절대부등식의 뜻을 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

준비하기
다음 부등식을 푸시오.
(1) $2x-3\geq5$
(2) $x^2-6x+9\geq0$

● 절대부등식

생각 열기 오른쪽 그림을 이용하여, $x>0$일 때 부등식 $(x+1)^2\geq4x$가 항상 성립함을 설명해 보자.

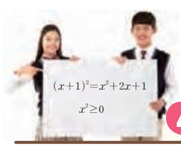


2 전체집합이 실수 전체의 집합일 때, 부등식 $x^2+1\geq0$은 전체집합에 속하는 모든 x에 대하여 성립한다. 이와 같이 전체집합에 속한 모든 값에 대하여 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라고 한다.

절대부등식을 증명할 때는 다음과 같은 성질이 자주 이용된다.

> a, b가 실수일 때,
> ❶ $a>b \iff a-b>0$ ❷ $a^2\geq0$, $a^2+b^2\geq0$
> ❸ $a^2+b^2=0 \iff a=b=0$ ❹ $|a|^2=a^2$, $|ab|=|a||b|$
> 3 ❺ $a\geq b \iff a^2\geq b^2$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$)

다가서기
$(x+1)^2=x^2+2x+1$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 등식이다. 또, $x^2\geq0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 부등식이다. 이와 같이 등식뿐만 아니라 부등식 중에도 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식이 있다.



예제 1 a, b가 실수일 때, 부등식 $a^2+b^2\geq ab$가 성립함을 증명하시오.

증명 $a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

그런데 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2\geq0$이고 $\frac{3}{4}b^2\geq0$이므로 $a^2-ab+b^2\geq0$

따라서 $a^2+b^2\geq ab$

여기서 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$이고 $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

4 (참고) 등호가 포함된 부등식이 성립함을 증명할 때는 특별한 말이 없더라도 등호가 성립하는 조건을 찾도록 한다.

204

소단원 지도 개관

▎지도 목표

① 절대부등식의 뜻을 이해하게 한다.
② 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

▎지도상의 유의점

① 절대부등식은 구체적인 예를 통해 확인하게 하고 너무 깊게 다루지 않는다.
② 증명을 지도할 때는 직관적인 이해로부터 점진적으로 형식화하게 한다.

▎용어와 기호

• 절대부등식(絶對不等式, absolute inequality)

▎준비하기

|주안점| 일차부등식과 이차부등식을 풀 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $2x-3\geq5$, $2x\geq8$이므로 $x\geq4$

(2) $x^2-6x+9\geq0$, $(x-3)^2\geq0$이므로 주어진 이차부등식은 모든 실수에서 성립한다.

답 (1) $x\geq4$ (2) 모든 실수

● 절대부등식

평가 기준

상	절대부등식의 뜻을 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
중	절대부등식인 것과 아닌 것을 구분할 수 있다.
하	절대부등식의 뜻을 말할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 도형의 기하학적 성질을 이용하여 주어진 부등식이 항상 성립함을 설명하게 한다.

▶ 바깥쪽 정사각형의 한 변의 길이가 $x+1$이므로 넓이는 $(x+1)^2$이고, 색칠된 부분의 넓이는 넓이가 x인 직사각형 네 개의 합이므로 $4x$이다.
따라서 $(x+1)^2\geq4x$가 성립한다.
여기서 등호는 $x=1$일 때 성립한다.

내용 연구

2 부등식을 참이 되게 하는 진리집합이 전체집합인 부등식을 절대부등식이라 함을 알게 한다.

3 대소 비교를 위해 부등식의 양변을 제곱하는 경우에는 반드시 두 변이 양수인지 확인하게 한다.

4 등호가 포함된 부등식이 성립함을 증명할 때는 특별한 말이 없더라도 등호가 성립하는 조건을 찾아 이를 증명 과정에 포함할 수 있게 한다.

지도 자료

여러 가지 절대부등식

(1) 코시-슈바르츠 부등식
a, b, x, y가 실수일 때,
$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$$
여기서 등호는 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, 즉 $ay=bx$일 때 성립한다.

(2) a, b, c가 실수일 때,
$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$
여기서 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

(3) $a>0$, $b>0$일 때,
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

205

문제 1 a, b가 실수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

(1) $(a+b)^2 \geq 4ab$ (2) $a^2+2ab+2b^2 \geq 0$

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$를 각각 a와 b의 산술평균, 기하평균이라고 한다.

예제 2 $a>0$, $b>0$일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$가 성립함을 증명하시오.

증명 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}$

$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

따라서 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

문제 2 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

(1) $a+\frac{1}{a} \geq 2$ (2) $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

$|a+b| \geq 0$, $|a|+|b| \geq 0$이므로 주어진 부등식의 양변을 제곱하여 증명하면 된다.

예제 3 a, b가 실수일 때, 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$가 성립함을 증명하시오.

증명 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2$

$=2(|ab|-ab)$

그런데 $|ab| \geq ab$이므로 $2(|ab|-ab) \geq 0$

따라서 $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$이므로 $|a+b| \leq |a|+|b|$

여기서 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab \geq 0$일 때 성립한다.

문제 3 a, b가 실수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

(1) $|a-b| \leq |a|+|b|$ (2) $|a|-|b| \leq |a-b|$

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

| 증명 | (1) $(a+b)^2-4ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

그런데 $(a-b)^2 \geq 0$이므로

$(a+b)^2-4ab \geq 0$

따라서 $(a+b)^2 \geq 4ab$

여기서 등호는 $a-b=0$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

(2) $a^2+2ab+2b^2=a^2+2ab+b^2+b^2=(a+b)^2+b^2$

그런데 $(a+b)^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$이므로

$a^2+2ab+2b^2 \geq 0$

여기서 등호는 $a+b=0$이고 $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

문제 2

| 주안점 | 양의 실수에서 성립하는 절대부등식을 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 증명할 수 있게 한다.

| 증명 | (1) $a>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}}=2$

따라서 $a+\frac{1}{a} \geq 2$

여기서 등호는 $a=\frac{1}{a}$, 즉 $a=1$일 때 성립한다.

(2) $\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{a+b}$

$=\frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geq 0$

따라서 $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

문제 3

| 주안점 | 절댓값 기호를 포함한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

| 증명 | (1) $|a-b| \geq 0$, $|a|+|b| \geq 0$이므로

$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=2(|ab|+ab)$

그런데 $|ab| \geq -ab$이므로

$2(|ab|+ab) \geq 0$

따라서 $|a-b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$이므로

$|a-b| \leq |a|+|b|$

여기서 등호는 $|ab|=-ab$, 즉 $ab \leq 0$일 때 성립한다.

(2) $|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-a^2+2|ab|-b^2$

$=2(|ab|-ab)$

그런데 $|ab| \geq ab$이므로

$2(|ab|-ab) \geq 0$

따라서 $(|a|-|b|)^2 \leq |a-b|^2$

(ⅰ) $|a| \geq |b|$일 때,

$|a|-|b| \geq 0$, $|a-b| \geq 0$이므로

$|a|-|b| \leq |a-b|$

(ⅱ) $|a|<|b|$일 때,

$|a|-|b|<0$, $|a-b|>0$이므로

$|a|-|b|<|a-b|$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$|a|-|b| \leq |a-b|$

여기서 등호는 $|ab|=ab$이고 $|a| \geq |b|$, 즉 $ab \geq 0$이고 $|a| \geq |b|$일 때 성립한다.

탐구 & 융합

추론 | 문제 해결

절대부등식의 기하학적 증명

양수 a, $b\,(a\geq b)$에 대하여 다음과 같은 세 가지 평균을 '피타고라스의 평균'이라고 한다.

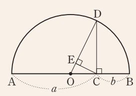
산술평균: $\dfrac{a+b}{2}$, 기하평균: $\sqrt{ab}$, 조화평균: $\dfrac{2ab}{a+b}$

고대 그리스 사람들은 피타고라스의 평균에서 다음과 같은 절대부등식

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$$

가 성립함을 알고 있었는데, 특히 파포스(Pappos, 290?～350?)는 8권으로 된 『수학집성』이라는 책에서 위의 부등식을 기하학적으로 다음과 같이 증명했다.

오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 반원에서 다음이 성립한다.



[1] $\overline{\mathrm{DE}}\leq\overline{\mathrm{DC}}\leq\overline{\mathrm{DO}}$

[2] $\overline{\mathrm{AC}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$라 할 때,

$$\overline{\mathrm{DO}}=\frac{a+b}{2},\quad \overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{ab},\quad \overline{\mathrm{DE}}=\frac{2ab}{a+b}$$

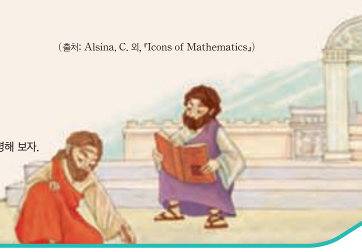
(i) $\overline{\mathrm{DO}}=\dfrac{a+b}{2}$의 증명: $\overline{\mathrm{DO}}$는 원 O의 반지름이므로, $\overline{\mathrm{DO}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{a+b}{2}$이다.

(ii) $\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{ab}$의 증명: $\triangle$DCO는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DC}}^2&=\overline{\mathrm{DO}}^2-\overline{\mathrm{CO}}^2\\&=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2\\&=ab\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{ab}$이다.

(출처: Alsina, C. 외, 『Icons of Mathematics』)



탐구 위의 그림을 이용하여 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{2ab}{a+b}$임을 증명해 보자.

206

IV-2. 명제

중단원 마무리하기

명제와 조건

(1) **명제와 그 부정**

① 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**라고 한다.

② 명제 p에 대하여 'p가 아니다.'를 명제 p의 **부정**이라 하며, 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다.

(2) **조건과 진리집합**

① 변수의 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식을 **조건**이라고 한다.

② 전체집합 U의 원소 중에서 조건 p를 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 **진리집합**이라고 한다.

(3) **명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓**

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때,

① $P\subset Q$이면 명제 $p\longrightarrow q$는 참이다.

② $P\not\subset Q$이면 명제 $p\longrightarrow q$는 거짓이다.

(4) **'모든'이나 '어떤'을 포함한 명제**

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때,

① $P=U$이면 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

② $P\neq\varnothing$이면 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

명제의 역과 대우

(1) **명제의 역과 대우**

$$\begin{array}{ccc} p\longrightarrow q & \xleftrightarrow{\text{역}} & q\longrightarrow p \\ & \text{대우} & \\ \sim p\longrightarrow \sim q & \xleftrightarrow{\text{역}} & \sim q\longrightarrow \sim p \end{array}$$

(2) 명제 또는 명제의 결론을 부정하면 모순이 생긴다는 것을 보여 원래 명제가 참임을 증명하는 방법을 **귀류법**이라고 한다.

충분조건과 필요조건

(1) $p\Longrightarrow q$일 때, p는 q이기 위한 **충분조건**이고, q는 p이기 위한 **필요조건**이다.

(2) $p\Longleftrightarrow q$일 때, p는 q이기 위한 **필요충분조건**이다.

절대부등식

전체집합에 속한 모든 값에 대하여 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라고 한다.

기본

01 다음 중에서 명제를 모두 찾고, 명제인 것은 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $\sqrt{9}$는 유리수이다.

(2) 나보다 키가 큰 사람이 많이 있다.

(3) 직각삼각형의 한 각의 크기는 90°보다 작거나 같다.

(4) 91은 소수이다.

02 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 5 이하의 자연수$\}$에 대하여 두 조건

p: $x^2-4x+4=0$, q: $x^2-6x+8\leq 0$

일 때, 다음 조건의 진리집합을 구하시오.

(1) p (2) q

(3) $\sim p$ (4) $\sim q$

03 다음 명제의 역과 대우를 말하시오.

(1) $a=b$이면 $ac=bc$이다.

(2) $x+2=0$이면 $x^2+x-2=0$이다.

04 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 어떤 조건인지 말하시오.

(1) p: $x>1$ q: $x>2$

(2) p: $|x|\leq 3$ q: $-3\leq x\leq 3$

207

탐구&융합 ➝ 절대부등식의 기하학적 증명

| 지도 방향 | 도형의 기하학적 성질을 이용하여 산술평균, 기하평균, 조화평균 사이에 성립하는 절대부등식을 증명하게 한다.

| 증명 | (i), (ii)에서 $\overline{\mathrm{DO}}=\dfrac{a+b}{2}$, $\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{ab}$

$\triangle$DCO와 $\triangle$DEC에서 $\angle$DCO$=\angle$DEC$=90^\circ$,

$\angle$D는 공통이므로 $\triangle$DCO와 $\triangle$DEC는 닮은 도형이다.

즉, $\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{DC}}$에서 $\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{DC}}^2$

따라서 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{\overline{\mathrm{DC}}^2}{\overline{\mathrm{DO}}}=\dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

지도 자료

산술평균, 기하평균, 조화평균

일반적으로 $a_1>0$, $a_2>0$, $\cdots$, $a_n>0$인 경우

(i) $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$ ⬅ 산술평균

(ii) $\sqrt[n]{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n}$ ⬅ 기하평균

(iii) $\dfrac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}$ ⬅ 조화평균

이때 (산술평균)$\geq$(기하평균)$\geq$(조화평균)이 성립한다.

중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 명제인 것을 찾아 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\sqrt{9}=3$이고, 유리수이므로 참인 명제이다.

(2) 크다, 많다의 기준이 명확하지 않으므로 명제가 아니다.

(3) 참인 명제이다.

(4) $91=7\times 13$이고, 소수가 아니므로 거짓인 명제이다.

답 명제: (1), (3), (4)
(1) 참 (3) 참 (4) 거짓

02

| 주안점 | 조건과 그 부정의 진리집합을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

(1) $(x-2)^2=0$, $x=2$, $P=\{2\}$

(2) $(x-2)(x-4)\leq 0$, $2\leq x\leq 4$, $Q=\{2, 3, 4\}$

(3) $P^C=\{1, 3, 4, 5\}$

(4) $Q^C=\{1, 5\}$

답 (1) $\{2\}$ (2) $\{2, 3, 4\}$ (3) $\{1, 3, 4, 5\}$ (4) $\{1, 5\}$

03

|주안점| 주어진 명제의 역과 대우를 말할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 역: $ac=bc$이면 $a=b$이다.

대우: $ac\neq bc$이면 $a\neq b$이다.

(2) 역: $x^2+x-2=0$이면 $x+2=0$이다.

대우: $x^2+x-2\neq 0$이면 $x+2\neq 0$이다.

답 풀이 참조

04

|주안점| 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하여 충분조건과 필요조건을 판별할 수 있게 한다.

|풀이| 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(1) $P=\{x|x>1\}$, $Q=\{x|x>2\}$이므로 $Q\subset P$이고 $P\not\subset Q$이다. 따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

(2) $P=\{x|-3\le x\le 3\}$, $Q=\{-3\le x\le 3\}$이므로 $P=Q$이다. 따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 필요조건 (2) 필요충분조건

05

|주안점| 명제의 참, 거짓과 진리집합 사이의 관계를 이해하게 한다.

|풀이| 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $\quad P\subset Q$

ㄴ. $P\cap Q=P$ $\quad$ ㄷ. $P^C\cap Q\neq\varnothing$ $\quad$ ㄹ. $Q^C\subset P^C$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㅁ

06

|주안점| '모든' 이나 '어떤'을 포함한 명제의 부정을 말하고 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 부정: 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+x\le 2$이다.

$x^2+x-2\le 0$에서 $\quad (x+2)(x-1)\le 0$

즉, $-2\le x\le 1$이므로 위의 부등식은 성립한다. (참)

(2) 부정: 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3x-4\neq 0$이다.

$(x+1)(x-4)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=4$인 경우 위의 식은 성립하지 않는다. (거짓)

답 풀이 참조

07

|주안점| 주어진 명제의 역과 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

표준

05 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오.

보기
ㄱ. $P\subset Q$ ㄴ. $P\cap Q=Q$ ㄷ. $P^C\cap Q=\varnothing$
ㄹ. $P^C\subset Q^C$ ㅁ. $P^C\cup Q=U$

06 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x>2$이다.

(2) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2-3x-4=0$이다.

07 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $a=2$, $b=3$이면 $a+b=5$이다.

(2) $x^2-x=0$이면 $x=0$ 또는 $x=1$이다.

(3) 넓이가 같은 두 삼각형은 서로 합동이다.

08 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$에 대하여 두 조건

p: x는 8의 약수, $\quad q$: x는 4의 배수

일 때, 참인 명제만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오.

보기
ㄱ. $p \longrightarrow q$ ㄴ. $q \longrightarrow p$ ㄷ. $\sim p \longrightarrow q$
ㄹ. $\sim q \longrightarrow p$ ㅁ. $\sim p \longrightarrow \sim q$

208

|풀이| (1) 역: $a+b=5$이면 $a=2$, $b=3$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=4$이면 $a+b=5$이지만 $a\neq 2$, $b\neq 3$

대우: $a+b\neq 5$이면 $a\neq 2$ 또는 $b\neq 3$이다. (참)

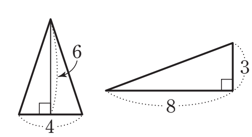
(2) 역: $x=0$ 또는 $x=1$이면 $x^2-x=0$이다. (참)

대우: $x\neq 0$이고 $x\neq 1$이면 $x^2-x\neq 0$이다. (참)

(3) 역: 두 삼각형이 서로 합동이면 넓이는 같다. (참)

대우: 두 삼각형이 서로 합동이 아니면 넓이는 같지 않다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림과 같은 두 삼각형은 합동이 아니지만 넓이는 같다.



답 풀이 참조

08

|주안점| 진리집합을 이용하여 여러 가지 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있게 한다.

|풀이| 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$P=\{1, 2, 4, 8\}$, $Q=\{4, 8\}$이므로 $Q\subset P$이고 $P\not\subset Q$이다. 따라서 $q \longrightarrow p$와 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 참이다. 즉, 참인 명제는 ㄴ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㅁ

09 다음 □ 안에 필요, 충분, 필요충분 중에서 가장 알맞은 말을 써넣으시오.

(1) 실수 a, b에 대하여 $a=0$, $b=0$은 $a+b\sqrt{2}=0$이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

(2) $A\cap B=\varnothing$은 $A-B=A$이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

(3) □ABCD가 평행사변형인 것은 □ABCD가 직사각형이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

10 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오.

보기
ㄱ. q는 p이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. q는 p이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.
ㄹ. $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
ㅁ. $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
ㅂ. $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

|서·술·형|

11 $a>1$일 때, $8a+\dfrac{2}{a-1}$의 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발 전

12 귀류법을 이용하여 다음 명제가 참임을 증명하시오.

'자연수 n에 대하여 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.'

사고력

|서·술·형|

13 a, b, x, y가 실수일 때, 다음에 답하시오.

(1) 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$이 성립함을 증명하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 $x^2+y^2=9$일 때, $3x+4y$의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

209

09

| 주안점 | 충분조건, 필요조건, 필요충분조건을 판별할 수 있게 한다.

| 풀이 | 주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하자.

(1) 'p: $a=0$, $b=0$', 'q: $a+b\sqrt{2}=0$'에서 $p \longrightarrow q$는 참이다. $a=\sqrt{2}$, $b=-1$이면 $a+b\sqrt{2}=0$이지만 $a\ne0$, $b\ne0$이므로 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) 'p: $A\cap B=\varnothing$', 'q: $A-B=A$'에서 $A\cap B=\varnothing$이면 $A-B=A-(A\cap B)=A$이므로 $p \longrightarrow q$는 참이다. $A-B=A$이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 $q \longrightarrow p$는 참이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(3) 'p: □ABCD는 평행사변형이다.', 'q: □ABCD는 직사각형이다.'에서 □ABCD가 평행사변형이라 하더라도 네 각이 모두 직각이 아니면 직사각형이 아니므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다. □ABCD가 직사각형이면 평행사변형이므로 $q \longrightarrow p$는 참이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 (1) 충분 (2) 필요충분 (3) 필요

10

| 주안점 | 참인 명제의 역, 대우 사이의 관계를 이용하여 여러 가지 명제에서 필요조건과 충분조건을 판별할 수 있게 한다.

| 풀이 | 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 q는 p이기 위한 충분조건이다. 또, 명제 $q \longrightarrow p$의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건, $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄹ, ㅂ

11

| 주안점 | 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 $8a+\dfrac{2}{a-1}$에서 $\quad 8(a-1)+\dfrac{2}{a-1}+8$

$a>1$이므로 $\quad 8(a-1)>0$, $\dfrac{2}{a-1}>0$ ▶ 30 %

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}8a+\frac{2}{a-1}&=8(a-1)+\frac{2}{a-1}+8\\&\ge2\sqrt{8(a-1)\times\frac{2}{a-1}}+8\\&=16\end{aligned}$$ ▶ 30 %

여기서 등호는 $8(a-1)=\dfrac{2}{a-1}$, 즉 $a=\dfrac{3}{2}$일 때 성립한다. ▶ 30 %

답 구하기 따라서 $a=\dfrac{3}{2}$일 때, 최솟값은 16이다. ▶ 10 %

12

| 주안점 | 귀류법을 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있게 한다.

| 증명 | n이 3의 배수가 아니라고 가정하면

$n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$ (k는 0 또는 자연수)

(ⅰ) $n=3k+1$일 때,

$$n^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$$

이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

(ⅱ) $n=3k+2$일 때,

$$n^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$$

이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 n^2이 3의 배수라는 가정에 모순이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

13

| 주안점 | 간단한 절대부등식을 증명하고, 이를 이용하여 주어진 식의 최댓값을 구할 수 있게 한다.

(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2y^2+b^2x^2-2axby=(ay-bx)^2\geq 0$

따라서 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq (ax+by)^2$

여기서 등호는 $ay-bx=0$, 즉 $ay=bx$일 때 성립한다.

(2) 문제 이해 (1)에서 $(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geq (3x+4y)^2$

▶ 20 %

해결 과정 $x^2+y^2=9$이므로 $25\times 9\geq (3x+4y)^2$

$(3x+4y)^2\leq 225$에서 $-15\leq 3x+4y\leq 15$

▶ 50 %

답 구하기 즉, $x=\frac{9}{5}$, $y=\frac{12}{5}$일 때 $3x+4y$의 최댓값은 15이다.

▶ 30 %

대단원 평가하기

IV 대단원 평가하기

하●●● 중●●● 상●●●

01 ●●●
다음 중에서 집합인 것은?
① 노래를 잘 부르는 사람의 모임
② 맛있는 음식의 모임
③ 우리 학교 1학년 학생의 모임
④ 성능이 우수한 컴퓨터의 모임
⑤ 호랑이보다 무서운 동물의 모임

02 ●●●
집합 $A=\{x|x$는 21의 약수$\}$에 대하여 다음 중에서 옳은 것은?
① $6\in A$ ② $\{3, 5, 7\}\subset A$
③ $\{3, 7\}\in A$ ④ $\{21\}\subset A$
⑤ $A=\{1, 3, 7\}$

03 ●●●
두 집합
$A=\{x|x^2-7x+10=0\}$,
$B=\{x|x$는 11 이하의 소수$\}$
에 대하여 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

04 ●●●
자연수 a, b에 대하여 두 집합
$A=\{4, a^2\}$, $B=\{1, b^2+3b\}$
가 서로 같을 때, $a+b$의 값을 구하시오.

05 ●●●
집합 $A=\{1, 6, 12\}$와 서로소인 집합 B가
$A\cup B=\{1, 3, 6, 9, 12, 15\}$
를 만족시킬 때, 집합 B를 구하시오.

06 ●●●
전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 세 부분집합 A, B, C에 대하여
$A\cup B=\{x|x$는 홀수$\}$,
$A\cup C=\{x|x$는 10의 약수$\}$
일 때, $A\cup(B\cap C)$의 모든 원소의 합을 구하시오.

07 ●●●
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$n(A\cap B^C)=8$, $n(A\cap B)=5$, $n(A\cup B)=25$
일 때, $n(B-A)$를 구하시오.

210

01

| 평가 목표 | 집합인 것과 집합이 아닌 것을 구분할 수 있다.

| 풀이 | ① 잘 부른다의 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.

② 맛있다의 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.

③ 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

④ 우수하다의 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.

⑤ 무섭다의 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ③이다. 답 ③

02

| 평가 목표 | 집합과 원소의 뜻을 알고, 이를 기호로 나타낼 수 있다.

| 풀이 | $A=\{1, 3, 7, 21\}$에 대하여

① $6\notin A$ ② $\{3, 5, 7\}\not\subset A$ ③ $\{3, 7\}\subset A$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

03

| 평가 목표 | 집합 사이의 포함 관계를 만족시키는 집합의 개수를 구할 수 있다.

| 풀이 | $(x-2)(x-5)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=5$

즉, $A=\{2, 5\}$이고 $B=\{2, 3, 5, 7, 11\}$이므로

집합 X는 2, 5를 반드시 원소로 가져야 하고, 집합 B에 포함되어야 한다. 따라서 X의 개수는

$\{2, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{2, 5, 11\}$,
$\{2, 3, 5, 7\}$, $\{2, 3, 5, 11\}$, $\{2, 5, 7, 11\}$,
$\{2, 3, 5, 7, 11\}$

의 8이다. 답 8

04

| 평가 목표 | 서로 같은 집합의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | 두 집합의 원소는 같으므로

$a^2=1$, $b^2+3b=4$

a, b는 자연수이므로 $a^2=1$에서 $a=1$

$(b-1)(b+4)=0$에서 $b=1$

따라서 구하는 값은 $a+b=2$ 답 2

05

| 평가 목표 | 서로소인 집합을 구할 수 있다.

| 풀이 | $A\cap B=\varnothing$이어야 하므로 집합 B의 원소는 $A\cup B$의 원소 중에서 집합 A의 원소가 아니어야 하므로

$B=\{3, 9, 15\}$ 답 $B=\{3, 9, 15\}$

08

두 집합 A, B에 대하여

$n(A)=28$, $n(B)=37$,

$n((A-B)\cup(B-A))=35$

일 때, $n(A\cup B)$를 구하시오.

09

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중에서 $A\cap(A-B)^C$와 같은 집합은?

① A ② $A\cap B$ ③ $A\cup B$
④ $A-B$ ⑤ $B-A$

10

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

$(A\cap B)\cup(B-C)=\varnothing$

일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $A\cap B=\varnothing$ ② $A\subset B^C$
③ $B\subset A^C$ ④ $C-B=\varnothing$
⑤ $C^C\subset B^C$

11

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(U)=25$, $n(A\cap B)=10$, $n(A^C\cap B^C)=7$

일 때, $n(A)+n(B)$를 구하시오.

12

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.
② 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $Q^C\subset P^C$이다.
③ $P\neq\varnothing$이면 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.
④ $Q\subset P$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
⑤ $P\neq U$이면 '모든 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.

13

실수 x, y에 대한 다음 명제 중에서 역이 참인 것은?

① $x=-y$이면 $x^2-y^2=0$이다.
② $x>0$이면 $|x|=x$이다.
③ $x>y$이면 $x^2>y^2$이다.
④ $x>0$이고 $y>0$이면 $x+y>0$이다.
⑤ $xy=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.

14

명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역이 참일 때, 다음 중에서 반드시 참인 것은?

① $p \longrightarrow q$ ② $p \longrightarrow \sim q$
③ $\sim p \longrightarrow q$ ④ $\sim p \longrightarrow \sim q$
⑤ $q \longrightarrow \sim p$

211

06

| 평가 목표 | 집합의 연산 법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$이고,

$A\cup B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A\cup C=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$A\cup(B\cap C)=\{1, 3, 5, 7, 9\}\cap\{1, 2, 5, 10\}=\{1, 5\}$

따라서 모든 원소의 합은 $1+5=6$ 답 6

07

| 평가 목표 | 여집합과 차집합의 성질을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다

| 풀이 | $n(B-A)=n(B\cap A^C)$이고,

$n(A\cup B)=n(A\cap B^C)+n(A\cap B)+n(B\cap A^C)$

에서 $25=8+5+n(B\cap A^C)$, $n(B\cap A^C)=12$

따라서 $n(B-A)=12$ 답 12

08

| 평가 목표 | 합집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.

| 풀이 | $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)=35$

즉, $n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$

$=35+n(A\cap B)$ …… ①

또, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=28+37-n(A\cap B)$ …… ②

①, ②에서 $n(A\cup B)=50$ 답 50

09

| 평가 목표 | 집합의 연산 법칙을 이용하여 같은 집합을 찾을 수 있다.

| 풀이 | $A\cap(A-B)^C=A\cap(A\cap B^C)^C$

$=A\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$ 답 ②

10

| 평가 목표 | 집합의 연산 법칙을 이용하여 집합 사이의 포함 관계를 판단할 수 있다.

| 풀이 | $A\cap B=\varnothing$에서 $A\subset B^C$이므로 $B\subset A^C$

$B-C=\varnothing$에서 $B\subset C$이므로 $C^C\subset B^C$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

11

| 평가 목표 | 드모르간의 법칙을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.

| 풀이 | $n((A\cup B)^C)=n(A^C\cap B^C)=7$이고,

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=25-7=18$

이므로 $n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)$

$=18+10=28$ 답 28

12

| 평가 목표 | 진리집합 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | ④ 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $Q\subset P$이면 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다. 답 ④

13

| 평가 목표 | 명제의 역을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

| 풀이 | ① 역: $x^2-y^2=0$이면 $x=-y$이다. (거짓)

[반례] $x=y$이면 $x^2-y^2=0$이지만 $x\neq-y$이다.

② 역: $|x|=x$이면 $x>0$이다. (거짓)

[반례] $x=0$이면 $|0|=0$이지만 $x>0$이 아니다.

③ 역: $x^2>y^2$이면 $x>y$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$, $y=-1$이면 $(-2)^2>(-1)^2$이지만 $-2<-1$이다.

④ 역: $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (거짓)

[반례] $x=5$, $y=-1$이면 $5+(-1)>0$이지만 $-1<0$이다.

⑤ 역: $x^2+y^2=0$이면 $xy=0$이다. (참)

$x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고, $y=0$이므로 $xy=0$이다.

답 ⑤

14

| 평가 목표 | 참인 명제 사이의 관계를 이용하여 새로운 참인 명제를 찾을 수 있다.

| 풀이 | 명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 반드시 참인 것은 ③이다.

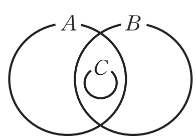
답 ③

15

| 평가 목표 | 주어진 명제의 역과 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

| 풀이 | 역: $(A\cap C)\subset(B\cap C)$이면 $A\subset B$이다. (거짓)

[반례] 오른쪽 벤다이어그램과 같을 때, $(A\cap C)\subset(B\cap C)$이지만 $A\not\subset B$이다.



대우: $(A\cap C)\not\subset(B\cap C)$이면 $A\not\subset B$이다. (참)

답 풀이 참조

16

| 평가 목표 | 주어진 조건을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.

| 풀이 | 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 실근을 가지므로

p: $a^2-4b\geq0$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

$p \longrightarrow q$는 거짓이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

17

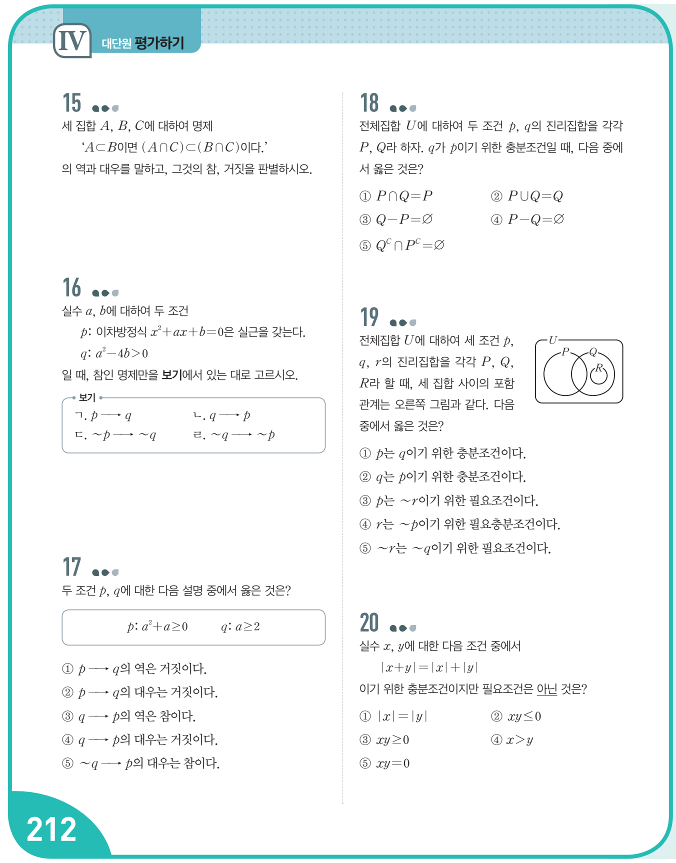
| 평가 목표 | 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하여 명제의 역과 대우의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

| 풀이 | 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$a(a+1)\geq0$에서 $a\leq-1$ 또는 $a\geq0$

따라서 $P=\{a\,|\,a\leq-1$ 또는 $a>0\}$, $Q=\{a\,|\,a\geq2\}$

이때 $Q\subset P$이고 $P\not\subset Q$이므로 명제 $q \longrightarrow p$가 참이고


IV 대단원 평가하기

15 ●●●

세 집합 A, B, C에 대하여 명제

'$A\subset B$이면 $(A\cap C)\subset(B\cap C)$이다.'

의 역과 대우를 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

16 ●●●

실수 a, b에 대하여 두 조건

p: 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 실근을 갖는다.

q: $a^2-4b>0$

일 때, 참인 명제만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $p \longrightarrow q$ ㄴ. $q \longrightarrow p$

ㄷ. $\sim p \longrightarrow \sim q$ ㄹ. $\sim q \longrightarrow \sim p$

17 ●●●

두 조건 p, q에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것은?

p: $a^2+a\geq0$ q: $a\geq2$

① $p \longrightarrow q$의 역은 거짓이다.

② $p \longrightarrow q$의 대우는 거짓이다.

③ $q \longrightarrow p$의 역은 참이다.

④ $q \longrightarrow p$의 대우는 거짓이다.

⑤ $\sim q \longrightarrow p$의 대우는 참이다.

18 ●●●

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. q가 p이기 위한 충분조건일 때, 다음 중에서 옳은 것은?

① $P\cap Q=P$ ② $P\cup Q=Q$

③ $Q-P=\varnothing$ ④ $P-Q=\varnothing$

⑤ $Q^C\cap P^C=\varnothing$

19 ●●●

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계는 오른쪽 그림과 같다. 다음 중에서 옳은 것은?

① p는 q이기 위한 충분조건이다.

② q는 p이기 위한 충분조건이다.

③ p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

④ r는 $\sim p$이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.

20 ●●●

실수 x, y에 대한 다음 조건 중에서

$|x+y|=|x|+|y|$

이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?

① $|x|=|y|$ ② $xy\leq0$

③ $xy\geq0$ ④ $x>y$

⑤ $xy=0$

212

그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이다. 또, 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 거짓이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

18

| 평가 목표 | 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | q가 p이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset P$이다.

① $P\cap Q=Q$ ② $P\cup Q=P$ ④ $P-Q\neq\varnothing$

⑤ $P^C\subset Q^C$이므로 $Q^C\cap P^C=P^C$

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

19

| 평가 목표 | 진리집합 사이의 포함 관계를 나타내는 벤다이어그램을 이용하여 충분조건과 필요조건을 판별할 수 있다.

| 풀이 | $R\subset Q$, $R\subset P^C$이므로 두 명제 $r \longrightarrow q$, $r \longrightarrow \sim p$는 참이다. 이때 두 명제의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$, $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

① p는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

② q는 p이기 위한 충분조건이 아니다.

21번부터 24번까지 서술형입니다.

21

진호네 학교 학생을 대상으로 가입한 동아리를 조사하였더니 만화 창작, 실용 음악, 댄스 동아리 중에서 적어도 한 동아리에 가입한 학생은 48명이었다. 만화 창작, 실용 음악 동아리에 가입한 학생은 각각 24명, 30명이고, 두 동아리에 모두 가입한 학생은 11명일 때, 댄스 동아리에만 가입한 학생 수를 구하시오.

22

다음 명제가 참이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-8x+a\geq 0$이다.'

23

양수 a, b에 대하여 세 조건

p: $x^2<a$, q: $x^2-2x<3$, r: $x<b$

일 때 p는 q이기 위한 충분조건이고, r는 q이기 위한 필요조건이다. 다음에 답하시오.

(1) a와 b의 값의 범위를 구하시오.

(2) a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하시오.

24

$a>0$, $b>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

$a^3+b^3\geq ab(a+b)$

자기평가 정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01	집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.	○ △ ×	175~177쪽
02 03 04	두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.	○ △ ×	178~179쪽
05 06	합집합과 교집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.	○ △ ×	180~183쪽
07 08 09 10 11 21	여집합과 차집합의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.	○ △ ×	184~187쪽
12 22	명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다.	○ △ ×	193~198쪽
13 14 15 16 17	명제의 역과 대우, 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.	○ △ ×	199~201쪽
18 19 20 23	충분조건과 필요조건을 이해하고 구별할 수 있다.	○ △ ×	202~203쪽
24	절대부등식의 뜻을 이해하고, 절대부등식을 증명할 수 있다.	○ △ ×	204~205쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

213

③ p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

④ r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

20

|평가 목표| 충분조건과 필요조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

|풀이| $|x+y|=|x|+|y|$인 경우는 두 실수 x, y의 부호가 같거나, x, y 중에서 어느 하나가 0인 경우이다.

즉, $|x+y|=|x|+|y|$에서

$x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$ 또는

$x=0$, $y\neq 0$ 또는 $x\neq 0$, $y=0$ 또는 $x=0$, $y=0$

③ 필요충분조건

⑤ 충분조건이지만 필요조건은 아니다. 답 ⑤

21

|평가 목표| 집합의 원소의 개수를 구하는 방법을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

문제 이해 적어도 한 동아리에 가입한 학생 전체의 집합을 U, 만화 창작, 실용 음악 동아리에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면, 댄스 동아리에만 가입한 학생의 집합은 $(A\cup B)^C$이다. ▶ 20 %

해결 과정 $n(U)=48$, $n(A)=24$, $n(B)=30$

$n(A\cap B)=11$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=24+30-11=43$$ ▶ 40 %

답 구하기 댄스 동아리에만 가입한 학생 수는

$$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=48-43=5$$ ▶ 40 %

22

|평가 목표| 주어진 명제가 참이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구할 수 있다.

해결 과정 $x^2-8x+a\geq 0$에서

$x^2-8x+a=(x-4)^2+a-16\geq 0$ ▶ 40 %

모든 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하도록 하려면

$a-16\geq 0$에서 $a\geq 16$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 a의 최솟값은 16이다. ▶ 20 %

23

|평가 목표| 충분조건과 필요조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

|풀이| (1) 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\,|\,-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}\}$

$Q=\{x\,|\,x^2-2x<3\}=\{x\,|\,(x-3)(x+1)<0\}$

$=\{x\,|\,-1<x<3\}$

$R=\{x\,|\,x<b\}$ ▶ 50 %

이때 $p\Longrightarrow q$이고 $q\Longrightarrow r$이므로 $P\subset Q\subset R$

$-1\leq -\sqrt{a}$, $\sqrt{a}\leq 3$이고, $b\geq 3$이어야 하므로

$0<a\leq 1$, $b\geq 3$ ▶ 40 %

(2) a의 최댓값은 1, b의 최솟값은 3이므로 구하는 합은 4이다. ▶ 10 %

24

|평가 목표| 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

해결 과정 $a^3+b^3-ab(a+b)$

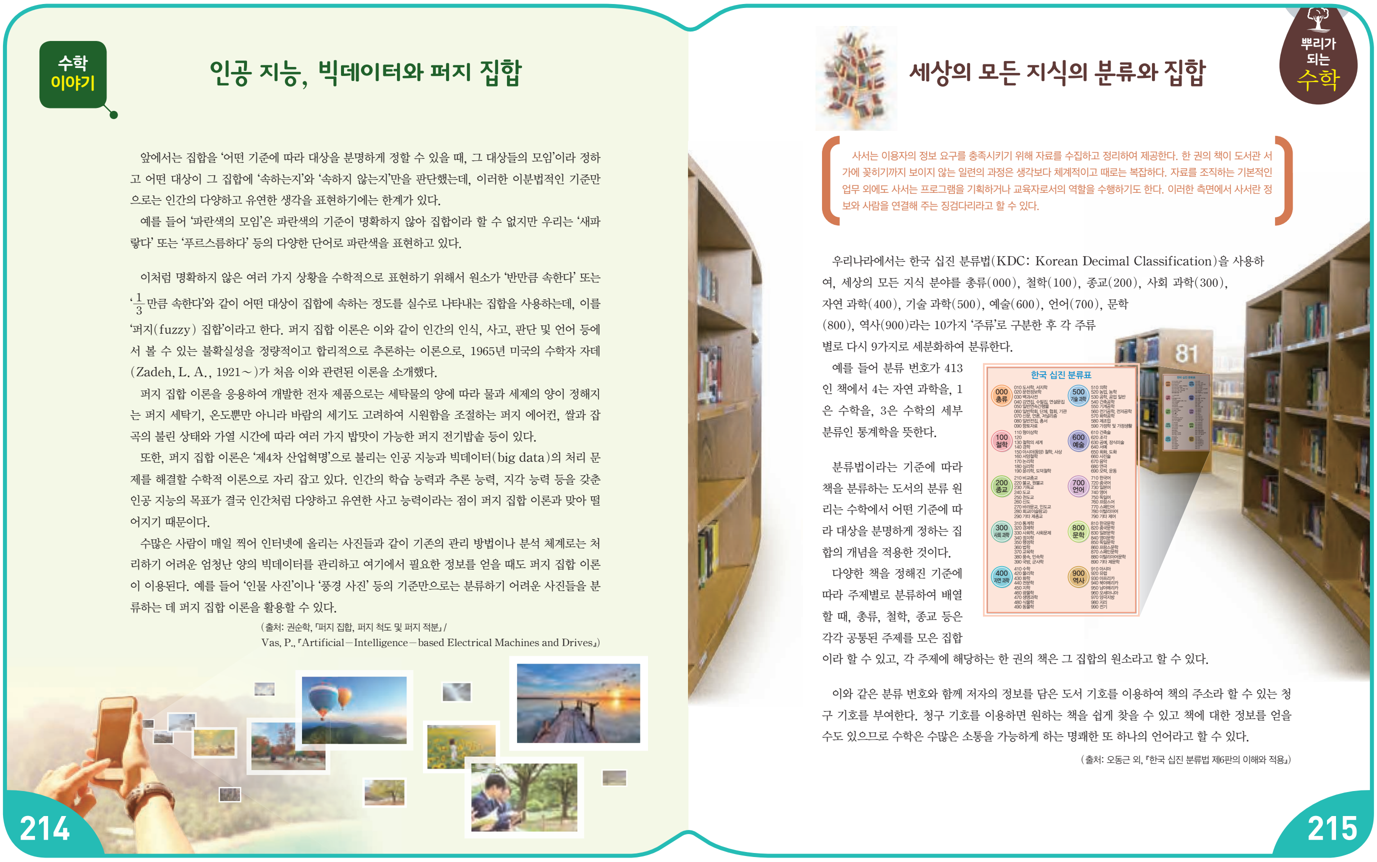
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$

$=(a+b)(a-b)^2$ ▶ 50 %

답 구하기 그런데 $a+b>0$, $(a-b)^2\geq 0$이므로

$(a+b)(a-b)^2\geq 0$, $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ ▶ 30 %

여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다. ▶ 20 %


수학 이야기

인공 지능, 빅데이터와 퍼지 집합

앞에서는 집합을 '어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임'이라 정하고 어떤 대상이 그 집합에 '속하는지'와 '속하지 않는지'만을 판단했는데, 이러한 이분법적인 기준만으로는 인간의 다양하고 유연한 생각을 표현하기에는 한계가 있다.

예를 들어 '파란색의 모임'은 파란색의 기준이 명확하지 않아 집합이라 할 수 없지만 우리는 '새파랗다' 또는 '푸르스름하다' 등의 다양한 단어로 파란색을 표현하고 있다.

이처럼 명확하지 않은 여러 가지 상황을 수학적으로 표현하기 위해서 원소가 '반만큼 속한다' 또는 '$\frac{1}{3}$만큼 속한다'와 같이 어떤 대상이 집합에 속하는 정도를 실수로 나타내는 집합을 사용하는데, 이를 '퍼지(fuzzy) 집합'이라고 한다. 퍼지 집합 이론은 이와 같이 인간의 인식, 사고, 판단 및 언어 등에서 볼 수 있는 불확실성을 정량적이고 합리적으로 추론하는 이론으로, 1965년 미국의 수학자 자데(Zadeh, L. A., 1921～)가 처음 이와 관련된 이론을 소개했다.

퍼지 집합 이론을 응용하여 개발한 전자 제품으로는 세탁물의 양에 따라 물과 세제의 양이 정해지는 퍼지 세탁기, 온도뿐만 아니라 바람의 세기도 고려하여 시원함을 조절하는 퍼지 에어컨, 쌀과 잡곡의 불린 상태와 가열 시간에 따라 여러 가지 밥맛이 가능한 퍼지 전기밥솥 등이 있다.

또한, 퍼지 집합 이론은 '제4차 산업혁명'으로 불리는 인공 지능과 빅데이터(big data)의 처리 문제를 해결할 수학적 이론으로 자리 잡고 있다. 인간의 학습 능력과 추론 능력, 지각 능력 등을 갖춘 인공 지능의 목표가 결국 인간처럼 다양하고 유연한 사고 능력이라는 점이 퍼지 집합 이론과 맞아 떨어지기 때문이다.

수많은 사람이 매일 찍어 인터넷에 올리는 사진들과 같이 기존의 관리 방법이나 분석 체계로는 처리하기 어려운 엄청난 양의 빅데이터를 관리하고 여기에서 필요한 정보를 얻을 때도 퍼지 집합 이론이 이용된다. 예를 들어 '인물 사진'이나 '풍경 사진' 등의 기준만으로는 분류하기 어려운 사진들을 분류하는 데 퍼지 집합 이론을 활용할 수 있다.

(출처: 권순학, 『퍼지 집합, 퍼지 척도 및 퍼지 적분』/
Vas, P., 『Artificial－Intelligence－based Electrical Machines and Drives』)

214

뿌리가 되는 수학

세상의 모든 지식의 분류와 집합

사서는 이용자의 정보 요구를 충족시키기 위해 자료를 수집하고 정리하여 제공한다. 한 권의 책이 도서관 서가에 꽂히기까지 보이지 않는 일련의 과정은 생각보다 체계적이고 때로는 복잡하다. 자료를 조직하는 기본적인 업무 외에도 사서는 프로그램을 기획하거나 교육자로서의 역할을 수행하기도 한다. 이러한 측면에서 사서란 정보와 사람을 연결해 주는 징검다리라고 할 수 있다.

우리나라에서는 한국 십진 분류법(KDC: Korean Decimal Classification)을 사용하여, 세상의 모든 지식 분야를 총류(000), 철학(100), 종교(200), 사회 과학(300), 자연 과학(400), 기술 과학(500), 예술(600), 언어(700), 문학(800), 역사(900)라는 10가지 '주류'로 구분한 후 각 주류별로 다시 9가지로 세분화하여 분류한다.

예를 들어 분류 번호가 413인 책에서 4는 자연 과학을, 1은 수학을, 3은 수학의 세부 분류인 통계학을 뜻한다.

분류법이라는 기준에 따라 책을 분류하는 도서의 분류 원리는 수학에서 어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정하는 집합의 개념을 적용한 것이다.

다양한 책을 정해진 기준에 따라 주제별로 분류하여 배열할 때, 총류, 철학, 종교 등은 각각 공통된 주제를 모은 집합이라 할 수 있고, 각 주제에 해당하는 한 권의 책은 그 집합의 원소라고 할 수 있다.

이와 같은 분류 번호와 함께 저자의 정보를 담은 도서 기호를 이용하여 책의 주소라 할 수 있는 청구 기호를 부여한다. 청구 기호를 이용하면 원하는 책을 쉽게 찾을 수 있고 책에 대한 정보를 얻을 수도 있으므로 수학은 수많은 소통을 가능하게 하는 명쾌한 또 하나의 언어라고 할 수 있다.

(출처: 오동근 외, 『한국 십진 분류법 제6판의 이해와 적용』)

215

수학 이야기 인공 지능, 빅데이터와 퍼지 집합


자데

미국의 수학자 자데(Zadeh, L. A., 1921～)가 1965년에 발표한 퍼지 집합은 보통의 집합의 개념을 확장한 것으로 애매하고 불분명한 상황에서 여러 문제들을 해결하기 위한 판단 과정에 대하여 수학적으로 접근하려는 이론이다. 이러한 퍼지 집합의 정의는 다음과 같다.

> 어떤 집합 A에 대하여 집합 A에서 닫힌구간 $[0,\ 1]$로의 함수 $m: A \longrightarrow [0,\ 1]$이 있을 때, $(A,\ m)$을 퍼지 집합이라고 한다. 이때 함수 m을 소속함수(membership function)라 하고, A에 속하는 원소 $x \in A$에 대하여 x에서의 함숫값 $m(x)$를 소속도(grade of membership)라고 한다.

예를 들어 $m(x)=\frac{1}{3}$인 원소 x는 A에 '$\frac{1}{3}$만큼 속해 있다'라 할 수 있고, $m(x)=0$인 원소 x는 A에 '0만큼 속해 있다,' 즉 '전혀 속해 있지 않다'라 할 수 있다는 것이다.

뿌리가 되는 수학 세상의 모든 지식의 분류와 집합

집합은 소속이 분명한 원소들의 모임이므로, 자료를 분류하는 데 가장 적합한 도구라 할 수 있다. 따라서 도서관의 서적을 분류할 때 먼저 총론, 철학, 종교 관련 서적으로 대분류를 하고, 각 주제별로 중분류를 한 다음 다시 소분류를 하는데, 예를 들어 400번 대의 도서는 자연과학 서적의 집합이고, 410번 대의 서적은 이 집합의 부분집합인 수학 서적의 집합을 말한다.

집합을 이용하여 분류하는 또 다른 예로 컴퓨터의 폴더(folder)를 들 수 있는데, 각종 파일들을 문서, 동영상, 사진, 음악 등 속성별로 구분하여 각각에 해당하는 폴더라는 집합으로 분류하고, 그 폴더 내에 다양한 이름의 부분집합을 하위 폴더로 분류하여 속성에 맞는 파일을 저장한다.

지도 자료

명제와 역설

수학에서 다루는 문장은 누가 읽더라도 동일하게 이해할 수 있어야 하기 때문에 객관성을 전제로 서술되어야 한다. 따라서 아주 사소한 부분이라도 애매한 표현이 있어서는 안 된다.

● **벨기에의 검은 양**

세 사람 A, B, C가 기차를 타고 벨기에의 한 시골 마을을 지나가면서 창 밖의 들판 위에 있는 검은 양을 보며 다음과 같은 대화를 나누었다.

사람 A: 벨기에의 모든 양은 검은 색인가 보군.
사람 B: 어허! 아니지. 이 사람아. "벨기에에는 한 마리의 검은 색 양이 있다."라고 해야 옳게 말한 것이지.
사람 C: 아니지. 이 사람들아! "벨기에에는 적어도 한쪽 면이 검은 색인 양이 적어도 한 마리 존재하고, 그와 같은 양이 있는 들판이 적어도 한 개가 있다."가 맞는 표현이지.

이 이야기는 동일한 상황을 세 사람 모두 다른 관점에서 해석하고 있음을 보여 준다. 이때 세 사람이 말한 명제가 거짓이 되는 경우를 살펴보면 각각 다음과 같다.

사람 A의 명제: 벨기에에서 검은 색이 아닌 양을 단 한 마리라도 찾으면 사람 A가 말한 명제는 거짓이 된다.
사람 B의 명제: 벨기에에서 또 다른 검은 색인 양을 단 한 마리라도 찾으면 사람 B가 말한 명제는 거짓이다.
사람 C의 명제: 벨기에의 모든 들판에서 동시에 모든 양들의 양면을 조사한 후 조사한 모든 양들의 양쪽 면이 검은 색이 아님을 밝히면 사람 C가 말한 명제는 거짓이 된다.

참과 거짓을 판명할 수 없어 수학적인 명제가 아닌 논리적 역설의 여러 가지 예를 살펴보면 다음과 같다.

● **거짓말쟁이의 역설**

기원전 6세기경, 철학자인 에피메니데스(Epimenides)는 "크레타섬 사람들은 모두 거짓말쟁이이다."라고 말했다. 그러나 이 말을 한 에피메니데스는 크레타섬 사람이다. 이 말을 한 사람이 크레타섬 사람이니 그가 한 말은 거짓말이 된다. 그러면 크레타섬 사람들은 거짓말쟁이가 아니라는 것이다. 따라서 그가 한 말은 참이 되어 크레타섬 사람들은 결국 모두 거짓말쟁이가 되므로 모순이다.

● **러셀(Russell, B. A. W., 1871~1970)의 역설**

러셀이 1901년에 제시한 역설로, 자기 자신을 원소로 갖지 않는 모든 집합들의 집합을 A라 하자. 즉,

$$A=\{X \mid X\text{는 집합, } X \notin X\}$$

이다. 여기에서 만일 A가 A의 원소이면 A의 정의에 의하여 $A \notin A$이다. 또, $A \notin A$이면 A를 정의한 조건에 의하여 $A \in A$이다.

즉, A가 A의 원소일 필요충분조건이 A가 A의 원소가 아닌 것이므로 모순이다.

● **베리(Berry, G. G., 1867~1928)의 역설**

$S=\{x \mid x$는 열네 자 이내로 나타낼 수 없는 수$\}$라 할 때, $x \in S$이면 x는 열세 자로 된 '열네 자 이내로 나타낼 수 없는 수'로 표현되므로 모순이다.

● **자기 언급(self reference)**

'이 문장은 거짓이다.'라는 문장이 참이면 이 문장은 거짓이고, 주어진 문장이 거짓이면 그 문장은 참이 되므로 모순이다. 이러한 종류의 역설을 '자기 언급' 또는 '자기 참조'라고 한다.

V 함수

1. 함수
2. 유리함수와 무리함수

이 단원에서는

함수의 뜻과 성질, 함수의 그래프, 합성함수와 역함수를
알아보며, 유리함수와 무리함수의 그래프를 그려 보고
그 그래프의 성질을 이해한다.

1 단원의 개관

지도 목표

1. 함수

- 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해하게 한다.
- 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있게 한다.
- 역함수의 뜻을 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.

2. 유리함수와 무리함수

- 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.
- 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해하게 한다.

지도상의 유의점

1. 함수

- 함수의 개념은 중학교에서 학습한 내용을 확장하여 주어진 두 집합 사이의 대응 관계를 통해 이해하게 한다.
- 함수의 그래프를 다룰 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
- 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 일대일함수, 합성함수, 역함수의 뜻은 구체적인 예를 통해 이해하게 한다.
- 대응으로 정의되는 함수의 예를 찾아보는 활동을 통해 함수의 유용성을 인식하게 한다.

2. 유리함수와 무리함수

- 유리식, 무리식은 유리함수, 무리함수의 뜻을 이해할 수 있는 정도로 간단히 다룬다.
- 유리함수는 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$와 같이 일차식을 일차식으로 나눈 형태까지만 다룬다.
- 무리함수는 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 같이 근호 안이 일차식인 형태까지만 다룬다.

학습 계통도

배운 내용	이 단원의 내용	배울 내용
[중학교 수학 1] • 좌표평면과 그래프 [중학교 수학 2] • 일차함수와 그래프 [중학교 수학 3] • 이차함수와 그래프	1. 함수 01 함수 02 합성함수 03 역함수 2. 유리함수와 무리함수 01 유리함수 02 무리함수	[수학 Ⅰ] • 지수함수와 로그함수 • 삼각함수 • 수열 [수학 Ⅱ] • 함수의 극한과 연속 • 미분 • 적분

2 단원의 이론적 배경

17세기	1673	18세기	1707	1789	19세기	1805	20세기
	라이프니츠 _ '함수'라는 용어를 처음으로 사용하였다.		**오일러** _ 함숫값을 나타내는 기호 $f(x)$를 처음으로 사용하였다.	**코시** _ 현대적인 함수의 정의의 기초를 마련하였다.		**디리클레** _ 함수의 뜻을 지금과 같이 형식적이고 임의적으로 정의하였다.	

1 함수의 역사

함수를 넓은 의미에서 이해하면 함수의 역사는 수학의 역사와 더불어 이어져 왔다고 할 수 있을 것이다.


히파르코스

조건을 갖는 대응이라는 것으로 함수를 정의한다면 고대 바빌로니아 사람들이 만든 다양한 수표에서 함수의 대응을 찾아볼 수 있을 것이다. 히파르코스(Hipparchos, B.C. 190?~B.C. 125?)의 삼각비가 그 한 예이며, 이는 프톨레마이오스(Ptolemaeos, 85?~165?)에 의하여 0.5° 간격의 현표(弦表)로 발전되었다. 현대적인 함수의 정의가 체계화되기 훨씬 전의 일이지만 천동설을 다루고 있는 천문학서 『알마게스트(Almagest)』에서 현표를 응용하였으므로 그가 실제로 함수 개념을 활용했다고 볼 수 있다.

이후 갈릴레이(Galilei, G., 1564~1642)에 이르러 함수의 개념이 보다 분명하게 인식되기에 이른다. 그는 두 변수 사이의 관계를 바탕으로 물체의 운동에 대한 연구를 하였다.

arc	chord			sixtieths		
$\frac{1}{2}$	0	31	25	1	2	50
1	1	2	50	1	2	50
$1\frac{1}{2}$	1	34	15	1	2	50
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
109	97	41	38	0	36	23
$109\frac{1}{2}$	97	59	49	0	36	9
110	98	17	54	0	35	56
$110\frac{1}{2}$	98	35	52	0	35	42
111	98	53	43	0	35	29
$111\frac{1}{2}$	99	11	27	0	35	15
112	99	29	5	0	35	1
$112\frac{1}{2}$	99	46	35	0	34	48
113	100	3	59	0	34	34
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
179	119	59	44	0	0	25
$179\frac{1}{2}$	119	59	56	0	0	9
180	120	0	0	0	0	0

데카르트(Descartes, R., 1596~1650)는 좌표기하학의 연구 과정에서 곡선을 '어떤 관계식을 만족시키는 무한개의 점의 모임'이라 규정하면서 곡선을 함수의 그래프로 이해하게 되는 발판을 마련하였다.

'함수(函數, function)'라는 용어는 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)가 1673년에 처음 사용하였다. 또, 오일러(Euler, L., 1707~1783)는 함수를 '변수와 몇 개의 상수로 나타내어진 식'으로 설명하면서 함숫값을 나타내는 기호 $f(x)$를 처음으로 사용하였다. 하지만 당시까지도 여전히 변수와 상수에 대한 식이라는 생각의 틀을 벗어나지는 못하고 있었다.


푸리에

현대적인 함수의 정의의 기초를 마련한 것은 푸리에(Fourier, J. B. J., 1768~1830)와 코시(Cauchy, A. L., 1789~1857)였다. 코시는 독립변수와 종속변수를 구분하고 독립변수가 변함에 따라 종속적으로 변하는 양을 독립변수의 함수로 정의하였다.

함수의 뜻을 지금과 같이 형식적이고 임의적인 것으로 정의한 사람은 디리클레(Dirichlet, J. P. G. L., 1805~1859)였다. 그는 푸리에 급수를 연구하는 과정에서 함수는 동일한 법칙에 의한 관계를 가지지 않아도 되며 식으로 표시할 필요성도 없다는 정의에 도달하였다. 그는 함수는 '수의 특수한 대응 관계'이고 함수를 표현하는 식이나 규칙은 본질적인 것이 아니며 수식으로 나타내어지지 않는 관계도 함수가 될 수 있다고 하여 마침내 현대적 함수의 정의를 얻었다.

2 함수의 일반적 정의

일반적으로 두 집합 A, B에 대하여 $A\times B$의 부분집합 f가 다음 두 조건

$$(1)\ \forall x\in A,\ \exists y\in B,\ (x,\ y)\in f$$

$$(2)\ (x,\ y)\in f \text{이고 } (x,\ y')\in f \Longrightarrow y=y'$$

을 만족시킬 때 f를 집합 A에서 집합 B로의 함수라 하며, 기호로 $f: A \longrightarrow B$와 같이 나타낸다.

앞으로 f가 집합 A에서 집합 B로의 함수일 때, $(x,\ y)\in f$인 관계를 $y=f(x)$로 나타내며, 이때 y를 x의 상(像, image) 또는 f에 의한 x의 함숫값(value)이라 하며, x를 y의 원상(原像, preimage) 또는 역상(逆像, inverse image)이라고 한다.

f가 집합 A에서 집합 B로의 함수일 때 A를 f의 정의역(定義域, domain), B를 f의 공역(共域, codomain)이라 하고, 함숫값 전체의 집합

$$R(f)=f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$$

를 f의 치역(値域, range)이라고 한다.

일반적으로 $C\subset A$, $D\subset B$에 대하여 집합

$$f(C)=\{y\in B\,|\,\exists x\in C,\ y=f(x)\}$$

를 f에 의한 C의 상이라 하며,

$$f^{-1}(D)=\{x\in A\,|\,f(x)\in D\}$$

를 f에 의한 D의 원상 또는 역상이라고 한다.

또, $G_f=\{(x,\ y)\in A\times B\,|\,y=f(x)\}$를 함수의 그래프(graph)라고 한다.

함수 $f: A \longrightarrow B$가 조건

$$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$$

를 만족시킬 때 f를 일대일함수(一對一函數, one to one function) 또는 단사함수(單射函數, injective function)라고 한다.

또, 조건

$$\forall y\in B,\ \exists x\in A,\ y=f(x)$$

를 만족시킬 때 f를 A에서 B 위로의 함수(onto function) 또는 전사함수(全射函數, surjective function)라고 한다.

전사이면서 단사인 함수를 일대일대응(一對一對應, one to one correspondence) 또는 전단사함수(全單射函數, bijective function)라고 한다.

함수 $f: A \longrightarrow A$가 $f(x)=x$, $\forall x \in A$일 때, f를 항등함수(恒等函數, identity function)라 하고, id_A로 나타낸다.

두 함수 $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$에 대하여 $g \circ f: A \longrightarrow C$를

$$(g \circ f)(x)=g(f(x)),\ x \in A$$

로 정의하면 $g \circ f$는 A에서 C로의 함수이다. 이것을 f와 g의 합성함수(合成函數, composite function)라고 한다.

함수 $f: A \longrightarrow B$에 대하여 함수 $g: B \longrightarrow A$가

$$g \circ f=id_A, \quad f \circ g=id_B$$

를 만족시킬 때, 즉

$$g(f(x))=x,\ \forall x \in A, \quad f(g(y))=y,\ \forall y \in B$$

일 때, g를 함수 f의 역함수(逆函數, inverse function)라 하며, 기호로 $g=f^{-1}$와 같이 나타낸다.

참고 문헌

- 강옥기, 『수학과 학습지도와 평가론』, 경문사, 2000
- Pinter, C., 『Set Theory』, Addison－Wesley, 1971

3 단원의 지도 계획

중단원	소단원	차시 (총 19차시)	교과서 쪽 수	지도 내용	용어와 기호
1. 함수	01 함수	4	219~223	• 함수 • 일대일함수와 일대일대응 • 항등함수와 상수함수	정의역, 치역, 공역, 대응, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, $f: X \longrightarrow Y$
	02 합성함수	1	224~225	• 합성함수	합성함수, $g \circ f$, $(g \circ f)(x)$, $y=g(f(x))$
			226	• 수학 이야기	
	03 역함수	2	227~230	• 역함수	역함수, f^{-1}, $y=f^{-1}(x)$
			231	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	1	232~234	• 중단원 마무리하기	
2. 유리함수와 무리함수	01 유리함수	4	236~241	• 유리식 • 유리함수 • 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 • 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프	유리식, 유리함수, 다항함수, 점근선
			242	• 공학적 도구	
	02 무리함수	4	243~248	• 무리식 • 무리함수 • 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프 • 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프	무리식, 무리함수
	중단원 마무리	1	249~251	• 중단원 마무리하기	
대단원 마무리		2	252~255	• 대단원 평가하기	
			256	• 수학 이야기	
			257	• 뿌리가 되는 수학	

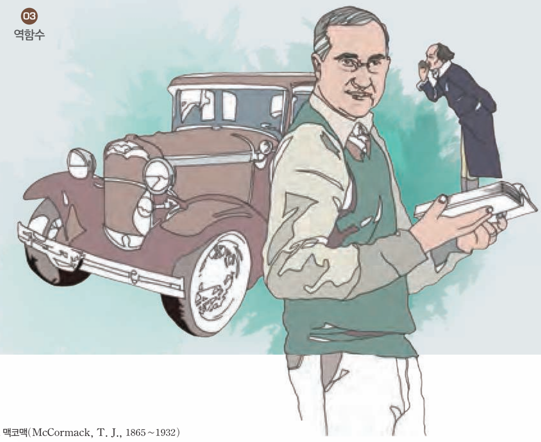
※ 실제 지도는 학교의 실정에 따라 알맞게 계획하고 재수정할 수 있다.

1 함수

01 함수
02 합성함수
03 역함수

“마침내 전체 수학의 발전은 …
바로 근대 수학 사상의 꽃인
함수의 개념이라는 정점에
이르게 된다.”

(출처: McCormack, T. J., 『On the Nature of Scientific Law and Scientific Explanation』)



토마스 맥코맥(McCormack, T. J., 1865～1932)
미국의 과학 관련 편집 저술가

이 글은 맥코맥이 1900년 『The Monist』라는 철학 잡지에 과학 법칙의 특성에 대하여 기고한 내용으로서, 17～18세기에 함수가 수학뿐만 아니라 과학 기술의 발전에 얼마나 중요한 역할을 했는지 강조한 것이다.

218

01 함수

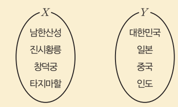
학습 목표
함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.

준비하기
한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 둘레의 길이를 y cm라 할 때, 두 변수 x, y 사이의 관계식을 구하시오.

함수

생각 열기 오른쪽 그림은 유네스코(UNESCO)가 지정한 세계 문화유산과 아시아의 여러 나라를 각각 두 집합 X, Y로 나타낸 것이다.

▶ 각각의 세계 문화유산을 그 유산이 있는 나라에 화살표로 연결해 보자.



공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X의 원소에 Y의 원소를 짝지어 주는 것을, 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 한다. 이때 X의 원소 x에 Y의 원소 y가 대응하는 것을 기호로 $x \longrightarrow y$와 같이 나타낸다.

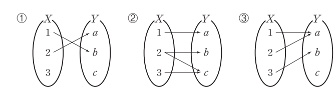
1 중학교에서는 두 변수 x와 y에 대하여 x의 값이 정해짐에 따라 y의 값이 오직 하나씩 정해지는 관계가 있을 때, y를 x의 함수라 정의하였다. 여기서는 두 집합 X와 Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 ‘X에서 Y로의 함수’라 하며, 이것을 기호로

$$f : X \longrightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

다가서기
수심이 깊어질수록 압력은 높아지고, 상품의 가격이 오를수록 수요는 감소한다.
이와 같이 자연 현상이나 사회 현상에서는 어떤 값이 변함에 따라 다른 값이 변하는 경우를 흔히 볼 수 있는데, 함수는 이러한 관계를 탐구하는 중요한 수학적 도구이다.

보기 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에서 집합 $Y=\{a, b, c\}$로의 대응이다.



①은 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
②는 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 b, c의 2개이므로 함수가 아니다.
③은 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

219

중단원 도입

함수는 영어로 function이라 하는데 라틴어 funtio(수행하기)에서 나온 것이다. 이 function을 중국어 발음대로 쓰면 ‘函數(퐌-슈)’이고, 이것을 우리나라에서 ‘함수’라 번역한 것이다.

이 단원에서는 중학교에서 학습한 함수의 개념을 집합의 대응을 이용하여 정의하고, 집합을 활용하여 정의역, 공역, 치역을 나타내는 방법을 알아본다. 또, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수 등을 알아보고, 합성함수, 역함수의 뜻을 이해하며 주어진 함수로부터 합성함수 또는 역함수를 구할 수 있게 한다.

토마스 맥코맥

미국에서 태어난 토마스 맥코맥(McCormack, T. J., 1865～1932)은 1884년 프린스턴 대학을 졸업하고, 독일에서 역사, 정치, 언어학 등을 공부하였다. 미국으로 돌아온 다음 프랑스어와 독일어로 된 책들을 번역하여 수학과 과학 발전에 기여하였다.

소단원 지도 개관

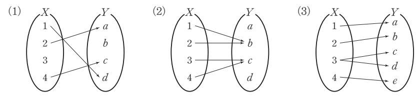
지도 목표

① 두 집합 사이의 대응에 의한 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해하게 한다.
② 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수의 뜻을 이해하게 한다.

지도상의 유의점

① 중학교에서 함수의 개념을 학습했지만 대응에 의한 정의는 처음 학습하는 것이므로 대응의 뜻과 특징을 예를 통하여 쉽게 이해할 수 있게 한다.
② 두 함수가 서로 같을 때 두 함수의 식이 반드시 같을 필요는 없음을 이해하게 한다.
③ 일대일대응은 역함수를 이해하기 위한 핵심 개념이므로 역으로 대응시켰을 때 함수라는 측면에서도 설명하도록 한다.
또, 정의역과 공역이 주어지지 않은 함수에서는 공역과 치역이 일치하는 것으로 생각하여 일대일함수를 일대일대응과 같은 것으로 볼 수 있게 한다.

문제 1 다음 대응 중에서 집합 X에서 집합 Y로의 함수인 것을 찾으시오.



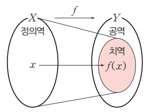
오일러(Euler, L., 1707 ~1783)
스위스의 수학자로 함수의 기호 $y=f(x)$를 처음 사용했다고 한다.

함수 $f:X \longrightarrow Y$에서 집합 X를 함수 f의 **정의역**, 집합 Y를 함수 f의 **공역**이라고 한다.

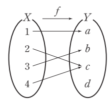
또, 함수 $f:X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로

$$y=f(x)$$

와 같이 나타낸다. 이때 $f(x)$를 x에서의 함숫값이라 하고, 함숫값 전체의 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 **치역**이라고 한다. 함수의 치역은 공역의 부분집합이다.



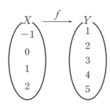
보기 오른쪽 그림과 같은 함수 $f:X \longrightarrow Y$에서
① 정의역은 $X=\{1, 2, 3, 4\}$
② 공역은 $Y=\{a, b, c, d\}$
③ $f(1)=a$, $f(2)=c$, $f(3)=b$, $f(4)=c$이므로
치역은 $\{a, b, c\}$



문제 2 집합 $X=\{-1, 0, 1, 2\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 함수 $f(x)=x^2+1$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 함수 f의 대응 관계를 오른쪽 그림에 나타내시오.

(2) 함수 f의 정의역, 공역, 치역을 구하시오.



2 함수 $y=f(x)$의 정의역이나 공역이 주어져 있지 않은 경우, 정의역은 함수가 정의되는 실수 x의 값 전체의 집합으로, 공역은 실수 전체의 집합으로 생각한다.

보기 ① 함수 $y=3x+2$의 정의역은 $\{x \mid x\text{는 실수}\}$, 치역은 $\{y \mid y\text{는 실수}\}$이다.
② 함수 $y=x^2$의 정의역은 $\{x \mid x\text{는 실수}\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 0\text{인 실수}\}$이다.

220

▌용어와 기호

- 대응(對應, correspondence)
- 정의역(定義域, domain)
- 공역(共域, codomain)
- 치역(値域, range)
- 일대일함수(一對一函數, one to one function)
- 일대일대응(一對一對應, one to one correspondence)
- 항등함수(恒等函數, identity function)
- 상수함수(常數函數, constant function)
- $f:X \longrightarrow Y$

▌준비하기

| 주안점 | 두 변수 사이의 관계식을 구할 수 있는지 확인한다.

| 풀이 | 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 둘레의 길이는 $4x$ cm이므로 $y=4x$

답 $y=4x$

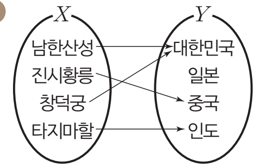
● 함수

평가 기준

상	대응 그림과 그래프를 보고 함수인 것을 찾아 그 이유를 설명할 수 있다.
중	대응 그림과 그래프를 보고 함수인 것을 찾을 수 있다.
하	대응 그림을 보고 함수인 것을 찾을 수 있다.

생각 열기

| 지도 방향 | 세계 문화유산과 그 유산이 있는 나라를 화살표로 연결해 대응의 개념을 이해하게 한다.



내용 연구

1 함수는 두 집합 X와 Y에 대하여 X의 모든 원소에 대응하는 Y의 원소가 있어야 하고, 이때 대응하는 Y의 원소는 하나뿐이어야 한다.

2 함수를 정의하려면 정의역, 공역, 함수 관계를 함께 제시해야 하지만 수식으로 표현된 함수의 경우 정의역과 공역이 분명하면 이를 생략할 수 있고, 고등학교 과정에서 정의역이 언급되지 않은 함수의 경우에는 함수가 정의되는 수 전체의 집합을 함수의 정의역으로 생각한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 대응 중에서 함수인 것을 찾을 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(2) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

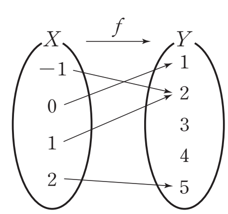
(3) X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 c, d의 2개이므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 (2)이다. 답 (2)

문제 2

| 주안점 | 함수의 대응 관계를 그림으로 나타내고 정의역, 공역, 치역을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 함수 f의 대응 관계를 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(2) 정의역: $\{-1, 0, 1, 2\}$
공역: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
치역: $\{1, 2, 5\}$

답 풀이 참조

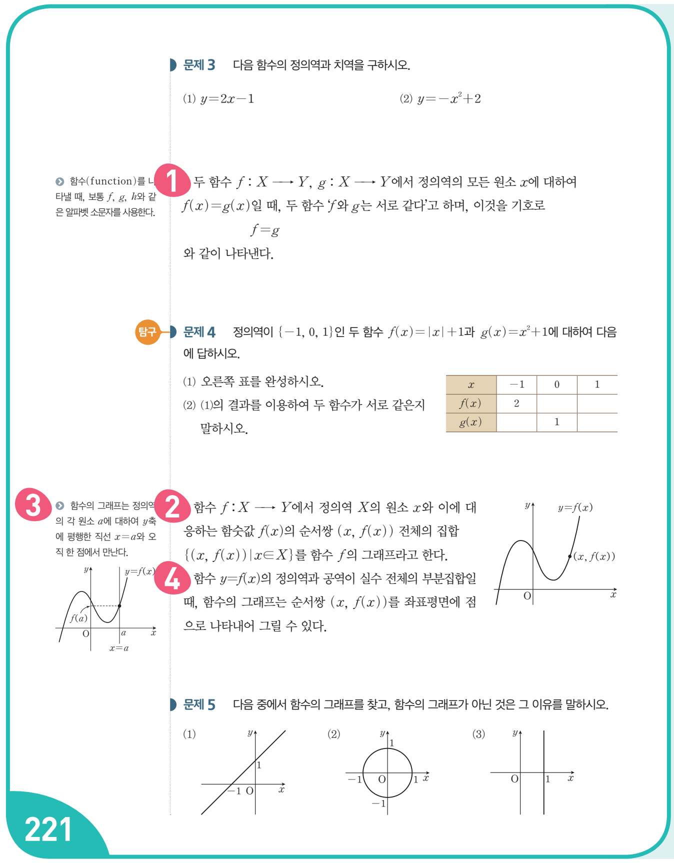
내용 연구

1. 두 함수가 서로 같으려면 두 함수의 정의역이 같고, 정의역의 모든 원소 x에 대한 두 함수의 함숫값이 서로 같아야 함을 알게 한다.
   | 오개념 바로잡기 | **문제 4**에서와 같이 다른 식으로 표현된 두 함수가 정의역에 따라 같은 함수가 될 수 있고, 식이 같은 함수라도 정의역 또는 공역에 따라 다른 함수가 될 수 있다.

2. 집합 X에서 Y로의 함수의 그래프는 좌표평면에서 집합 $\{(x,\ f(x))\,|\,x\in X\}$로 나타나는데 이 집합은 집합 $\{(x,\ y)\,|\,x\in X,\ y\in Y\}$의 부분집합임을 이해하게 한다.

3. 일반적으로 y축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 점이 2개 이상이면 그 그래프는 함수의 그래프가 아님을 이해하게 한다.

4. 이 단원에서는 정의역이 실수 전체의 집합인 함수를 주로 다루므로 집합 $\{(x,\ f(x))\,|\,x\in X\}$의 원소들을 모두 좌표평면에 나타낼 수 있고, 이는 곡선이나 직선으로 나타나는 함수의 기하학적 표현이다.
   하지만 함수의 그래프가 항상 곡선이나 직선으로 나타나는 것은 아니다. 이를테면 함수
   $$y=\begin{cases} 0 & (x\text{는 유리수}) \\ 1 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$
   과 같이 그 그래프가 곡선이나 직선으로 나타나지 않는 함수도 있다.



▶ **문제 3** 다음 함수의 정의역과 치역을 구하시오.

(1) $y=2x-1$ (2) $y=-x^2+2$

함수(function)를 나타낼 때, 보통 f, g, h와 같은 알파벳 소문자를 사용한다.

1 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: X \longrightarrow Y$에서 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$일 때, 두 함수 'f와 g는 서로 같다'고 하며, 이것을 기호로

$$f=g$$

와 같이 나타낸다.

탐구 ▶ **문제 4** 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x)=|x|+1$과 $g(x)=x^2+1$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 오른쪽 표를 완성하시오.
(2) (1)의 결과를 이용하여 두 함수가 서로 같은지 말하시오.

x	-1	0	1
$f(x)$	2		
$g(x)$		1	

3 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.

2 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$ 전체의 집합 $\{(x,\ f(x))\,|\,x\in X\}$를 함수 f의 그래프라고 한다.

4 함수 $y=f(x)$의 정의역과 공역이 실수 전체의 부분집합일 때, 함수의 그래프는 순서쌍 $(x,\ f(x))$를 좌표평면에 점으로 나타내어 그릴 수 있다.

▶ **문제 5** 다음 중에서 함수의 그래프를 찾고, 함수의 그래프가 아닌 것은 그 이유를 말하시오.

| 풀이 | (1)

x	-1	0	1
$f(x)$	2	1	2
$g(x)$	2	1	2

(2) $f(-1)=g(-1)$, $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$
즉, 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이므로 두 함수 f와 g는 서로 같다.

답 풀이 참조

문제 풀이

문제 3

| 주안점 | 함수의 정의역과 치역을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 정의역과 치역은 모두 실수 전체의 집합이다.
(2) 정의역은 $\{x\,|\,x\text{는 실수}\}$이고,
치역은 $\{y\,|\,y\le 2\text{인 실수}\}$이다.

답 풀이 참조

문제 4

| 주안점 | 두 함수 f와 g가 서로 같다는 것은 f와 g의 정의역이 같고, 정의역의 모든 원소에 대한 두 함수의 함숫값이 같다는 것을 이용하여 $f=g$임을 확인하게 한다.

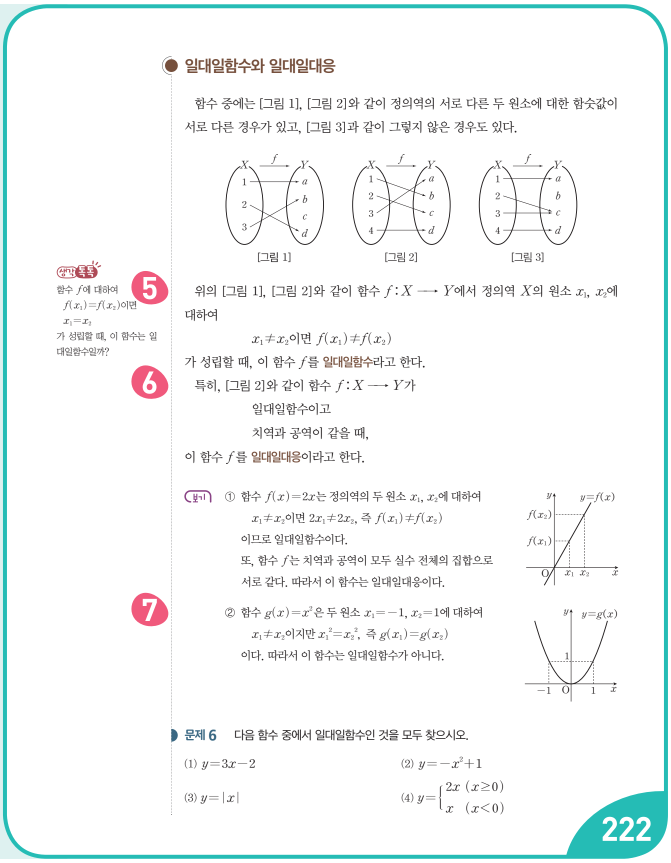
문제 5

| 주안점 | 함수의 그래프를 찾을 수 있게 하고, 함수의 그래프가 아닌 것은 그 이유를 설명할 수 있게 한다.

| 풀이 1 | 함수의 그래프인 것은 (1)이다.
(2)는 정의역의 원소 0에 대응하는 y의 값이 1과 -1의 두 개이고, (3)은 정의역의 원소 1에 대응하는 y의 값이 무수히 많으므로 함수의 그래프가 아니다.

답 풀이 참조

| 풀이 2 | (2)와 (3)은 정의역의 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 만나는 점의 개수가 2 이상인 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.



● 일대일함수와 일대일대응

함수 중에는 [그림 1], [그림 2]와 같이 정의역의 서로 다른 두 원소에 대한 함숫값이 서로 다른 경우가 있고, [그림 3]과 같이 그렇지 않은 경우도 있다.

[그림 1] [그림 2] [그림 3]

생각톡톡 함수 f에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$가 성립할 때, 이 함수는 일대일함수일까?

5 위의 [그림 1], [그림 2]와 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

가 성립할 때, 이 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

6 특히, [그림 2]와 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$가

일대일함수이고

치역과 공역이 같을 때,

이 함수 f를 **일대일대응**이라고 한다.

보기 ① 함수 $f(x)=2x$는 정의역의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $2x_1 \neq 2x_2$, 즉 $f(x_1) \neq f(x_2)$

이므로 일대일함수이다.

또, 함수 f는 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합으로 서로 같다. 따라서 이 함수는 일대일대응이다.

7 ② 함수 $g(x)=x^2$은 두 원소 $x_1=-1$, $x_2=1$에 대하여

$x_1 \neq x_2$이지만 $x_1^2=x_2^2$, 즉 $g(x_1)=g(x_2)$

이다. 따라서 이 함수는 일대일함수가 아니다.

문제 6 다음 함수 중에서 일대일함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) $y=3x-2$ (2) $y=-x^2+1$

(3) $y=|x|$ (4) $y=\begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$

222

● 일대일함수와 일대일대응

내용 연구

5 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

일 때, 함수 f를 일대일함수 또는 단사함수(injective function)라고 한다.

한편 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 $\{f(x) | x \in X\}=Y$일 때, 즉 함수의 치역과 공역이 같을 때, 함수 f를 X에서 Y 위로의 함수(onto function) 또는 전사함수(surjective function)라고 한다.

생각톡톡 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.'의 대우는 '$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.'이므로 이 함수는 일대일함수이다.

6 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일함수이고, 즉 단사함수이고 동시에 전사함수일 때, 함수 f를 일대일대응 또는 전단사함수(bijective function)라고 한다.

7 함수 $g(x)=x^2$에 대하여 정의역이 $\{x | x \geq 0\}$이면 g는 일대일함수이고, 정의역이 $\{x | x$는 실수 전체$\}$이면 g는 일대일함수가 아니다. 또, 정의역이 $\{x | x \geq 0\}$인 함수 $g(x)=x^2$에 대하여 공역이 $\{y | y \geq 0\}$이면 g는 일대일대응이고, 공역이 $\{y | y$는 실수 전체$\}$이면 g는 일대일대응이 아니다. 즉, 같은 함수일지라도 정의역, 공역에 따라 일대일함수 또는 일대일대응이 되기도 하고 그렇지 않기도 함을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 6

| 주안점 | 일대일함수인 것을 찾을 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $f(x)=3x-2$라 하면

정의역의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $3x_1-2 \neq 3x_2-2$, 즉 $f(x_1) \neq f(x_2)$

이므로 일대일함수이다.

(2) $f(x)=-x^2+1$이라 하면

정의역의 두 원소 $x_1=-1$, $x_2=1$에 대하여

$x_1 \neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)=0$

이므로 일대일함수가 아니다.

(3) $f(x)=|x|$라 하면

정의역의 두 원소 $x_1=-1$, $x_2=1$에 대하여

$x_1 \neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)=1$

이므로 일대일함수가 아니다.

(4) $f(x)=\begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$라 하면

정의역 $\{x | x \geq 0\}$의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $2x_1 \neq 2x_2$

또, 정의역 $\{x | x<0\}$의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $x_1 \neq x_2$

즉, $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 일대일함수이다. 답 (1), (4)

지도 자료

일차함수와 선형함수

일대일대응의 대표적인 경우인 일차함수는 $f(x)=ax+b$ $(a \neq 0)$와 같이 차수가 1인 다항함수를 뜻하며, 그 그래프는 직선으로 나타내어진다.

특히, 원점을 지나는 직선을 그래프로 갖는 일차함수 $f(x)=ax$를 선형함수(線型函數, linear function)라 하는데, 일반적으로 다음과 같은 성질을 갖는다.

$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

$f(ax)=af(x)$ (a는 실수)

● 항등함수와 상수함수

내용 연구

❶ 함수 $f: X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신이 대응할 때, 즉 $f(x)=x$로 정의되는 함수를 항등함수라고 한다.

❷ 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 공역의 단 하나의 원소만 대응하는 함수, 즉 Y의 특정한 원소 c에 대하여 $f(x)=c$인 함수를 상수함수라고 한다. 상수함수는 일대일함수도 아니고 일대일대응도 아니다.

문제 풀이

문제 7

| 주안점 | 항등함수와 상수함수의 그래프를 찾을 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 원점과 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선, 즉 $y=x$의 그래프이므로 항등함수의 그래프이다.

(3) 점 $(0,\ 1)$을 지나고 x축에 평행한 직선, 즉 $y=1$의 그래프이므로 상수함수의 그래프이다.

답 항등함수: (1), 상수함수: (3)

읽기 자료

1. 관계로 함수를 도입한 라이프니츠

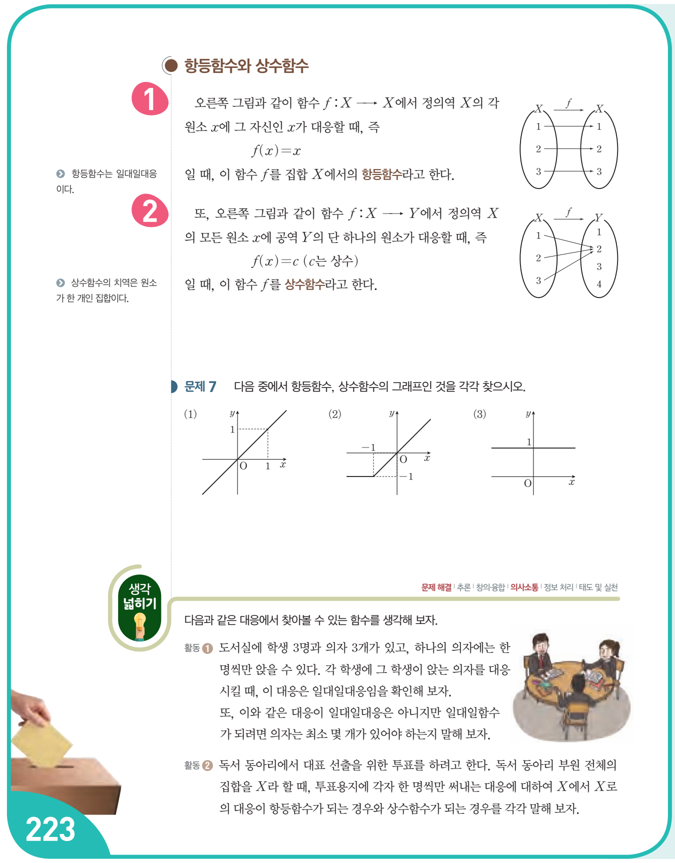
함수(funcion)라는 용어는 독일의 수학자 라이프니츠가 17세기에 처음으로 도입하였다. 그는 곡선과 관련된 모든 양, 이를테면 곡선 위의 점의 좌표, 접선의 기울기와 같은 양을 나타내기 위한 개념으로 함수를 도입했으며 변수 x의 값의 변화에 따라 다른 변수 y가 정해지면 y를 x의 함수라고 정의하였다.

라이프니츠

2. 대응으로 함수를 정의한 디리클레

디리클레는 두 변수 x, y에 대하여 x의 각 값에 따라 y의 값이 정해지는 대응만 있다면 y를 x의 함수라고 정의하여 두 변수 사이에 수식이나 법칙의 관계가 없어도 함수가 된다고 생각함으로써 함수의 의미를 확대하였다.

디리클레



● 항등함수와 상수함수

❶ 오른쪽 그림과 같이 함수 $f: X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응할 때, 즉

$$f(x)=x$$

일 때, 이 함수 f를 집합 X에서의 항등함수라고 한다.

› 항등함수는 일대일대응이다.

❷ 또, 오른쪽 그림과 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소가 대응할 때, 즉

$$f(x)=c\ (c\text{는 상수})$$

일 때, 이 함수 f를 상수함수라고 한다.

› 상수함수의 치역은 원소가 한 개인 집합이다.

문제 7 다음 중에서 항등함수, 상수함수의 그래프인 것을 각각 찾으시오.

(1) (2) (3)

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음과 같은 대응에서 찾아볼 수 있는 함수를 생각해 보자.

활동 ❶ 도서실에 학생 3명과 의자 3개가 있고, 하나의 의자에는 한 명씩만 앉을 수 있다. 각 학생에 그 학생이 앉는 의자를 대응시킬 때, 이 대응은 일대일대응임을 확인해 보자.
또, 이와 같은 대응이 일대일대응은 아니지만 일대일함수가 되려면 의자는 최소 몇 개가 있어야 하는지 말해 보자.

활동 ❷ 독서 동아리에서 대표 선출을 위한 투표를 하려고 한다. 독서 동아리 부원 전체의 집합을 X라 할 때, 투표용지에 각자 한 명씩만 써내는 대응에 대하여 X에서 X로의 대응이 항등함수가 되는 경우와 상수함수가 되는 경우를 각각 말해 보자.

223

생각 넓히기

| 지도 방향 | 함수가 일대일함수일 조건과 일대일대응일 조건을 이용하여 우리 주변에서 항등함수 또는 상수함수가 되는 경우를 말해 보게 한다.

| 풀이 | ❶ 학생의 집합을 X, 의자의 집합을 Y라 하고, X에서 Y로의 함수를 f라 하자.

하나의 의자에는 한 명씩만 앉으므로 정의역 X의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립한다. 따라서 함수 f는 일대일함수이다. 또, 세 명이 각자 세 개의 의자에 앉으므로 치역과 공역이 같다.

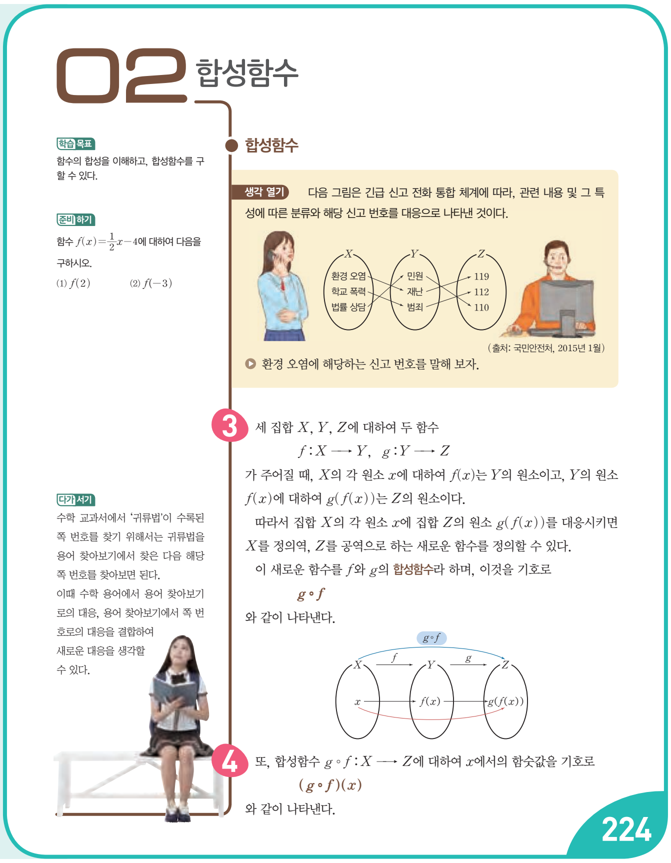
이상에서 함수 f는 일대일대응이다.

한편, 학생 수보다 의자 개수가 더 많으면 학생들이 앉고 남은 의자가 존재하므로 이 경우에는 일대일함수는 되지만 일대일대응은 아니다.

따라서 의자는 최소 4개가 있어야 한다.

❷ 독서 동아리 부원 전체가 투표용지에 각자 자기 자신의 이름을 써내는 경우에 항등함수가 된다. 또, 투표용지에 모두 동일한 한 명의 이름을 써내는 경우에 상수함수가 된다.

답 풀이 참조



02 합성함수

학습 목표
함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.

준비하기
함수 $f(x)=\frac{1}{2}x-4$에 대하여 다음을 구하시오.
(1) $f(2)$ (2) $f(-3)$

합성함수

생각 열기 다음 그림은 긴급 신고 전화 통합 체계에 따라, 관련 내용 및 그 특성에 따른 분류와 해당 신고 번호를 대응으로 나타낸 것이다.

(출처: 국민안전처, 2015년 1월)

▶ 환경 오염에 해당하는 신고 번호를 말해 보자.

3 세 집합 X, Y, Z에 대하여 두 함수

$$f:X\longrightarrow Y,\quad g:Y\longrightarrow Z$$

가 주어질 때, X의 각 원소 x에 대하여 $f(x)$는 Y의 원소이고, Y의 원소 $f(x)$에 대하여 $g(f(x))$는 Z의 원소이다.

따라서 집합 X의 각 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.

이 새로운 함수를 f와 g의 **합성함수**라 하며, 이것을 기호로

$$g\circ f$$

와 같이 나타낸다.

4 또, 합성함수 $g\circ f:X\longrightarrow Z$에 대하여 x에서의 함숫값을 기호로

$$(g\circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다.

다가서기
수학 교과서에서 '귀류법'이 수록된 쪽 번호를 찾기 위해서는 귀류법을 용어 찾아보기에서 찾은 다음 해당 쪽 번호를 찾아보면 된다.
이때 수학 용어에서 용어 찾아보기로의 대응, 용어 찾아보기에서 쪽 번호로의 대응을 결합하여 새로운 대응을 생각할 수 있다.

224

소단원 지도 개관

지도 목표

① 함수의 합성을 이해하게 한다.
② 주어진 함수들로부터 합성함수를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 합성함수는 이차 이하의 다항함수를 통하여 이해하게 한다.
② 합성함수 $g\circ f$에서 f의 치역이 g의 정의역에 포함되어야 함을 이해한다.
③ 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않지만 결합법칙은 성립함을 알게 하고, 예를 통하여 이를 확인하게 한다.

용어와 기호

- 합성함수(合成函數, composite function)
- $g\circ f$
- $(g\circ f)(x)$
- $y=g(f(x))$

준비하기

|주안점| 함숫값을 구할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $f(2)=\frac{1}{2}\times 2-4=-3$

(2) $f(-3)=\frac{1}{2}\times(-3)-4=-\frac{11}{2}$

답 (1) -3 (2) $-\frac{11}{2}$

● 합성함수

평가 기준

상	함수의 합성이 정의될 조건을 설명하고 합성함수를 구할 수 있다.
중	간단한 두 함수의 합성함수를 구할 수 있다.
하	합성함수의 함숫값을 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 긴급 신고 전화 통합 체계에 따라, 관련 내용과 신고 번호를 대응시켜보는 실생활의 예를 통해 합성함수의 개념을 알게 한다.

▶ 환경 오염은 재난으로 분류되고, 재난 관련 신고 번호는 119이므로 환경 오염 관련 내용에 해당하는 신고 번호는 119이다.

내용 연구

3 세 집합 X, Y, Z에 대하여 두 함수

$$f:X\longrightarrow Y,\quad g:Y\longrightarrow Z$$

를 합성한 함수를 기호로

$$g\circ f:X\longrightarrow Z$$

와 같이 나타내고, 합성함수의 정의역과 공역을 알게 한다. 이때 합성함수 $g\circ f$의 정의역과 함수 f의 정의역이 일치하고, 합성함수 $g\circ f$의 공역과 함수 g의 공역이 일치함을 이해하도록 한다.

4 두 함수 f, g를 합성할 때, 함수 f의 함숫값 $f(x)$의 함수 g의 함숫값이 $g(f(x))$이므로, 합성함수의 기호도 g를 먼저 쓰고 f를 나중에 써서

$$g\circ f$$

와 같이 나타내어

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

임을 설명한다.

1 합성함수 $g \circ f$가 정의되려면 f의 치역이 g의 정의역에 포함되어야 한다.

이때 X의 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))$$

이다. 따라서 f와 g의 합성함수를

$$y=g(f(x))$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

합성함수

두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$의 합성함수는

$$g \circ f: X \longrightarrow Z, \quad (g \circ f)(x)=g(f(x))$$

예제 1 두 함수 $f(x)=2x-1$과 $g(x)=3x+2$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$

일반적으로 두 함수 f, g에 대하여 $g \circ f \neq f \circ g$ 이다. 즉, 함수의 합성에 대한 교환법칙은 성립하지 않는다.

풀이 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이므로 합성함수 $g \circ f$와 $f \circ g$가 각각 정의된다.

(1) $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$
$=3(2x-1)+2=6x-1$

(2) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+2)$
$=2(3x+2)-1=6x+3$

답 (1) $(g \circ f)(x)=6x-1$ (2) $(f \circ g)(x)=6x+3$

문제 1 두 함수 $f(x)=x+2$와 $g(x)=-x^2$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$
(3) $(f \circ f)(x)$ (4) $(g \circ g)(x)$

문제 2 세 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=3x-1$, $h(x)=x^2-2$에 대하여

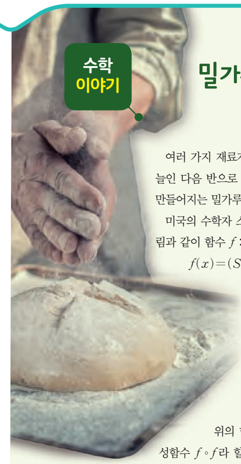
$$((f \circ g) \circ h)(x)=(f \circ (g \circ h))(x)$$

가 성립함을 확인하시오.

225

수학 이야기

밀가루 반죽의 원리를 설명하는 합성함수

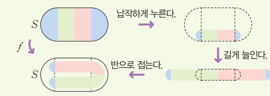


여러 가지 재료가 섞인 빵이나 면을 만들 때 원기둥 모양으로 만든 반죽을 납작하게 눌러서 길게 늘인 다음 반으로 접는 동작을 여러 번 반복하면 재료를 골고루 섞을 수 있다. 이와 같은 과정으로 만들어지는 밀가루 반죽의 원리를 합성함수를 이용하여 다음과 같이 설명할 수 있다.

미국의 수학자 스메일(Smale, S., 1930～)은, 원기둥 모양의 밀가루 반죽을 S라 할 때 다음 그림과 같이 함수 $f: S \longrightarrow S$를

$f(x)=$(S를 납작하게 눌러서 길게 늘인 다음 반으로 접는 동작에 따라 정해지는 x의 위치)

로 정의하고, 이 함수를 '말편자함수(horseshoe function)'라 이름 붙였다.



(단, 점선은 전 단계의 모양을 나타낸다.)

위의 함수에서 정의한 동작을 두 번 반복하는 것은 함수 f에 대하여 자기 자신과의 합성함수 $f \circ f$라 할 수 있는데, 이것을 간단히 f^2으로 나타내기로 한다. 그러면 함수 f가 정의하는 동작을 반복하여 반죽하는 것은 함수 f를 f^2, f^3, f^4, f^5, … 와 같이 계속 합성한다는 뜻이다.

따라서 이러한 함수의 합성을 여러 번 반복하면 재료가 골고루 섞인 밀가루 반죽이 만들어진다.

다음은 세 가지 색의 점토를 함께 반죽할 때 색깔이 섞이는 과정을 통해 말편자함수를 여러 번 합성하는 원리를 보여 주는 그림이다.

이와 같이 함수 f 자신을 반복적으로 합성한 함수 f^n의 성질은 우리의 생각과 달리 불규칙하게 변화하기 때문에, 이를 이용하면 일상생활에서 불규칙한 변화나 반복적으로 발생하는 현상의 원리를 설명할 수 있다.

(출처: Shub, M., 『What is a Horseshoe?』)

226

내용 연구

1 함수 f의 공역과 함수 g의 정의역이 같을 때뿐만 아니라 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합일 때도 합성함수 $g \circ f$를 정의할 수 있음을 알게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 합성함수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)$
$=-(x+2)^2=-x^2-4x-4$

(2) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(-x^2)=-x^2+2$

(3) $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x+2)$
$=(x+2)+2=x+4$

(4) $(g \circ g)(x)=g(g(x))=g(-x^2)$
$=-(-x^2)^2=-x^4$

답 풀이 참조

문제 2

|주안점| 함수의 합성에서 결합법칙이 성립함을 확인하게 한다.

|풀이| (i) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-1)$
$=(3x-1)+1=3x$

이므로

$((f \circ g) \circ h)(x)=(f \circ g)(h(x))$
$=(f \circ g)(x^2-2)$
$=3(x^2-2)=3x^2-6$

(ii) $(g \circ h)(x)=g(h(x))=g(x^2-2)$
$=3(x^2-2)-1=3x^2-7$

이므로

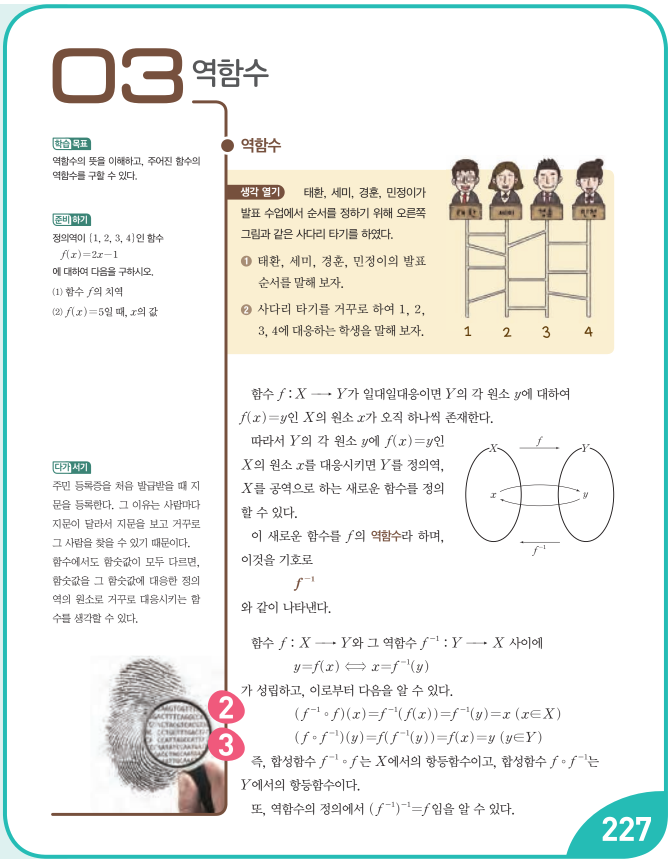
$(f \circ (g \circ h))(x)=f((g \circ h)(x))=f(3x^2-7)$
$=(3x^2-7)+1=3x^2-6$

따라서 $((f \circ g) \circ h)(x)=(f \circ (g \circ h))(x)$

답 풀이 참조

수학 이야기 ▸ **밀가루 반죽의 원리를 설명하는 합성함수**

함수 f 자신을 반복적으로 합성한 함수 f^n의 성질은 우리의 직관과 달리 매우 불규칙하게 변화하는데, 이와 같은 성질에 관한 이론을 혼돈 이론(chaos theory)이라 하며, 반복적으로 합성한 함수 f^n의 자취를 나타낸 그림을 프랙털(fractal)이라고 한다.



03 역함수

학습 목표
역함수의 뜻을 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.

준비하기
정의역이 $\{1, 2, 3, 4\}$인 함수
$f(x)=2x-1$
에 대하여 다음을 구하시오.
(1) 함수 f의 치역
(2) $f(x)=5$일 때, x의 값

● 역함수

생각 열기 태환, 세미, 경훈, 민정이가 발표 수업에서 순서를 정하기 위해 오른쪽 그림과 같은 사다리 타기를 하였다.
❶ 태환, 세미, 경훈, 민정이의 발표 순서를 말해 보자.
❷ 사다리 타기를 거꾸로 하여 1, 2, 3, 4에 대응하는 학생을 말해 보자.

1 2 3 4

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 X의 원소 x가 오직 하나씩 존재한다.

따라서 Y의 각 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.

이 새로운 함수를 f의 **역함수**라 하며, 이것을 기호로

$$f^{-1}$$

와 같이 나타낸다.

X f Y x y f^{-1}

다가서기
주민 등록증을 처음 발급받을 때 지문을 등록한다. 그 이유는 사람마다 지문이 달라서 지문을 보고 거꾸로 그 사람을 찾을 수 있기 때문이다. 함수에서도 함숫값이 모두 다르면, 함숫값을 그 함숫값에 대응한 정의역의 원소로 거꾸로 대응시키는 함수를 생각할 수 있다.

함수 $f: X \longrightarrow Y$와 그 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ 사이에

$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$$

가 성립하고, 이로부터 다음을 알 수 있다.

2 $$(f^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x \ (x \in X)$$
3 $$(f \circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y \ (y \in Y)$$

즉, 합성함수 $f^{-1} \circ f$는 X에서의 항등함수이고, 합성함수 $f \circ f^{-1}$는 Y에서의 항등함수이다.

또, 역함수의 정의에서 $(f^{-1})^{-1}=f$임을 알 수 있다.

227

소단원 지도 개관

지도 목표

① 역함수의 뜻을 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.
② 역함수의 그래프의 성질을 이해하게 한다.
③ 역함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 함수가 일대일대응이어야 역함수가 존재한다는 것을 간단한 대응의 예를 통하여 이해하게 한다.
② 역함수는 이차 이하의 다항함수를 통하여 이해하게 한다.
③ 함수의 대응 관계와 역함수의 대응 관계를 수식이나 그래프를 통하여 명확히 이해하도록 지도한다.
④ 함수 $y=f(x)$가 일대일대응일 때, 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 $y=f(x)$를 x에 대하여 풀고 x와 y를 서로 바꾼 것임을 알게 한다.
⑤ 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭임을 이해하게 한다.

용어와 기호

- 역함수(逆函數, inverse function)
- f^{-1}
- $y=f^{-1}(x)$

준비하기

|주안점| 함수의 치역과 함숫값에 대응하는 정의역의 원소를 구할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) $f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=7$
이므로 함수 f의 치역은 $\{1, 3, 5, 7\}$
(2) $f(x)=2x-1=5$에서 $x=3$

답 (1) $\{1, 3, 5, 7\}$ (2) 3

● 역함수

평가 기준

상	역함수의 존재 조건을 설명하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.
중	간단한 함수의 역함수를 구할 수 있다.
하	역함수의 함숫값을 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 함수와 역함수의 관계를 사다리 타기를 이용한 대응의 예를 통해 이해하게 한다.

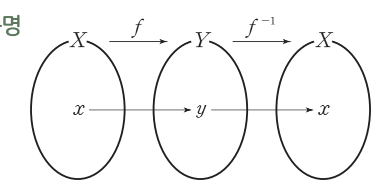
❶ 태환은 1번, 세미는 3번, 경훈은 4번, 민정은 2번이다.

❷ 1에 태환, 2에 민정, 3에 세미, 4에 경훈이 대응한다.

내용 연구

2 $(f^{-1} \circ f)(x)=x\,(x \in X)$를 증명해 보자.

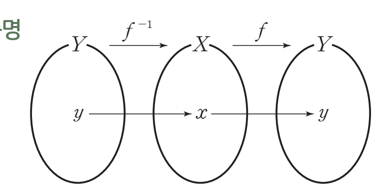
증명



$$(f^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$$

3 $(f \circ f^{-1})(y)=y\,(y \in Y)$를 증명해 보자.

증명



$$(f \circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y$$

내용 연구

❶ 공역이 명확하게 제시되어 있지 않은 일대일함수의 경우 치역과 공역이 일치하는 것으로 생각하여 이 함수를 일대일대응으로 본다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 역함수의 정의와 성질을 이해하여 함숫값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $f^{-1}(-4)=a$라 하면 $f(a)=-4$이므로

$3a-1=-4,\quad a=-1$

따라서 $\quad f^{-1}(-4)=-1$

(2) $(f^{-1}\circ f)(-3)=-3$

(3) $(f\circ f^{-1})(1)=1$

(4) $(f^{-1})^{-1}(2)=f(2)=3\times2-1=5$

답 (1) -1 (2) -3 (3) 1 (4) 5

생각 톡톡 함수 f의 치역은 역함수 f^{-1}의 정의역과 같고, 함수 f의 정의역은 역함수 f^{-1}의 치역과 같다.

문제 2

| 주안점 | 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y=x+5$를 x에 대하여 풀면 $\quad x=y-5$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $\quad y=x-5$

(2) $y=-\dfrac{1}{3}x+4$를 x에 대하여 풀면 $\quad x=-3y+12$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-3x+12$

답 (1) $y=x-5$ (2) $y=-3x+12$

문제 3

| 주안점 | 합성함수의 역함수에 관한 성질

$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=(g\circ f)^{-1}(x)$

를 이용하여 함숫값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $y=3x-5$를 x에 대하여 풀면 $\quad x=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{5}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$

즉, $(g\circ f)^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$이므로

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=(g\circ f)^{-1}(3)$$
$$=\frac{1}{3}\times3+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$$

답 $\dfrac{8}{3}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

역함수와 그 성질

함수 $f:X\longrightarrow Y$가 일대일대응일 때,

❶ f의 역함수 $f^{-1}:Y\longrightarrow X$가 존재한다.

❷ $y=f(x)\iff x=f^{-1}(y)$

❸ $(f^{-1}\circ f)(x)=x\ (x\in X),\quad (f\circ f^{-1})(y)=y\ (y\in Y)$

❹ $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)\ (x\in X)$

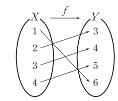
1 **참고** 일대일함수는 치역을 공역으로 생각하여 일대일대응으로 볼 수 있으므로 그 역함수를 생각할 수 있다.

보기 오른쪽 그림에서 함수 f는 일대일대응이므로 역함수 f^{-1}가 존재한다. 이때

① $f(3)=4$이므로 $\quad f^{-1}(4)=3$

② $(f^{-1}\circ f)(2)=2,\quad (f\circ f^{-1})(5)=5$

③ $(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=6$



문제 1 함수 $f(x)=3x-1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $f^{-1}(-4)$ (2) $(f^{-1}\circ f)(-3)$

(3) $(f\circ f^{-1})(1)$ (4) $(f^{-1})^{-1}(2)$

생각 톡톡 함수 f의 정의역과 역함수 f^{-1}의 치역은 같을까?

함수를 나타낼 때는 보통 정의역의 원소를 x, 치역의 원소를 y로 나타내므로 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$에서도 x와 y를 서로 바꾸어

$$y=f^{-1}(x)$$

와 같이 나타낸다.

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

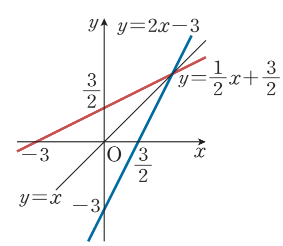
$$y=f(x)\xrightarrow[x\text{에 대하여 푼다.}]{}x=f^{-1}(y)\xrightarrow[x\text{와 }y\text{를 서로 바꾼다.}]{}y=f^{-1}(x)$$

228

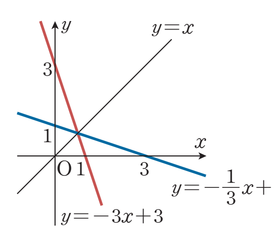
문제 4

| 주안점 | 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알게 한다.

| 풀이 | (1) 함수 $y=2x-3$과 그 역함수 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



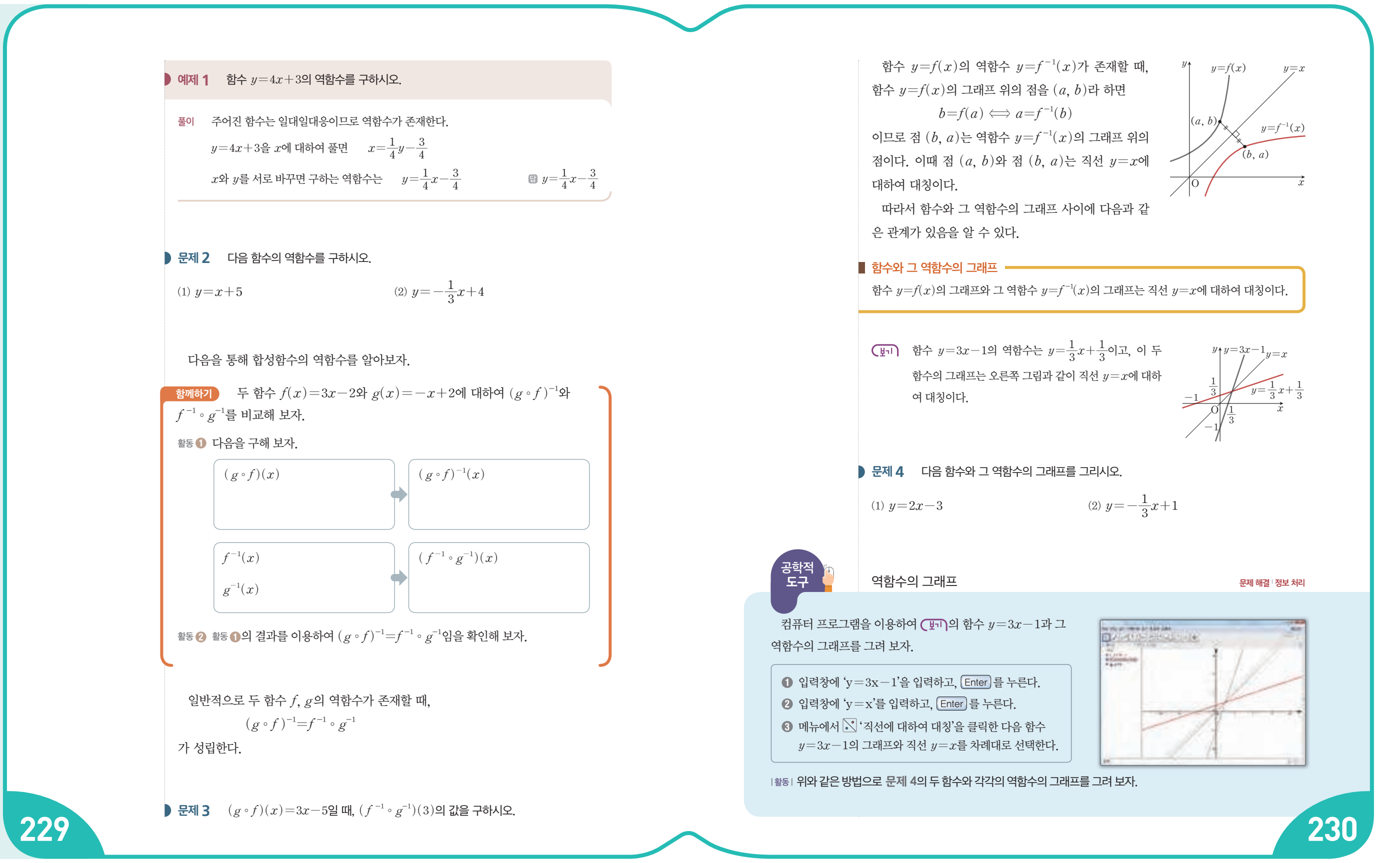
(2) 함수 $y=-\dfrac{1}{3}x+1$과 그 역함수 $y=-3x+3$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

함께하기

| 지도 방향 | 합성함수의 역함수와 역함수의 합성함수를 비교하여 합성함수의 역함수에 관한 성질을 이해하게 한다.



예제 1 함수 $y=4x+3$의 역함수를 구하시오.

풀이 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=4x+3$을 x에 대하여 풀면 $x=\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$ 답 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

문제 2 다음 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $y=x+5$ (2) $y=-\frac{1}{3}x+4$

다음을 통해 합성함수의 역함수를 알아보자.

함께하기 두 함수 $f(x)=3x-2$와 $g(x)=-x+2$에 대하여 $(g\circ f)^{-1}$와 $f^{-1}\circ g^{-1}$를 비교해 보자.

활동 ❶ 다음을 구해 보자.

$(g\circ f)(x)$ → $(g\circ f)^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ → $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

활동 ❷ 활동 ❶의 결과를 이용하여 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$임을 확인해 보자.

일반적으로 두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때,

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

가 성립한다.

문제 3 $(g\circ f)(x)=3x-5$일 때, $(f^{-1}\circ g^{-1})(3)$의 값을 구하시오.

229

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점을 (a, b)라 하면

$$b=f(a) \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$$

이므로 점 (b, a)는 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이다. 이때 점 (a, b)와 점 (b, a)는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수와 그 역함수의 그래프 사이에 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.

함수와 그 역함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

보기 함수 $y=3x-1$의 역함수는 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$이고, 이 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

문제 4 다음 함수와 그 역함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=2x-3$ (2) $y=-\frac{1}{3}x+1$

공학적 도구 역함수의 그래프 문제 해결 | 정보 처리

컴퓨터 프로그램을 이용하여 보기의 함수 $y=3x-1$과 그 역함수의 그래프를 그려 보자.

❶ 입력창에 'y=3x−1'을 입력하고, Enter 를 누른다.
❷ 입력창에 'y=x'를 입력하고, Enter 를 누른다.
❸ 메뉴에서 '직선에 대하여 대칭'을 클릭한 다음 함수 $y=3x-1$의 그래프와 직선 $y=x$를 차례대로 선택한다.

|활동| 위와 같은 방법으로 문제 4의 두 함수와 각각의 역함수의 그래프를 그려 보자.

230

|풀이| ❶ (i) $(g\circ f)(x)=g(3x-2)=-3x+4$

$y=-3x+4$를 x에 대하여 풀면 $x=-\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

따라서 $(g\circ f)^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

(ii) $y=3x-2$를 x에 대하여 풀면 $x=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

또, $y=-x+2$를 x에 대하여 풀면 $x=-y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-x+2$

따라서 $g^{-1}(x)=-x+2$

$$\begin{aligned}&(f^{-1}\circ g^{-1})(x)\\&=f^{-1}(g^{-1}(x))=f^{-1}(-x+2)\\&=\frac{1}{3}(-x+2)+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

❷ ❶의 (i)과 (ii)의 결과를 비교하면

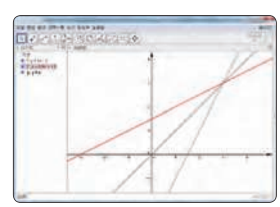
$(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

따라서 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 답 풀이 참조

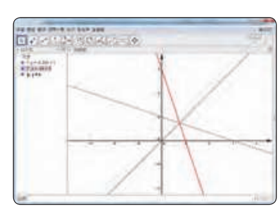
공학적 도구

|지도 방향| 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 컴퓨터 프로그램으로 함수와 그 역함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

|풀이| (1) 입력창에 'y=2x−3'과 'y=x'를 각각 입력하고 Enter 를 누른 다음 메뉴에서 '직선에 대하여 대칭'을 클릭한 후 함수 $y=2x-3$의 그래프와 직선 $y=x$를 차례대로 선택하면, 함수 $y=2x-3$의 역함수의 그래프가 그려진다.



(2) (1)에서와 같은 방법으로 함수 $y=-\frac{1}{3}x+1$의 역함수의 그래프를 그리면 오른쪽과 같다.



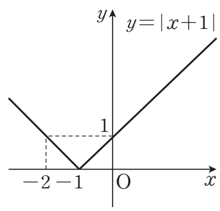
답 풀이 참조

탐구&융합 ─ 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

| 지도 방향 | 그래프의 대칭성을 설명해 보고, 그래프의 대칭성을 이용하여 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

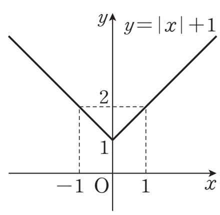
| 풀이 | **1** (1) $y=|x+1|=\begin{cases} x+1 & (x\geq -1) \\ -x-1 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$y=x+1$의 그래프를 그려 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.



(2) $y=|x|+1=\begin{cases} x+1 & (x\geq 0) \\ -x+1 & (x<0) \end{cases}$이므로

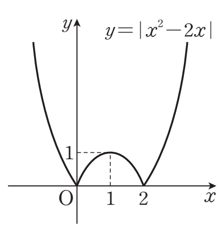
$x\geq 0$에서 $y=x+1$의 그래프를 그리고, 이 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프를 그린다.



답 풀이 참조

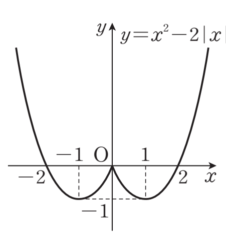
2 (1) $y=|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ -x^2+2x & (0<x<2) \end{cases}$

이므로 $y=x^2-2x$의 그래프를 그려 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

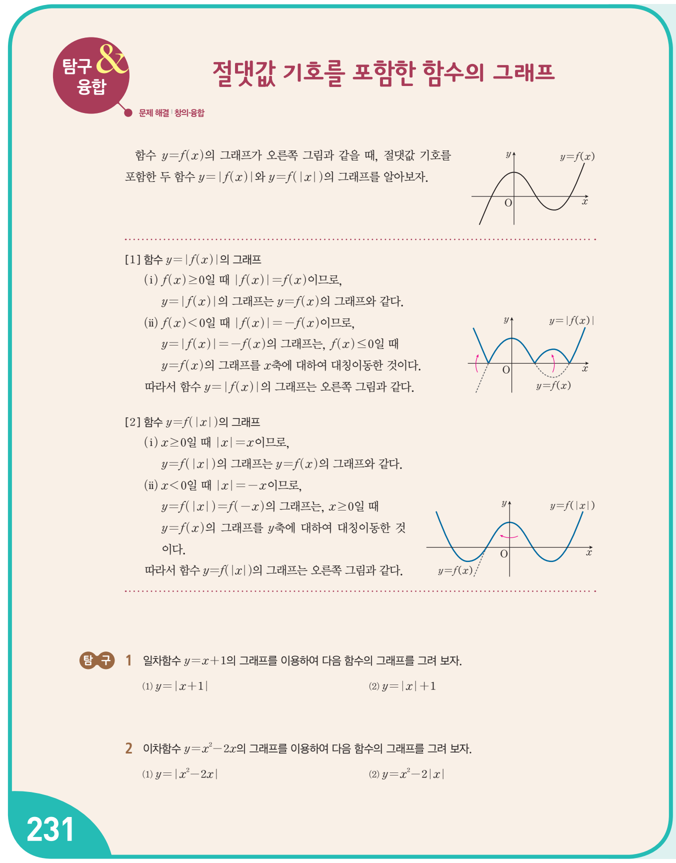


(2) $y=x^2-2|x|=\begin{cases} x^2-2x & (x\geq 0) \\ x^2+2x & (x<0) \end{cases}$이므로

$x\geq 0$에서 $y=x^2-2x$의 그래프를 그리고, 이 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프를 그린다.



답 풀이 참조



탐구&융합 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

문제 해결 | 창의·융합

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 절댓값 기호를 포함한 두 함수 $y=|f(x)|$와 $y=f(|x|)$의 그래프를 알아보자.

[1] 함수 $y=|f(x)|$의 그래프

(i) $f(x)\geq 0$일 때 $|f(x)|=f(x)$이므로,
$y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

(ii) $f(x)<0$일 때 $|f(x)|=-f(x)$이므로,
$y=|f(x)|=-f(x)$의 그래프는, $f(x)\leq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

[2] 함수 $y=f(|x|)$의 그래프

(i) $x\geq 0$일 때 $|x|=x$이므로,
$y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

(ii) $x<0$일 때 $|x|=-x$이므로,
$y=f(|x|)=f(-x)$의 그래프는, $x\geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

탐구 **1** 일차함수 $y=x+1$의 그래프를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그려 보자.

(1) $y=|x+1|$ (2) $y=|x|+1$

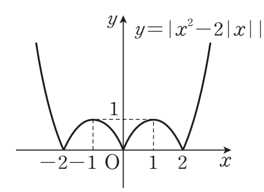
2 이차함수 $y=x^2-2x$의 그래프를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그려 보자.

(1) $y=|x^2-2x|$ (2) $y=x^2-2|x|$

231

| 참고 | $y=|x^2-2|x||$의 그래프

$y=x^2-2|x|$의 그래프를 그려 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.



중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 함수의 개념을 이해하고, 함수인 것을 찾을 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=2$

이므로 f는 X에서 Y로의 함수이다.

(2) $g(-1)=1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$

이므로 g는 X에서 Y로의 함수이다.

(3) $h(-1)=1$, $h(0)=2$, $h(1)=3$

그런데 $3\notin Y$이므로 h는 X에서 Y로의 함수가 아니다.

답 (1), (2)

V-1. 함수

중단원 마무리하기

함수

(1) 두 집합 X, Y에 대하여 X의 원소에 Y의 원소를 짝지어 주는 것을, 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 한다.

(2) 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 하며, 이것을 기호로

$$f : X \longrightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

(3) 함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

가 성립할 때, 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

(4) 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수를 **일대일대응**이라고 한다.

(5) 함수 $f : X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응할 때, 즉 $f(x)=x$일 때, 함수 f를 집합 X에서의 **항등함수**라고 한다.

(6) 함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소가 대응할 때, 즉 $f(x)=c$ (c는 상수)일 때, 함수 f를 **상수함수**라고 한다.

합성함수

두 함수 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$의 합성함수는

$g \circ f : X \longrightarrow Z$, $(g \circ f)(x)=g(f(x))$

역함수

(1) 함수 $f : X \longrightarrow Y$가 일대일대응일 때,

① f의 역함수 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$가 존재한다.

② $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$

③ $(f^{-1} \circ f)(x)=x$ $(x \in X)$

$(f \circ f^{-1})(y)=y$ $(y \in Y)$

④ $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ $(x \in X)$

(2) 두 함수 f, g의 역함수를 각각 f^{-1}, g^{-1}라 할 때,

$(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$

기본

01 두 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{0, 1, 2\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) $f(x)=x+1$

(2) $g(x)=x^2$

(3) $h(x)=|x+2|$

02 다음 **보기**에서 일대일대응, 항등함수, 상수함수를 각각 찾으시오.

보기

ㄱ. $y=-3$ ㄴ. $y=x$

ㄷ. $y=-3x+2$ ㄹ. $y=x^2-1$

03 두 함수 $f(x)=2x-3$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(g \circ f)(2)$ (2) $(g \circ g)(-1)$

(3) $(f \circ g)(x)$ (4) $(f \circ f)(x)$

04 함수 $f(x)=4x+7$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $f^{-1}(3)$ (2) $f^{-1}(x)$

232

02

|주안점| 일대일대응, 항등함수, 상수함수를 구별할 수 있게 한다.

|풀이| ㄱ. $y=-3$은 상수함수이다.

ㄴ. $f(x)=x$라 하면 공역과 치역이 모두 실수 전체의 집합으로 같고, 정의역의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

이므로 일대일대응이고 항등함수이다.

ㄷ. $f(x)=-3x+2$라 하면 공역과 치역이 모두 실수 전체의 집합으로 같고, 정의역의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $-3x_1+2 \neq -3x_2+2$,

즉 $f(x_1) \neq f(x_2)$

이므로 일대일대응이다.

ㄹ. $f(x)=x^2-1$이라 하면 정의역의 두 원소 $x_1=-1$, $x_2=1$에 대하여

$x_1 \neq x_2$이지만 $x_1^{\,2}-1=x_2^{\,2}-1=0$,

즉 $f(x_1)=f(x_2)$

이므로 일대일대응이 아니다.

답 일대일대응: ㄴ, ㄷ, 항등함수: ㄴ, 상수함수: ㄱ

03

|주안점| 합성함수의 함숫값과 합성함수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(g \circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=2$

(2) $(g \circ g)(-1)=g(g(-1))=g(2)=5$

(3) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)$

$=2(x^2+1)-3=2x^2-1$

(4) $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(2x-3)$

$=2(2x-3)-3=4x-9$

답 (1) 2 (2) 5

(3) $(f \circ g)(x)=2x^2-1$ (4) $(f \circ f)(x)=4x-9$

04

|주안점| 역함수의 함숫값과 역함수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$4a+7=3$, $4a=-4$, $a=-1$

따라서 $f^{-1}(3)=-1$

(2) $y=4x+7$을 x에 대하여 풀면 $x=\frac{1}{4}y-\frac{7}{4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$

답 (1) -1 (2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$

05

|주안점| 서로 같은 두 함수를 이용하여 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $f(-2)=g(-2)$, $f(2)=g(2)$에서

$7=2a+b$ …… ①

$f(0)=g(0)$에서

$-1=b$ …… ②

①, ②에서 $a=4$, $b=-1$

답 $a=4$, $b=-1$

06

|주안점| 합성함수의 함숫값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $(f \circ g)(4)+(g \circ f)(2)$

$=f(g(4))+g(f(2))$

$=f(6)+g(2)$

$=-7+0$

$=-7$

답 -7

표 준

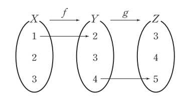
05 정의역이 $\{-2, 0, 2\}$인 두 함수 $f(x)=2x^2-1$과 $g(x)=a|x|+b$에 대하여 $f=g$가 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

06 두 함수 $f(x)=\begin{cases} -3x+11 & (x\geq 3) \\ 2 & (x<3) \end{cases}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2$에 대하여 $(f\circ g)(4)+(g\circ f)(2)$의 값을 구하시오.

07 세 집합

$X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{2, 3, 4\}$, $Z=\{3, 4, 5\}$

에 대하여 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$가 일대일대응이고, $f(1)=2$, $g(4)=5$, $(g\circ f)(2)=3$일 때, 다음을 구하시오.



(1) $f(3)$ (2) $(g\circ f)(1)$
(3) $g^{-1}(3)$ (4) $(f^{-1}\circ g^{-1})(5)$

08 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=-3x+2$에 대하여 $(f\circ h)(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $h(x)$를 구하시오.

09 두 함수 $f(x)=3x+5$, $g(x)=-2x+3$에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1})(-2)$의 값을 구하시오.

233

07

|주안점| 합성함수와 역함수를 이해하고 함숫값을 추론할 수 있게 한다.

|풀이| f가 일대일대응이고 $f(1)=2$이므로 $f(2)=3$ 또는 $f(2)=4$이다.

$g(f(2))=3$에서 $f(2)=4$라 하면 $\quad g(4)=3$

그런데 $g(4)=5$이므로 모순이다.

따라서 $f(2)=3$이므로 $\quad g(3)=3$

(1) f가 일대일대응이므로 $\quad f(3)=4$

(2) g가 일대일대응이므로 $\quad g(2)=4$

따라서 $\quad (g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=4$

(3) $g^{-1}(3)=a$라 하면 $\quad g(a)=3$

따라서 $\quad a=3$

(4) $(f^{-1}\circ g^{-1})(5)=f^{-1}(g^{-1}(5))=f^{-1}(4)=3$

답 (1) 4 (2) 4 (3) 3 (4) 3

08

|주안점| 합성함수를 이용하여 함수를 구할 수 있게 한다.

|풀이 1| $f(h(x))=g(x)$이므로

$2h(x)+1=-3x+2,\quad 2h(x)=-3x+1$

따라서 $\quad h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

답 $h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

|풀이 2| $y=2x+1$을 x에 대하여 풀면

$x=\frac{1}{2}(y-1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}(x-1)$

따라서 $\quad f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$

$f\circ h=g \Longleftrightarrow h=f^{-1}\circ g$이므로

$$\begin{aligned} h(x)&=f^{-1}(g(x))=f^{-1}(-3x+2) \\ &=\frac{1}{2}(-3x+2-1) \\ &=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

09

|주안점| 합성함수의 역함수와 그 성질을 이해하고, 이를 이용하여 함숫값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $f\circ(g\circ f)^{-1}=f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})$

$=(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}=g^{-1}$

$(f\circ(g\circ f)^{-1})(-2)=g^{-1}(-2)=a$라 하면

$g(a)=-2$이므로

$-2a+3=-2,\quad a=\frac{5}{2}$

따라서 $\quad (f\circ(g\circ f)^{-1})(-2)=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

10

|주안점| 함수와 그 역함수의 그래프가 동시에 지나는 점의 좌표를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수와 식의 값을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $(1, -5)$를 지나므로

$f(1)=a+b=-5$ …… ① ▶ 30 %

또, $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(1, -5)$를 지나므로

$f^{-1}(1)=-5$에서 $\quad f(-5)=1$

$f(-5)=-5a+b=1$ …… ② ▶ 30 %

①, ②를 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-4$ ▶ 20 %

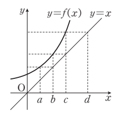
답 구하기 따라서 구하는 값은 $\quad 2a-3b=10$ ▶ 20 %

|서·술·형|

10 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(1,\ -5)$를 지날 때, 상수 a, b에 대하여 $2a-3b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

11 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하시오.

(1) $(f\circ f)(a)$
(2) $f^{-1}(b)$
(3) $(f\circ f)^{-1}(d)$



발 전

|서·술·형|

12 두 집합 $X=\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$, $Y=\{y\,|\,1\le y\le 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응일 때, 상수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 모두 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

13 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $(f\circ f)(x)=4x+6$을 만족시키는 $f(x)$를 모두 구하시오.

사고력+

14 함수 $f(x)=x|x|+a$와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $f^{-1}(1)=2$일 때, $(f\circ f)^{-1}(1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

234

11

|주안점| 합성함수와 역함수의 그래프의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

(2) $f^{-1}(b)=k$라 하면 $\quad f(k)=b$

따라서 $\quad k=a$

(3) $(f\circ f)^{-1}(d)=(f^{-1}\circ f^{-1})(d)=f^{-1}(f^{-1}(d))$

$=f^{-1}(c)=b$

답 (1) c (2) a (3) b

12

|주안점| 함수가 일대일대응일 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

문제 이해 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이 되려면 함수의 그래프가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 7)$을 지나거나 두 점 $(-1,\ 7)$, $(2,\ 1)$을 지나야 한다. ▶ 30 %

해결 과정 (i) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 7)$을 지날 때,

$f(-1)=-a+b=1$

$f(2)=2a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=3$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $\quad (2,\ 3)$ ▶ 30 %

(ii) 두 점 $(-1,\ 7)$, $(2,\ 1)$을 지날 때,

$f(-1)=-a+b=7$

$f(2)=2a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=5$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $\quad (-2,\ 5)$ ▶ 30 %

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 3)$, $(-2,\ 5)$ ▶ 10 %

13

|주안점| 합성함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| $f(x)=ax+b$이므로

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b$

$=a^2x+ab+b$

이때 $(f\circ f)(x)=4x+6$이므로

$a^2=4,\quad ab+b=6$

(i) $a=2$일 때, $2b+b=6$에서 $\quad b=2$

(ii) $a=-2$일 때, $-2b+b=6$에서 $\quad b=-6$

(i), (ii)에서 구하는 함수는

$f(x)=2x+2$ 또는 $f(x)=-2x-6$

답 $f(x)=2x+2$ 또는 $f(x)=-2x-6$

14

|주안점| 역함수와 합성함수의 역함수를 이용하여 함숫값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $f(x)=\begin{cases} x^2+a & (x\ge 0) \\ -x^2+a & (x<0) \end{cases}$

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$f(2)=4+a=1,\quad a=-3$

따라서 $\quad f(x)=\begin{cases} x^2-3 & (x\ge 0) \\ -x^2-3 & (x<0) \end{cases}$

$(f\circ f)^{-1}(1)=f^{-1}(f^{-1}(1))=f^{-1}(2)$에서

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2>0$이므로 $\quad k\ge 0$

$f(k)=k^2-3=2,\quad k^2=5,\quad k=\pm\sqrt{5}$

이때 $k\ge 0$이므로 $\quad k=\sqrt{5}$

즉, 구하는 값은 $\quad (f\circ f)^{-1}(1)=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

2 유리함수와 무리함수

01 유리함수

02 무리함수

"우리가 만든 모든 수학 내용처럼 **함수**도 우리가 만든 것임을 잊어서는 안 된다."

(출처: Kline, M., 『Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Vol. 3』)

가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)
독일의 수학자

이 글은 가우스가 1811년에 수학자 베셀(Bessel, F. W., 1784~1846)에게 보낸 편지 내용의 일부로, 우리가 사용하는 수학적 개념은 모두 사람이 만든 것으로서 함수도 그중의 하나임을 뜻하는 것이다.

235

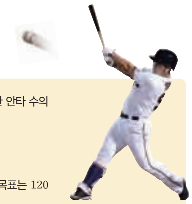
01 유리함수

학습 목표
유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

준비하기
1 $(2x^2-x)\div x$를 계산하시오.

2 곡선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

유리식



생각 열기 야구에서 타율은 타수에 대한 안타 수의 비율, 즉

$$\frac{(\text{안타 수})}{(\text{타수})}$$

로 계산한다. 어느 프로야구 선수의 올해 목표는 120안타를 기록하는 것이다.

▶ 이 선수의 올해 전반기 타수는 200이었고 후반기에 들어 x타수 만에 목표를 달성하였다. 이 선수가 목표를 달성했을 때의 타율을 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

위의 생각 열기에서 타수는 $x+200$이고 안타 수는 120이므로 타율을 x에 대한 식으로 나타내면 $\frac{120}{x+200}$이다.

1 이와 같이 두 다항식 A, B $(B\neq0)$에 대하여 $\frac{A}{B}$의 꼴로 나타낸 식을 **유리식**이라고 한다.

특히, 다항식 A는 $\frac{A}{1}$로 나타낼 수 있으므로 다항식도 유리식이다.

보기 $\frac{1}{x}$, $\frac{x^2-1}{2}$, $\frac{3x+1}{x-2}$, $2x-1$은 모두 유리식이고, 이 중에서 $\frac{x^2-1}{2}$과 $2x-1$은 다항식이다.

다가서기
파이프 오르간의 음의 높낮이는 진동수에 의해 달라지는데, 진동수는 파이프의 길이에 반비례한다. 또, 소리가 전달되는 데 걸리는 시간과 온도 사이의 관계는 분모에 문자가 포함된 분수 꼴의 식으로 나타난다.
이와 같이 우리 주변에서 분수 꼴의 식으로 표현된 함수를 이용하여 설명할 수 있는 현상을 찾아볼 수 있다.

문제 1 다음 중에서 다항식이 아닌 유리식을 모두 찾으시오.

(1) $\frac{4(2x-1)}{x}$ (2) $3x^2+\frac{2}{5}x$

(3) $\frac{1}{x^2-x+1}$ (4) $\frac{x^3-x}{10}$

236

중단원 도입

우리 주변에는 속도, 거리, 시간 사이의 관계처럼 함수의 의미를 가지고 있는 많은 것들이 존재하며, 이들 사이의 규칙을 알아내고 이것을 함수로 표현하면 여러 가지 상황을 예측할 수 있는 경우가 많이 있다.
이 단원에서는 유리식과 무리식의 뜻을 알고 이를 통하여 유리함수와 무리함수를 정의한다. 또, 중학교에서 반비례 관계로 다루던 유리함수의 그래프, 역함수의 성질을 바탕으로 한 무리함수의 그래프에 대하여 알아본다.

가우스

가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)는 독일의 수학자로 대수학 · 해석학 · 기하학 등 여러 방면에 걸쳐서 뛰어난 업적을 남겼으며, 19세기 최고의 수학자라 일컬어진다. 수학에 이른바 수학적 엄밀성과 완전성을 도입하여, 수리 물리학으로부터 독립된 순수 수학의 길을 개척하여 근대 수학을 확립하였다. 특히, 정수론이 수학에서 중요한 자리를 차지할 수 있도록 큰 공헌을 한 것이 높이 평가되고 있다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 유리식의 뜻을 알고, 간단한 계산을 할 수 있게 한다.
② 다항함수, 유리함수의 뜻을 알게 한다.
③ 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 그리고, 그 성질을 알게 한다.
④ 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그리고, 그 성질을 알게 한다.

지도상의 유의점

① 유리식은 유리함수의 뜻을 이해할 수 있는 정도로 간단히 다룬다.
② 유리함수는 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$와 같이 일차식을 일차식으로 나눈 형태까지만 다룬다.
③ 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 이해할 수 있음을 알게 한다.

다항식 $A, B, C\,(C\neq0)$에 대하여
① $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$
② $\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$

2 유리식의 덧셈과 뺄셈은 유리수의 덧셈과 뺄셈에서처럼 분모를 통분하여 계산한다.

예제 1 다음 식을 계산하시오.

(1) $\frac{2}{x-1}+3$ (2) $\frac{x+1}{x+2}-\frac{2x}{x^2+2x}$

풀이 (1) $\frac{2}{x-1}+3=\frac{2}{x-1}+\frac{3(x-1)}{x-1}=\frac{2+3(x-1)}{x-1}=\frac{3x-1}{x-1}$

(2) $\frac{x+1}{x+2}-\frac{2x}{x^2+2x}=\frac{x+1}{x+2}-\frac{2x}{x(x+2)}=\frac{x(x+1)-2x}{x(x+2)}=\frac{x(x-1)}{x(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$

답 (1) $\frac{3x-1}{x-1}$ (2) $\frac{x-1}{x+2}$

문제 2 다음 식을 계산하시오.

(1) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}$ (2) $\frac{x+7}{x^2-1}-\frac{3}{x^2+x}$

다항식 A, B, C, D $(B\neq0,\ D\neq0)$에 대하여
① $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$
② $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$ (단, $C\neq0$)

유리식의 곱셈은 유리수의 곱셈에서처럼 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하여 계산한다. 또, 유리식의 나눗셈은 유리수의 나눗셈에서처럼 나누는 식의 분자와 분모를 바꾼 식을 곱하여 계산한다.

예제 2 다음 식을 계산하시오.

(1) $\frac{2x-6}{x^2-4}\times\frac{x+2}{x^2-6x+9}$ (2) $\frac{x-3}{x-4}\div\frac{x^2-9}{x^2-16}$

풀이 (1) $\frac{2x-6}{x^2-4}\times\frac{x+2}{x^2-6x+9}=\frac{2(x-3)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{x+2}{(x-3)^2}=\frac{2}{(x-2)(x-3)}$

(2) $\frac{x-3}{x-4}\div\frac{x^2-9}{x^2-16}=\frac{x-3}{x-4}\times\frac{x^2-16}{x^2-9}=\frac{x-3}{x-4}\times\frac{(x+4)(x-4)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x+4}{x+3}$

답 (1) $\frac{2}{(x-2)(x-3)}$ (2) $\frac{x+4}{x+3}$

문제 3 다음 식을 계산하시오.

(1) $\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-3}\times\frac{x+3}{x^2-1}$ (2) $\frac{2x+10}{x^2-4x+3}\div\frac{x+5}{x-3}$

237

▌용어와 기호

- 유리식(有理式, rational expression)
- 유리함수(有理函數, rational function)
- 다항함수(多項函數, polynomial function)
- 점근선(漸近線, asymptotic line)

▌준비하기

| 주안점 | 다항식의 나눗셈과 도형의 평행이동을 알고 있는 지 확인한다.

| 풀이 | **1** $(2x^2-x)\div x=\frac{2x^2-x}{x}=2x-1$

2 $y=x^2$에서 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+1$을 대입하면

$y+1=(x-2)^2$, 즉 $y=(x-2)^2-1$

답 **1** $2x-1$ **2** $y=(x-2)^2-1$

● 유리식

생각 열기

| 지도 방향 | 일상생활에서 다항식을 이용하여 식을 세워 봄으로써 유리식의 뜻을 이해할 수 있게 한다.

▶ $\frac{(\text{안타 수})}{(\text{타수})}=\frac{120}{x+200}$

내용 연구

❶ 다항식도 유리식임을 알고 유리식 중에서 다항식과 다항식이 아닌 것을 구별할 수 있게 한다.

❷ 유리식의 덧셈과 뺄셈은 통분하여 계산하고, 계산 결과는 약분하여 기약분수로 나타냄을 알게 한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 유리식과 다항식을 구별할 수 있게 한다.

| 풀이 | (2), (4)는 다항식이고, 다항식이 아닌 유리식은 (1), (3)이다.

답 (1), (3)

문제 2

| 주안점 | 유리식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}$

$=\frac{x+1}{(x-2)(x+1)}+\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

$=\frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}=\frac{3(x-1)}{(x-2)(x+1)}$

(2) $\frac{x+7}{x^2-1}-\frac{3}{x^2+x}$

$=\frac{x+7}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{x(x+1)}$

$=\frac{x(x+7)-3(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+4x+3}{x(x-1)(x+1)}$

$=\frac{(x+1)(x+3)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x+3}{x(x-1)}$

답 풀이 참조

문제 3

| 주안점 | 유리식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-3}\times\frac{x+3}{x^2-1}$

$=\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-1)}\times\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-2}{(x-1)^2}$

(2) $\frac{2x+10}{x^2-4x+3}\div\frac{x+5}{x-3}=\frac{2x+10}{x^2-4x+3}\times\frac{x-3}{x+5}$

$=\frac{2(x+5)}{(x-1)(x-3)}\times\frac{x-3}{x+5}$

$=\frac{2}{x-1}$

답 풀이 참조

유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 **유리함수**라고 한다. 특히, $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 **다항함수**라고 한다.

1 다항식은 유리식이므로 다항함수도 유리함수이다.
예를 들어 함수

$$y=\frac{1}{2}x^2-1,\quad y=\frac{2}{x},\quad y=\frac{x+1}{2x-1}$$

은 모두 유리함수이고, 이 중에서 $y=\frac{1}{2}x^2-1$은 다항함수이다.

생각톡톡 다항함수의 정의역은 무엇일까?

2 유리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 분모가 0이 되지 않도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

보기 ① 유리함수 $y=\frac{2}{x}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 0\text{인 실수}\}$이다.
② 유리함수 $y=\frac{x+1}{2x-1}$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$이다.

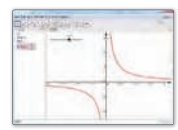
문제 4 다음 함수의 정의역을 구하시오.

(1) $y=\frac{3}{x-1}$　　　　(2) $y=\frac{-2x+1}{3x+2}$

유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프

다음을 통해 유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프에 대하여 알아보자.

함께하기 컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 k의 값에 따라 확인해 보자.



❶ 입력창에 'y=k/x'를 입력하고 Enter를 누른다.
❷ 새 창의 [슬라이더 만들기]를 클릭한다.

활동 ▶ k에 대한 슬라이더를 좌우로 움직이면서 k의 값에 따른 함수의 그래프의 모양을 확인해 보자.

238

유리함수

평가 기준

상	유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
중	유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 말할 수 있다.
하	유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 그릴 수 있다.

내용 연구

1 다항함수도 유리함수임을 알고, 유리함수 중에서 다항함수와 다항함수가 아닌 것을 구별할 수 있게 한다.

2 함수의 정의역이 주어져 있지 않을 때는 함숫값이 정의되는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.
따라서 유리함수에서 정의역이 주어져 있지 않을 때는 분모가 0이 되지 않도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 함을 알게 한다.
|오개념 바로잡기| 다항함수 $y=x+1$과 유리함수 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$에 대하여 $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$이므로 두 함수가 같은 함수라고 생각하기 쉽다. 그러나 다항함수 $y=x+1$의 정의역은 $\{x\,|\,x\text{는 모든 실수}\}$이고, 유리함수 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 1\text{인 실수}\}$이므로 서로 다른 함수임을 유의하도록 한다.

생각톡톡 다항함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

문제 풀이

문제 4

|주안점| 유리함수의 정의역을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x-1\neq 0$에서 $x\neq 1$이므로
함수 $y=\frac{3}{x-1}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 1\text{인 실수}\}$

(2) $3x+2\neq 0$에서 $x\neq -\frac{2}{3}$이므로
함수 $y=\frac{-2x+1}{3x+2}$의 정의역은
$\left\{x\,\middle|\,x\neq -\frac{2}{3}\text{인 실수}\right\}$

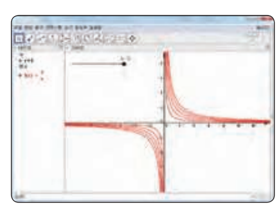
답 (1) $\{x\,|\,x\neq 1\text{인 실수}\}$ (2) $\left\{x\,\middle|\,x\neq -\frac{2}{3}\text{인 실수}\right\}$

유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프

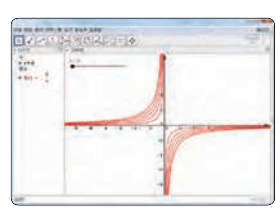
함께하기

|지도 방향| 컴퓨터 프로그램을 이용하여 유리함수의 그래프를 그려 보면서 유리함수의 그래프의 성질을 직관적으로 이해하게 한다.

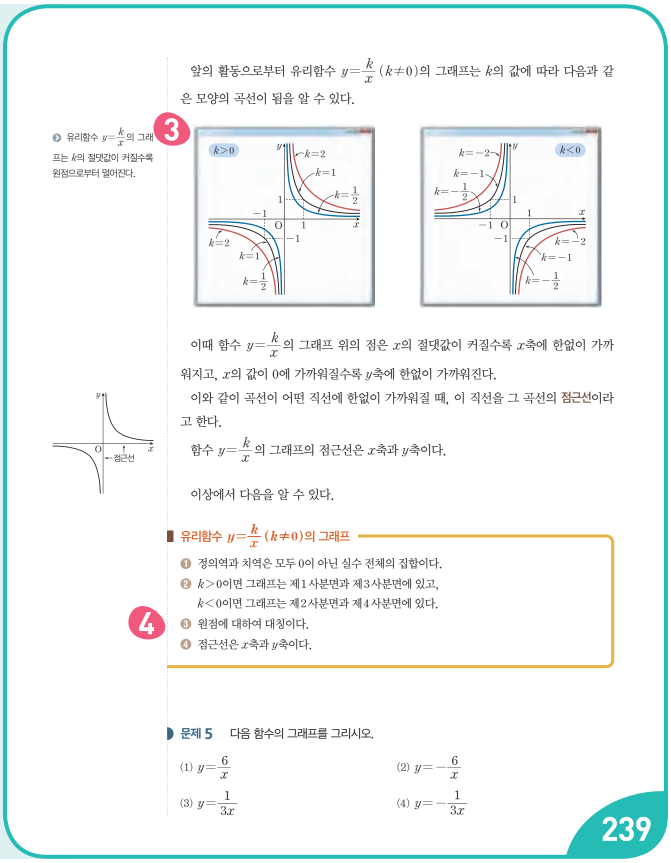
|풀이| ▶ (i) $k>0$이면 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 있다.



(ii) $k<0$이면 그래프는 제2사분면과 제4사분면에 있다.



답 풀이 참조



앞의 활동으로부터 유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k \neq 0)$의 그래프는 k의 값에 따라 다음과 같은 모양의 곡선이 됨을 알 수 있다.

3 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

이때 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점은 x의 절댓값이 커질수록 x축에 한없이 가까워지고, x의 값이 0에 가까워질수록 y축에 한없이 가까워진다.

이와 같이 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 **점근선**이라고 한다.

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프의 점근선은 x축과 y축이다.

이상에서 다음을 알 수 있다.

유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k \neq 0)$의 그래프

4
❶ 정의역과 치역은 모두 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.
❷ $k>0$이면 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 있고,
$k<0$이면 그래프는 제2사분면과 제4사분면에 있다.
❸ 원점에 대하여 대칭이다.
❹ 점근선은 x축과 y축이다.

문제 5 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\frac{6}{x}$ (2) $y=-\frac{6}{x}$
(3) $y=\frac{1}{3x}$ (4) $y=-\frac{1}{3x}$

239

내용 연구

3 유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k \neq 0)$의 그래프와 같은 곡선을 쌍곡선이라고 한다. 이들 그래프는 원점과 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다. 이때 k의 절댓값이 커질수록 원점에서 멀어지는 그래프가 되며, k의 값의 부호에 따라 그래프가 지나는 사분면이 달라짐을 알게 한다.

4 $f(x)=\frac{k}{x}\ (k \neq 0)$이면 $f(-x)=-\frac{k}{x}$이므로

$$f(-x)=-f(x)$$

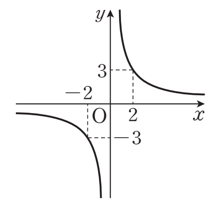
따라서 유리함수 $f(x)=\frac{k}{x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

문제 풀이

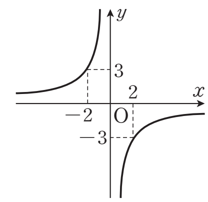
문제 5

| 주안점 | 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

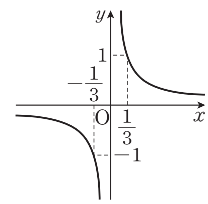
| 풀이 | (1) 함수 $y=\frac{6}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제3사분면에 있다.



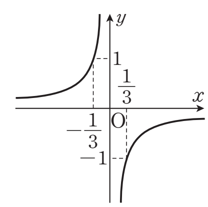
(2) 함수 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면과 제4사분면에 있고, (1)의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다. 또, y축에 대하여 대칭이다.



(3) 함수 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제3사분면에 있다.



(4) 함수 $y=-\frac{1}{3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면과 제4사분면에 있고, (3)의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다. 또, y축에 대하여 대칭이다.



답 풀이 참조

지도 자료

유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k \neq 0)$의 그래프의 대칭성

$f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동시 $f(-x,\ -y)=0$이다. 이때 $f(x,\ y)=0$과 $f(-x,\ -y)=0$이 일치하면 $f(x,\ y)=0$은 원점에 대하여 대칭인 도형이다. 이처럼 대칭이동시 처음 도형과 일치하면 그 도형은 대칭인 도형이다.

① 곡선 $y=\frac{k}{x}$를 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=\frac{k}{-x}$이고, 이 식은 $y=\frac{k}{x}$와 같으므로

$y=\frac{k}{x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

② 곡선 $y=\frac{k}{x}$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

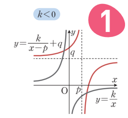
$x=\frac{k}{y}$이고, 이 식은 $y=\frac{k}{x}$와 같으므로

$y=\frac{k}{x}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

③ 곡선 $y=\frac{k}{x}$는 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

● 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프

● 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프



❶ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는

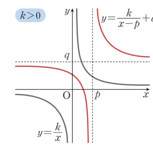
유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를

x축의 방향으로 p만큼,

y축의 방향으로 q만큼

평행이동한 것이다.

이때 이 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$이다.



❷ 또, 이 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$이다.

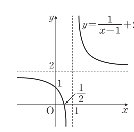
이상에서 다음을 알 수 있다.

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

1. 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
2. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$이다.
3. 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.
4. 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$이다.

❸ 보기 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$이며, 점근선은 두 직선 $x=1$과 $y=2$이다.



문제 6 다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

(1) $y=\dfrac{2}{x+1}$　　(2) $y=-\dfrac{1}{x-2}+1$

240

내용 연구

❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-q=f(x-p)$이므로 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$임을 알게 한다.

❷ 그래프가 평행이동한 만큼 점근선도 평행이동하므로 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$임을 알게 한다.

❸ 평행이동한 유리함수의 그래프는 점근선을 먼저 그리고 함수의 그래프를 그리면 편리하다. 또, 유리함수의 그래프는 점근선의 교점에 대하여 대칭임을 이해하게 한다.

❹ 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$가 다항함수가 아닌 유리함수가 되려면 $ad-bc\neq0$, $c\neq0$이어야 한다.

(i) $ad-bc=0$, $c\neq0$이면 $b=\dfrac{ad}{c}$에서

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{acx+ad}{c^2x+cd}=\frac{a(cx+d)}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}$$

이므로 $f(x)$는 상수함수이다.

(ii) $c=0$이면

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$$

이므로 $f(x)$는 다항함수이다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$가 다항함수가 아닌 유리함수가 되려면 $ad-bc\neq0$, $c\neq0$이어야 한다.

❺ 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 꼴로 변형할 때, q는 $ax+b$를 $cx+d$로 나누었을 때의 몫이고, k는 $ax+b$를 $cx+d$로 나누었을 때의 나머지이다. 이때 $p=-\dfrac{d}{c}$, $q=\dfrac{a}{c}$가 되므로 점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{d}{c}$와 $y=\dfrac{a}{c}$이다.

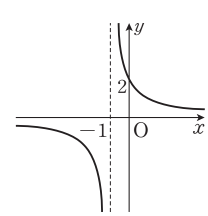
문제 풀이

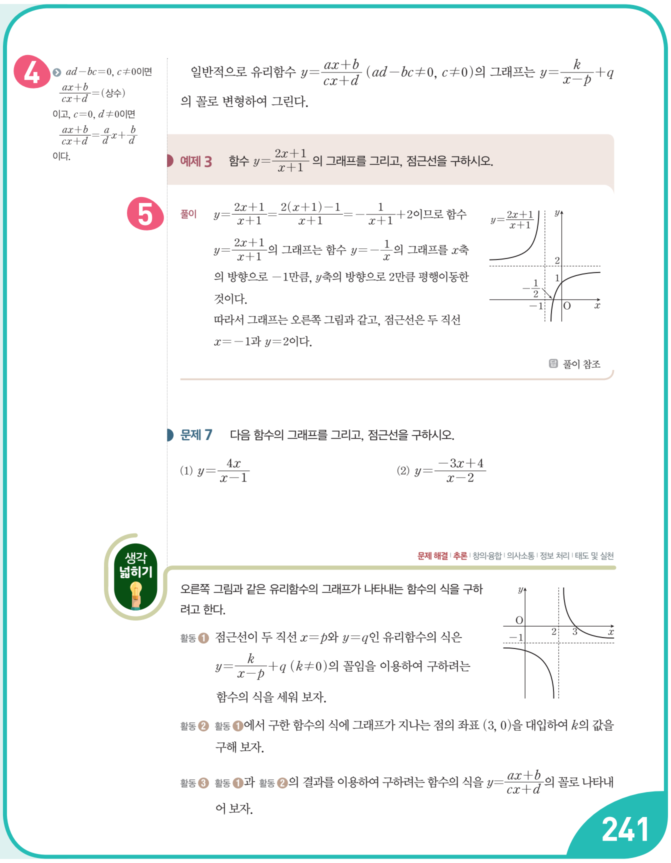
문제 6

| 주안점 | 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프를 그리고, 점근선을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 함수 $y=\dfrac{2}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 두 직선 $x=-1$과 $y=0$이다.





4 ◆ $ad-bc=0$, $c\neq0$이면 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=$(상수)이고, $c=0$, $d\neq0$이면 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$이다.

일반적으로 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 그린다.

예제 3 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

5 풀이 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 두 직선 $x=-1$과 $y=2$이다.

답 풀이 참조

문제 7 다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

(1) $y=\dfrac{4x}{x-1}$　　(2) $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$

생각 넓히기　문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림과 같은 유리함수의 그래프가 나타내는 함수의 식을 구하려고 한다.

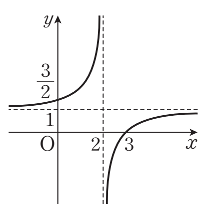
활동 1 점근선이 두 직선 $x=p$와 $y=q$인 유리함수의 식은 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$의 꼴임을 이용하여 구하려는 함수의 식을 세워 보자.

활동 2 활동 1에서 구한 함수의 식에 그래프가 지나는 점의 좌표 $(3,\ 0)$을 대입하여 k의 값을 구해 보자.

활동 3 활동 1과 활동 2의 결과를 이용하여 구하려는 함수의 식을 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 꼴로 나타내어 보자.

241

(2) 함수 $y=-\dfrac{1}{x-2}+1$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 두 직선 $x=2$와 $y=1$이다.



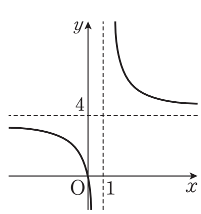
답 풀이 참조

문제 7

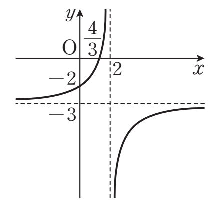
| 주안점 | 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그리고, 점근선을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y=\dfrac{4x}{x-1}=\dfrac{4(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+4$이므로

함수 $y=\dfrac{4x}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 두 직선 $x=1$과 $y=4$이다.



(2) $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-2}{x-2}=-\dfrac{2}{x-2}-3$이므로 함수 $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 두 직선 $x=2$와 $y=-3$이다.



답 풀이 참조

생각 넓히기

| 지도 방향 | 유리함수의 그래프의 점근선과 그래프가 지나는 한 점을 이용하여 함수의 식 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | ❶ 점근선이 두 직선 $x=2$와 $y=-1$인 유리함수의 식은　$y=\dfrac{k}{x-2}-1\ (k\neq0)$

❷ 함수 $y=\dfrac{k}{x-2}-1$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{3-2}-1$, 즉 $k=1$

❸ $y=\dfrac{1}{x-2}-1=\dfrac{1-(x-2)}{x-2}=\dfrac{-x+3}{x-2}$

따라서 구하는 유리함수의 식은　$y=\dfrac{-x+3}{x-2}$

답 ❶ $y=\dfrac{k}{x-2}-1\ (k\neq0)$　❷ 1　❸ $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$

지도 자료

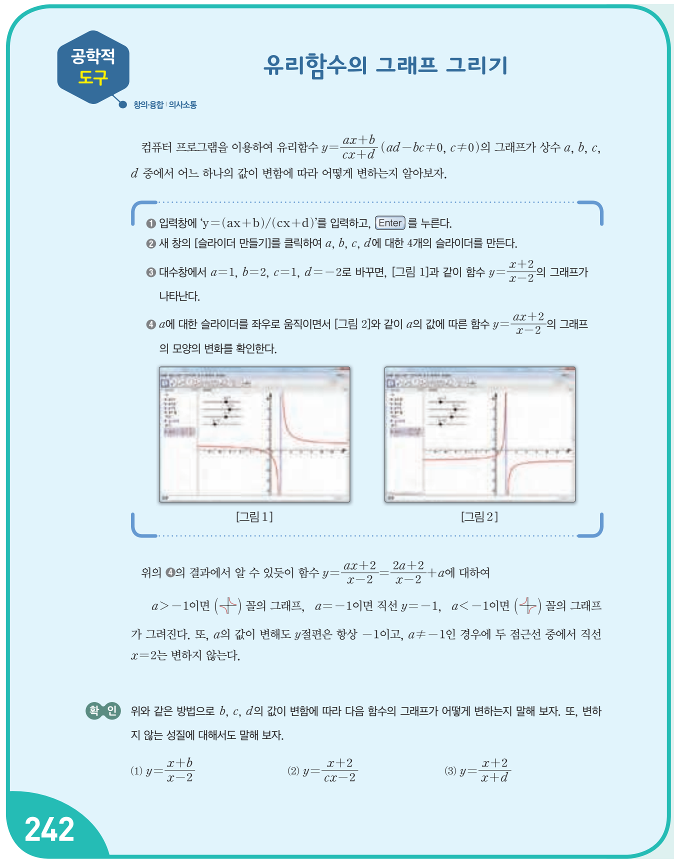
유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 역함수

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$는 정의역 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{d}{c}\text{인 실수}\right\}$에서 공역 $\left\{y\,\middle|\,y\neq\dfrac{a}{c}\text{인 실수}\right\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 x에 대하여 풀면　$x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는　$y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

즉, 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$는 원래 함수식에서 분자의 x의 계수인 a와 분모의 상수항인 d의 위치를 서로 바꾸고, 그 부호를 각각 바꾼 것과 같다.



공학적 도구 유리함수의 그래프 그리기

창의·융합 | 의사소통

컴퓨터 프로그램을 이용하여 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프가 상수 a, b, c, d 중에서 어느 하나의 값이 변함에 따라 어떻게 변하는지 알아보자.

❶ 입력창에 'y=(ax+b)/(cx+d)'를 입력하고, Enter 를 누른다.
❷ 새 창의 [슬라이더 만들기]를 클릭하여 a, b, c, d에 대한 4개의 슬라이더를 만든다.
❸ 대수창에서 $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=-2$로 바꾸면, [그림 1]과 같이 함수 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$의 그래프가 나타난다.
❹ a에 대한 슬라이더를 좌우로 움직이면서 [그림 2]와 같이 a의 값에 따른 함수 $y=\dfrac{ax+2}{x-2}$의 그래프의 모양의 변화를 확인한다.

[그림 1] [그림 2]

위의 ❹의 결과에서 알 수 있듯이 함수 $y=\dfrac{ax+2}{x-2}=\dfrac{2a+2}{x-2}+a$에 대하여

$a>-1$이면 ( ) 꼴의 그래프, $a=-1$이면 직선 $y=-1$, $a<-1$이면 ( ) 꼴의 그래프가 그려진다. 또, a의 값이 변해도 y절편은 항상 -1이고, $a\neq-1$인 경우에 두 점근선 중에서 직선 $x=2$는 변하지 않는다.

확인 위와 같은 방법으로 b, c, d의 값이 변함에 따라 다음 함수의 그래프가 어떻게 변하는지 말해 보자. 또, 변하지 않는 성질에 대해서도 말해 보자.

(1) $y=\dfrac{x+b}{x-2}$ (2) $y=\dfrac{x+2}{cx-2}$ (3) $y=\dfrac{x+2}{x+d}$

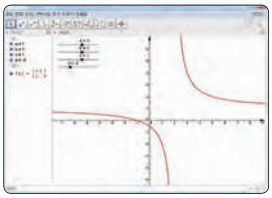
242

공학적 도구 유리함수의 그래프 그리기

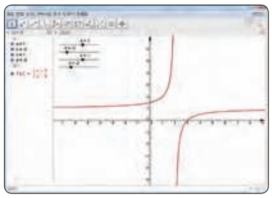
|지도 방향| 컴퓨터 프로그램을 이용하여 상수 a, b, c, d의 값의 변화에 따른 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 변하는 성질과 변하지 않는 성질에 대하여 알 수 있게 한다.

|풀이| (1) $y=\dfrac{x+b}{x-2}=\dfrac{b+2}{x-2}+1$이므로

$b>-2$이면 [그림 1] 모양의 그래프,
$b=-2$이면 직선 $y=1$,
$b<-2$이면 [그림 2] 모양의 그래프가 그려진다.
한편, b의 값이 변해도 $b\neq-2$인 경우에 점근선은 항상 두 직선 $x=2$와 $y=1$이다.



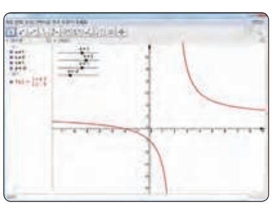
[그림 1]



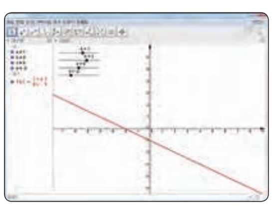
[그림 2]

(2) $y=\dfrac{x+2}{cx-2}=\dfrac{\dfrac{2(c+1)}{c^2}}{x-\dfrac{2}{c}}+\dfrac{1}{c}$이므로

$c>0$ 또는 $-1<c<0$이면 [그림 1] 모양의 그래프,
$c=0$이면 [그림 2]와 같이 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$,
$c=-1$이면 직선 $y=-1$,
$c<-1$이면 [그림 3] 모양의 그래프가 그려진다.
한편, c의 값이 변해도 y절편은 항상 -1이고, $c\neq-1$인 경우에 x절편은 항상 -2이다.



[그림 1]

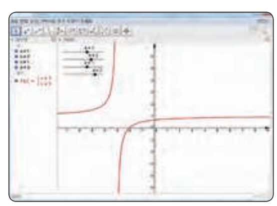


[그림 2]

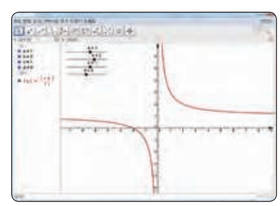
[그림 3]

(3) $y=\dfrac{x+2}{x+d}=\dfrac{2-d}{x+d}+1$이므로

$d>2$이면 [그림 1] 모양의 그래프,
$d=2$이면 직선 $y=1$,
$d<2$이면 [그림 2] 모양의 그래프가 그려진다.
한편, d의 값이 변해도 $d\neq2$인 경우에 x절편은 항상 -2이고, 두 점근선 중에서 직선 $y=1$은 변하지 않는다.



[그림 1]



[그림 2]

답 풀이 참조

소단원 지도 개관

▌지도 목표

① 무리식의 뜻을 알고, 간단한 계산을 할 수 있게 한다.
② 무리함수의 뜻을 알고, 정의역을 구할 수 있게 한다.
③ 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$의 그래프를 그리고, 그 성질을 알게 한다.

02 무리함수

학습 목표

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

준비하기

1 $\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}$을 계산하시오.

2 직선 $y=2x-3$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

무리식

생각 열기 자유 낙하하는 물체의 낙하 시간(s)은 낙하 거리(m)에 의하여

$$\sqrt{\frac{2\times(\text{낙하 거리})}{g}}\ (g\text{는 중력 가속도})$$

와 같은 식으로 나타낼 수 있다고 한다.

▶ 자유 낙하하는 물체의 낙하 거리가 x m이고 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$일 때, 낙하 시간을 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

위의 **생각 열기**에서 낙하 시간을 x에 대한 식으로 나타내면 $\sqrt{\frac{x}{4.9}}$이고, 이 식은 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식이다.

1 이와 같이 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 **무리식**이라고 한다.

2 무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안에 있는 식의 값이 0 이상이어야 하므로 무리식을 계산할 때는

$$(\text{근호 안에 있는 식의 값})\geq 0$$

이 되는 범위에서만 생각한다.

보기 ① 무리식 $\sqrt{x-2}+1$의 값이 실수가 되려면 $x-2\geq0,\quad x\geq2$

② 무리식 $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$의 값이 실수가 되려면 분모가 0이 아니어야 하므로

$x+1>0,\quad x>-1$

다가서기

맑은 날 산의 정상에서 볼 수 있는 최대 거리와 산의 높이 사이의 관계, 바람 부는 날에 느끼는 체감 온도와 풍속 사이의 관계 등은 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식으로 나타난다. 이와 같이 우리 주변의 현상을 함수로 표현할 때, 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식이 이용되는 경우가 있다.

문제 1 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x의 값의 범위를 정하시오.

(1) $\sqrt{2x+1}-1$　　(2) $\frac{x}{\sqrt{3-x}}$

243

④ 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그리고, 그 성질을 알게 한다.

지도상의 유의점

① 무리식은 근호 안이 일차식이나 이차식인 간단한 경우만 다룬다.

② 무리함수는 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 꼴의 간단한 것만 다룬다.

③ 무리함수에서는 정의역과 치역을 유의하도록 하고, 그래프를 그릴 때 이를 확인하게 한다.

④ 무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프는 역함수 $y=\frac{x^2}{a}$ $(x\geq0)$의 그래프를 이용하여 그릴 수 있게 한다.

⑤ 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형한 후 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있게 한다.

용어와 기호

- 무리식(無理式, irrational expression)
- 무리함수(無理函數, irrational function)

준비하기

|주안점| 무리수의 계산과 도형의 대칭이동을 알고 있는지 확인한다.

|풀이| 1 $\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3-1}=\sqrt{3}$

2 $y=2x-3$에서 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$x=2y-3$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

답 1 $\sqrt{3}$　2 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

무리식

생각 열기

|지도 방향| 일상생활에서 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식을 세워 봄으로써 무리식의 뜻을 이해할 수 있게 한다.

▶ 낙하 시간을 x에 대한 식으로 나타내면

$$\sqrt{\frac{2x}{9.8}}=\sqrt{\frac{x}{4.9}}$$

내용 연구

1 근호 안에 있는 식이 완전제곱식이면 유리식으로 나타낼 수 있으므로 무리식이 아니다.
예를 들어 식 $\sqrt{(x+1)^2}$은 $|x+1|$로 나타낼 수 있으므로 무리식이 아니다.

2 무리식에서는 식의 값이 실수가 되려면 근호 안에 있는 식의 값이 음수가 되지 않도록 문자의 값의 범위를 제한해야 함을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 무리식의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위를 정할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 무리식 $\sqrt{2x+1}-1$의 값이 실수가 되려면

$2x+1\geq0$에서　$x\geq-\frac{1}{2}$

(2) 무리식 $\frac{x}{\sqrt{3-x}}$의 값이 실수가 되려면

$3-x>0$에서　$x<3$

답 (1) $x\geq-\frac{1}{2}$　(2) $x<3$

1 무리식의 계산은 무리수의 계산과 같은 방법으로 한다.

예제 1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ (2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

풀이 (1) $(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2=x+2-x=2$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{(1-\sqrt{x})+(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\dfrac{2}{1^2-(\sqrt{x})^2}=\dfrac{2}{1-x}$

답 (1) 2 (2) $\dfrac{2}{1-x}$

문제 2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)$ (2) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

2 분모가 무리식인 경우에는 분모를 유리화하여 그 식을 간단히 할 수 있다.

예제 2 분모를 유리화하여 다음 식을 간단히 하시오.

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$

풀이 분모, 분자에 각각 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$을 곱하면

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$$
$$=\frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(x+1)-(x-1)}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$$

답 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$

문제 3 분모를 유리화하여 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

244

내용 연구

1 무리식을 계산할 때는 무리수의 계산과 마찬가지로 제곱근의 성질을 이용한다.

[제곱근의 성질]

(1) $\sqrt{a^2}=|a|$, $(\sqrt{a})^2=a$

(2) $a>0$, $b>0$일 때

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ② $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

③ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ④ $\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

2 무리식의 계산에서도 무리수의 계산에서와 같이 분모에 근호가 포함되어 있으면

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

임을 이용하여 분모를 유리화하여 계산하게 한다.

문제 풀이

문제 2

| 주안점 | 곱셈 공식과 제곱근의 성질을 이용하여 무리식을 간단히 할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)=(\sqrt{x+1})^2-1$
$=x+1-1$
$=x$

(2) $$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$
$$=\frac{x-4\sqrt{x}+4+x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x})^2-2^2}$$
$$=\frac{2x+8}{x-4}$$

답 (1) x (2) $\dfrac{2x+8}{x-4}$

문제 3

| 주안점 | 무리식의 분모를 유리화할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 분모, 분자에 각각 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}$을 곱하면

$$\frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$$
$$=\frac{4(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}$$
$$=\frac{4(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{x+1-(x+3)}$$
$$=\frac{4(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{-2}$$
$$=2(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})$$

(2) 분모, 분자에 각각 $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$을 곱하면

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$$
$$=\frac{x+2\sqrt{x(x-1)}+x-1}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x-1})^2}$$
$$=\frac{2x-1+2\sqrt{x^2-x}}{x-(x-1)}$$
$$=2x-1+2\sqrt{x^2-x}$$

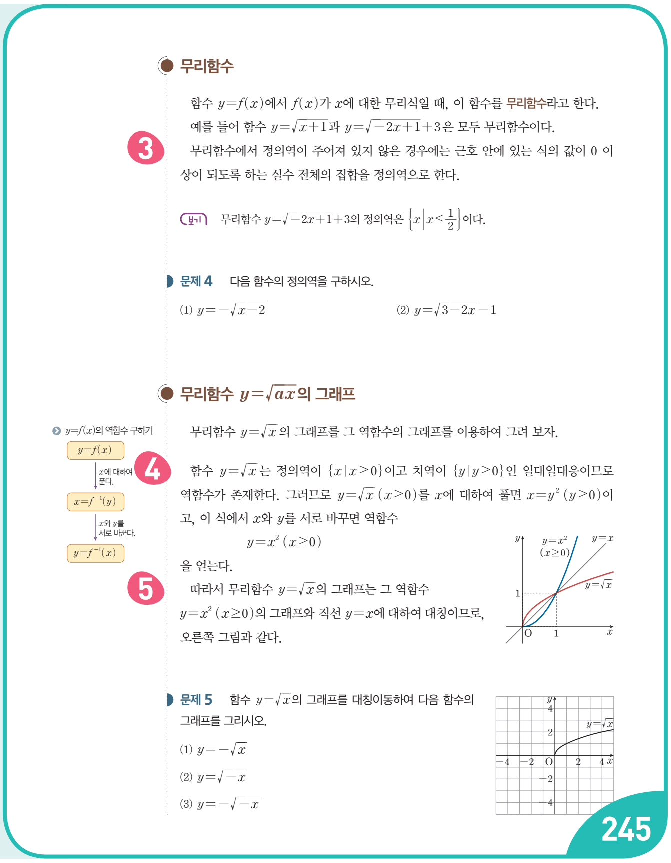
답 (1) $2(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})$
(2) $2x-1+2\sqrt{x^2-x}$

지도 자료

$\dfrac{1}{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ $(b>0, c>0)$의 유리화

(i) 분모, 분자에 $a-(\sqrt{b}+\sqrt{c})$를 곱하여 $\dfrac{1}{p+\sqrt{q}}$의 꼴로 변형한다.

(ii) $\dfrac{1}{p+\sqrt{q}}$의 분모, 분자에 $p-\sqrt{q}$를 곱하여 유리화한다.



무리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 **무리함수**라고 한다.

예를 들어 함수 $y=\sqrt{x+1}$과 $y=\sqrt{-2x+1}+3$은 모두 무리함수이다.

3 무리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 근호 안에 있는 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

보기 무리함수 $y=\sqrt{-2x+1}+3$의 정의역은 $\left\{x \middle| x\le\frac{1}{2}\right\}$이다.

문제 4 다음 함수의 정의역을 구하시오.

(1) $y=-\sqrt{x-2}$ (2) $y=\sqrt{3-2x}-1$

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프

$y=f(x)$의 역함수 구하기
$y=f(x)$ → x에 대하여 푼다. → $x=f^{-1}(y)$ → x와 y를 서로 바꾼다. → $y=f^{-1}(x)$

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그 역함수의 그래프를 이용하여 그려 보자.

4 함수 $y=\sqrt{x}$는 정의역이 $\{x|x\ge0\}$이고 치역이 $\{y|y\ge0\}$인 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 그러므로 $y=\sqrt{x}\ (x\ge0)$를 x에 대하여 풀면 $x=y^2\ (y\ge0)$이고, 이 식에서 x와 y를 서로 바꾸면 역함수

$$y=x^2\ (x\ge0)$$

을 얻는다.

5 따라서 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 그 역함수 $y=x^2\ (x\ge0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, 오른쪽 그림과 같다.

문제 5 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 대칭이동하여 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=-\sqrt{x}$

(2) $y=\sqrt{-x}$

(3) $y=-\sqrt{-x}$

245

무리함수

평가 기준

상	무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
중	무리함수 $y=\sqrt{x-p}+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 말할 수 있다.
하	무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 그릴 수 있다.

내용 연구

3 함수의 정의역과 공역이 주어져 있지 않을 때의 정의역은 함숫값이 정의되는 x의 값 전체의 집합이고, 공역은 실수 전체의 집합이다.
따라서 무리함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 실수가 되기 위한 조건은 근호 안에 있는 식의 값이 0 또는 양수가 되어야 하므로 이 조건을 만족시키는 x의 값의 범위가 무리함수 $y=f(x)$의 정의역이다.

문제 풀이

문제 4

| 주안점 | 무리함수의 정의역을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $x-2\ge0$에서 $x\ge2$이므로
주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\ge2\}$

(2) $3-2x\ge0$에서 $x\le\frac{3}{2}$이므로
주어진 함수의 정의역은 $\left\{x \middle| x\le\frac{3}{2}\right\}$

답 (1) $\{x|x\ge2\}$ (2) $\left\{x \middle| x\le\frac{3}{2}\right\}$

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프

내용 연구

4 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 역함수가 $y=x^2\,(x\ge0)$임을 이해시키고, 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 이차함수 $y=x^2\,(x\ge0)$의 그래프를 이용하여 그릴 수 있게 한다.
| 오개념 바로잡기 | $y^2=x$는 0이 아닌 x에 대하여 y의 값이 두 개씩 대응되므로 함수가 아님을 유의한다. 그러나 $y^2=x$에서 $y=\pm\sqrt{x}$이므로 $y=\sqrt{x}$ 또는 $y=-\sqrt{x}$와 같이 분리하여 생각하면 각각은 함수가 된다.
이때 $y=\sqrt{x}$는 $y=x^2\,(x\ge0)$의 역함수이고, $y=-\sqrt{x}$는 $y=x^2\,(x\le0)$의 역함수이다.

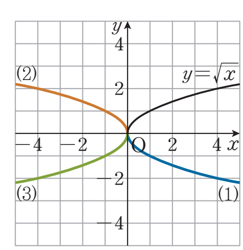
5 무리함수를 일대일함수이면서 치역과 공역이 같은 것으로 생각하면, 무리함수는 일대일대응이므로 그 역함수를 정의할 수 있다. 무리함수의 그래프는 그 역함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것으로 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 5

| 주안점 | 대칭이동을 이용하여 무리함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



(2) $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

(3) $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

답 풀이 참조

내용 연구

1 (i) 무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 정의역을 $\{x\,|\,x\ge0\}$, 공역을 $\{y\,|\,y\ge0\}$이라 하면 이 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 즉,
$y=\sqrt{ax}\,(x\ge0,\ y\ge0)$를 x에 대하여 풀면
$x=\dfrac{y^2}{a}\,(x\ge0,\ y\ge0)$이고, 이 식에서 x와 y를 서로 바꾸면 역함수 $y=\dfrac{x^2}{a}\,(x\ge0)$을 얻는다.

(ii) 무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a<0)$의 정의역을 $\{x\,|\,x\le0\}$, 공역을 $\{y\,|\,y\ge0\}$이라 하면 이 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 즉,
$y=\sqrt{ax}\,(x\le0,\ y\ge0)$를 x에 대하여 풀면
$x=\dfrac{y^2}{a}\,(x\le0,\ y\ge0)$이고, 이 식에서 x와 y를 서로 바꾸면 역함수 $y=\dfrac{x^2}{a}\,(x\ge0)$을 얻는다.

(i), (ii)에서 무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\ne0)$의 역함수는 $y=\dfrac{x^2}{a}\,(x\ge0)$이고, 무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\ne0)$의 그래프와 $y=\dfrac{x^2}{a}\,(x\ge0)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

2 무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\ne0)$에 대하여
(i) 함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프는
함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동
(ii) 함수 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프는
함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동
(iii) 함수 $y=-\sqrt{-ax}$의 그래프는
함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동
한 것임을 a 대신 간단한 숫자를 대입하여 만든 함수의 그래프를 그려 쉽게 이해하게 한다.

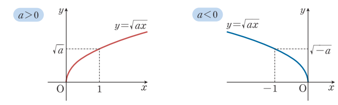
문제 풀이

문제 6

| 주안점 | 무리함수 $y=\sqrt{ax}$와 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

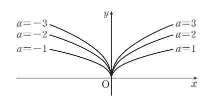
| 풀이 | (1) $y=\sqrt{2x}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$인 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

1 일반적으로 무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\ne0)$의 그래프는 그 역함수 $y=\dfrac{x^2}{a}\,(x\ge0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, a의 값의 부호에 따라 다음 그림과 같다.



무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 a의 절댓값이 커질수록 x축으로부터 멀어진다.

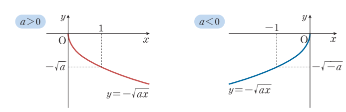
무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\ne0)$의 그래프는 a의 값에 따라 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $a>0$일 때 $\{x\,|\,x\ge0\}$, $a<0$일 때 $\{x\,|\,x\le0\}$이며, 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\ne0)$의 그래프
❶ $a>0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이다.
$a<0$일 때, 정의역은 $\{x\,|\,x\le0\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이다.
❷ 함수 $y=\dfrac{x^2}{a}\,(x\ge0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

2 한편 무리함수 $y=-\sqrt{ax}\,(a\ne0)$의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이므로, a의 값의 부호에 따라 다음 그림과 같다.



문제 6 다음 함수의 그래프를 그리시오.
(1) $y=\sqrt{2x}$　　(2) $y=\sqrt{-2x}$
(3) $y=-\sqrt{2x}$　　(4) $y=-\sqrt{-2x}$

246

$y=\sqrt{2x}\,(x\ge0)$를 x에 대하여 풀면　$x=\dfrac{y^2}{2}\,(y\ge0)$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는　$y=\dfrac{x^2}{2}\,(x\ge0)$

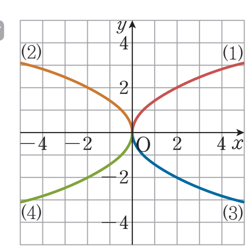
$y=\sqrt{2x}$의 그래프는 역함수 $y=\dfrac{x^2}{2}\,(x\ge0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

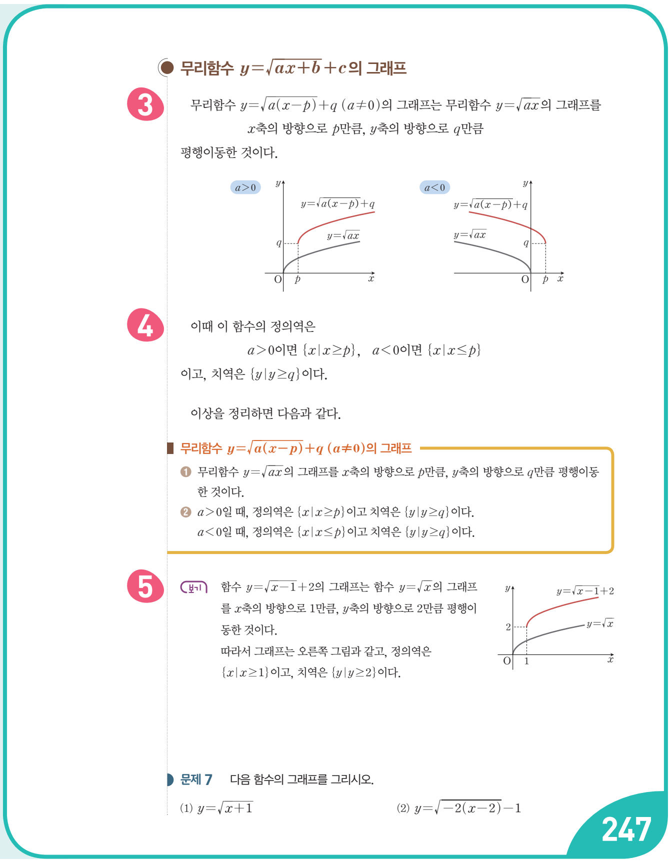
(2) $y=\sqrt{-2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

(3) $y=-\sqrt{2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

(4) $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

답





무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

3 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를

x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼

평행이동한 것이다.

4 이때 이 함수의 정의역은

$a>0$이면 $\{x|x\geq p\}$, $a<0$이면 $\{x|x\leq p\}$

이고, 치역은 $\{y|y\geq q\}$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$의 그래프

1. 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
2. $a>0$일 때, 정의역은 $\{x|x\geq p\}$이고 치역은 $\{y|y\geq q\}$이다.
   $a<0$일 때, 정의역은 $\{x|x\leq p\}$이고 치역은 $\{y|y\geq q\}$이다.

5 보기 함수 $y=\sqrt{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\geq1\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq2\}$이다.

문제 7 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\sqrt{x+1}$ (2) $y=\sqrt{-2(x-2)}-1$

247

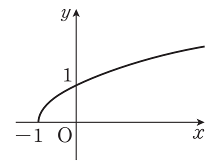
문제 풀이

문제 7

| 주안점 | 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

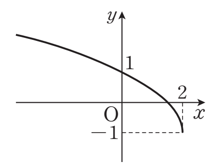
| 풀이 | (1) 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) 함수 $y=\sqrt{-2(x-2)}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

● 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

내용 연구

3 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-q=f(x-p)$이므로 무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\neq0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$임을 알게 한다.

4 그래프가 평행이동한 만큼 함수의 정의역과 치역도 평행이동하므로 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\,(a\neq0)$의 정의역과 치역은 각각

$a>0$일 때, $\{x|x\geq p\}$, $\{y|y\geq q\}$

$a<0$일 때, $\{x|x\leq p\}$, $\{y|y\geq q\}$

이다.

5 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그릴 수 있게 한다.

1. 점 $(p,\ q)$를 좌표평면 위에 나타낸다.
2. a의 부호를 확인하여 그래프를 그린다.

지도 자료

생활 속의 무리함수

① 사람의 최고 보행 속도 y(km/h)와 그 사람의 다리의 길이 x(cm) 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$y=\sqrt{2.73x}$ (km/h)

② 사이클 경기에서 커브를 돌 때, 선수들은 넘어지지 않기 위하여 경기장 안쪽으로 자전거와 몸을 구부린다. 이때 사이클 트랙의 경사 θ, 트랙의 반지름의 길이 r(m), 사이클의 속도 v(m/s) 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$v=\sqrt{0.171r\theta}$

③ 1805년 영국의 기상학자 보퍼트(Beaufort, F., 1774∼1857)에 의하여 고안된 풍력 계급(B)와 지상 10 m에서 측정된 바람의 세기 x(mile/h) 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$B=1.9\sqrt{x+8}-5.4$

④ 바람이 불면 바람이 불지 않을 때보다 더 춥게 느끼게 되는데, 이와 같이 실제로 느껴지는 온도를 체감 온도라고 한다.

체감 온도 T ℃와 기온 t ℃, 풍속 v m/s, 복사량 I kW/m^2 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$T=t-\sqrt{16v}+12I$

내용 연구

❶ $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left\{x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}}+c$이므로

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\,(a\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\neq0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 정의역과 치역은 각각 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때,

정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\geq-\frac{b}{a}\right\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq c\}$

(ii) $a<0$일 때,

정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\leq-\frac{b}{a}\right\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq c\}$

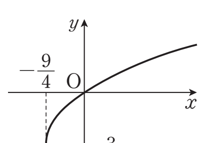
문제 풀이

문제 8

| 주안점 | 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $y=\sqrt{4x+9}-3=\sqrt{4\left(x+\frac{9}{4}\right)}-3$이므로 함수 $y=\sqrt{4x+9}-3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{9}{4}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



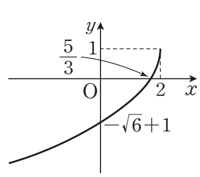
정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\geq-\frac{9}{4}\right\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\geq-3\}$

이다.

(2) $y=-\sqrt{6-3x}+1=-\sqrt{-3(x-2)}+1$이므로 함수 $y=-\sqrt{6-3x}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x\,|\,x\leq2\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\leq1\}$

이다.

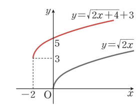
답 풀이 참조

$y=\sqrt{ax+b}+c$
$=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

❶ 일반적으로 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\,(a\neq0)$의 그래프는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형하여 그린다.

예제 3 함수 $y=\sqrt{2x+4}+3$의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

풀이 $y=\sqrt{2x+4}+3=\sqrt{2(x+2)}+3$이므로 함수 $y=\sqrt{2x+4}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq-2\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\geq3\}$이다.



답 풀이 참조

문제 8 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

(1) $y=\sqrt{4x+9}-3$　　(2) $y=-\sqrt{6-3x}+1$

문제 해결 | **추론** | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | **태도 및 실천**

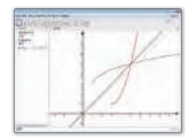
생각 넓히기

무리함수 $y=\sqrt{x-1}+3$과 그 역함수의 정의역과 치역 사이의 관계를 알아보려고 한다.

활동 ❶ 함수 $y=\sqrt{x-1}+3$의 정의역과 치역을 구해 보자.

활동 ❷ 컴퓨터 프로그램을 이용하여 주어진 함수의 역함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구해 보자.

> ❶ 입력창에 'y=sqrt(x−1)+3'과 'y=x'를 입력하고, Enter를 누른다.
> ❷ 메뉴에서 '직선에 대하여 대칭'을 클릭한 다음 함수 $y=\sqrt{x-1}+3$의 그래프와 직선 $y=x$를 차례대로 선택한다.



활동 ❸ 활동 ❶과 활동 ❷의 결과를 비교해 보고, 함수와 그 역함수의 정의역과 치역 사이의 관계를 설명해 보자.

248

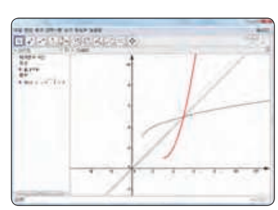
생각 넓히기

| 지도 방향 | 무리함수와 그 역함수의 그래프를 그려 보고, 함수와 그 역함수의 정의역과 치역 사이의 관계를 설명해 보게 한다.

| 풀이 | ❶ $x-1\geq0$에서 $x\geq1$이므로

함수 $y=\sqrt{x-1}+3$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq1\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq3\}$이다.

❷ 컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+3$과 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같고, 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq3\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq1\}$이다.



❸ 함수 $y=f(x)$의 정의역은 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 치역과 같고, 함수 $y=f(x)$의 치역은 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역과 같다.

답 풀이 참조

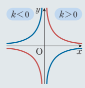
V-2. 유리함수와 무리함수

중단원 마무리하기

유리함수

(1) 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 **유리함수**라고 한다.

(2) **유리함수 $y=\frac{k}{x}\,(k\neq 0)$의 그래프**



❶ 정의역과 치역은 모두 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

❷ $k>0$이면 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 있고, $k<0$이면 그래프는 제2사분면과 제4사분면에 있다.

❸ 원점에 대하여 대칭이다.

❹ 점근선은 x축과 y축이다.

(3) **유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$의 그래프**

❶ 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

❷ 정의역은 $\{x|x\neq p$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y|y\neq q$인 실수$\}$이다.

❸ 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.

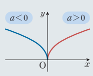
❹ 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$이다.

무리함수

(1) 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 **무리함수**라고 한다.

(2) **무리함수 $y=\sqrt{ax}\,(a\neq 0)$의 그래프**

함수 $y=\frac{x^2}{a}\,(x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



(3) **무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\,(a\neq 0)$의 그래프**

❶ 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

❷ $a>0$일 때, 정의역은 $\{x|x\geq p\}$, 치역은 $\{y|y\geq q\}$
$a<0$일 때, 정의역은 $\{x|x\leq p\}$, 치역은 $\{y|y\geq q\}$

기본

01 다음 식을 계산하시오.

(1) $\frac{x-1}{x^2-5x}-\frac{1}{x-5}$

(2) $\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\div\frac{x-2}{x^2-3x}$

02 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역, 점근선을 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{x-4}-2$

(2) $y=\frac{3x-1}{x+1}$

03 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(\sqrt{2}-\sqrt{3x-5})(\sqrt{2}+\sqrt{3x-5})$

(2) $\frac{4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}$

04 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하시오.

(1) $y=\sqrt{2x-4}$

(2) $y=\sqrt{3-x}-1$

249

중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 유리식의 뺄셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $\frac{x-1}{x^2-5x}-\frac{1}{x-5}=\frac{x-1}{x(x-5)}-\frac{x}{x(x-5)}$
$=\frac{x-1-x}{x(x-5)}=-\frac{1}{x(x-5)}$

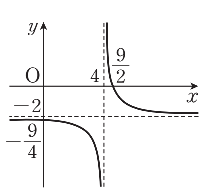
(2) $\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\div\frac{x-2}{x^2-3x}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-3)}\times\frac{x(x-3)}{x-2}$
$=\frac{x(x+2)}{x+1}$

답 (1) $-\frac{1}{x(x-5)}$ (2) $\frac{x(x+2)}{x+1}$

02

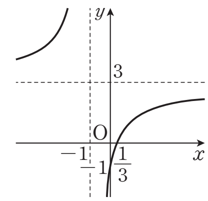
| 주안점 | 유리함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역, 점근선을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 함수 $y=\frac{1}{x-4}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\neq 4$인 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\neq -2$인 실수$\}$, 점근선은 두 직선 $x=4$와 $y=-2$이다.



(2) $y=\frac{3x-1}{x+1}=\frac{3(x+1)-4}{x+1}=-\frac{4}{x+1}+3$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\neq -1$인 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\neq 3$인 실수$\}$, 점근선은 두 직선 $x=-1$과 $y=3$이다.



답 풀이 참조

03

| 주안점 | 무리식을 간단히 할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) $(\sqrt{2}-\sqrt{3x-5})(\sqrt{2}+\sqrt{3x-5})=2-(3x-5)$
$=-3x+7$

(2) $\frac{4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}$
$=\frac{4(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}$
$=\frac{4(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}{x+4-(x+2)}=2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})$

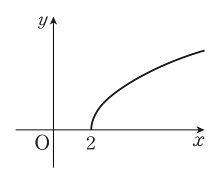
답 (1) $-3x+7$ (2) $2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})$

04

| 주안점 | 무리함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구할 수 있게 한다.

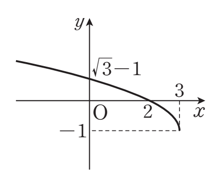
| 풀이 | (1) $y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.



(2) $y=\sqrt{3-x}-1=\sqrt{-(x-3)}-1$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\leq 3\}$, 치역은 $\{y|y\geq -1\}$이다.



답 풀이 참조

05

| 주안점 | 유리식의 덧셈을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | $\frac{a}{x-1}+\frac{x+b}{x^2+x+1}$
$=\frac{a(x^2+x+1)+(x+b)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$
$=\frac{(a+1)x^2+(a+b-1)x+a-b}{x^3-1}=\frac{2x-5}{x^3-1}$

등식의 양변에서 분자의 계수를 비교하면

$$a+1=0,\quad a+b-1=2,\quad a-b=-5$$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로 $\quad ab=-4$ 　　답 -4

06

|주안점| 유리함수의 그래프를 평행이동하여 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$이고,

$y=\dfrac{3x-2}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+3$이므로

$y=\dfrac{3x-2}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\quad a=2,\ b=1$ 　　답 $a=2,\ b=1$

07

|주안점| 그래프를 보고, 유리함수의 식과 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 그래프의 점근선이 두 직선 $x=-1$, $y=2$이므로

$$y=\frac{k}{x+1}+2\ (k\neq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

①의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{k}{0+1}+2$에서 $\quad k=-1$

따라서 $y=\dfrac{-1}{x+1}+2=\dfrac{2x+1}{x+1}$에서 $a=2,\ b=1,\ c=1$이므로 $\quad a+b+c=4$ 　　답 4

08

|주안점| 무리식의 분모를 유리화할 수 있게 한다.

|풀이| (주어진 식)

$$\begin{aligned}
&=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\
&\quad+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}\\
&\quad+\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})}\\
&=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})\\
&\quad+(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})\\
&=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}
\end{aligned}$$

답 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

09

|주안점| 무리함수의 정의역, 치역, 함숫값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $-3x+a\geq 0$에서 $\quad x\leq\dfrac{a}{3}$

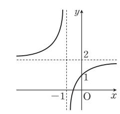
표준

05 $x\neq 1$인 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

$$\frac{a}{x-1}+\frac{x+b}{x^2+x+1}=\frac{2x-5}{x^3-1}$$

06 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$의 그래프와 일치한다고 할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

07 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.



08 다음 식을 간단히 하시오.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$$

09 함수 $f(x)=\sqrt{-3x+a}+b$의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 6\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\geq -4\}$이다. 이때 $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

250

즉, 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\leq\dfrac{a}{3}\right\}$이므로 $\dfrac{a}{3}=6$에서 $\quad a=18$

또, 치역은 $\{y\,|\,y\geq b\}$이므로 $\quad b=-4$

따라서 $f(x)=\sqrt{-3x+18}-4$이므로

$$f(3)=3-4=-1$$

답 -1

10

|주안점| 무리함수의 그래프와 역함수의 그래프 사이의 관계를 이용하여 구한 무리함수의 식에서 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $f(1)=\sqrt{a+b}=2$에서 $\quad a+b=4 \qquad \cdots\cdots ①$

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$\sqrt{2a+b}=1$, 즉 $2a+b=1 \qquad \cdots\cdots ②$

①, ②를 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=7$

답 $a=-3,\ b=7$

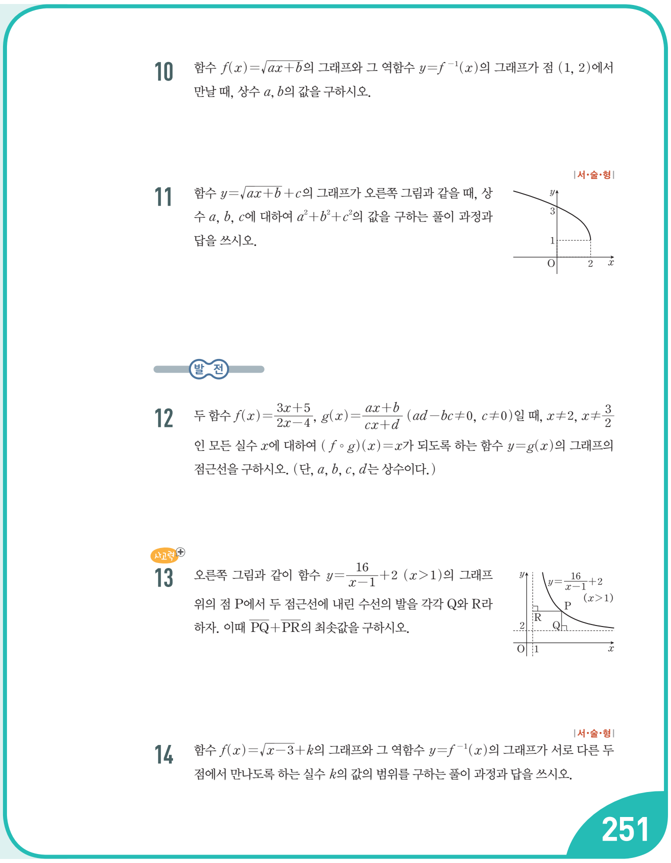
11

|주안점| 그래프를 보고, 무리함수의 식과 식의 값을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 $y=\sqrt{ax}\,(a\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$y=\sqrt{a(x-2)}+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

▶ 30 %



10 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$에서 만날 때, 상수 $a,\ b$의 값을 구하시오.

|서·술·형|

11 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발 전

12 두 함수 $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x-4}$, $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$일 때, $x\neq2,\ x\neq\dfrac{3}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$가 되도록 하는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선을 구하시오. (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 상수이다.)

사고력

13 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{16}{x-1}+2$ $(x>1)$의 그래프 위의 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 Q와 R라 하자. 이때 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최솟값을 구하시오.

|서·술·형|

14 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}+k$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

251

①의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-2a}+1,\quad \sqrt{-2a}=2,\quad a=-2$ ▶ 30 %

$a=-2$를 ①에 대입하면

$y=\sqrt{-2(x-2)}+1=\sqrt{-2x+4}+1$

이므로 $\quad b=4,\ c=1$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 값은 $\quad a^2+b^2+c^2=21$ ▶ 10 %

12

|주안점| 유리함수의 역함수와 점근선을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $(f\circ g)(x)=x$가 되려면 $y=g(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이어야 한다.

$y=\dfrac{3x+5}{2x-4}$를 x에 대하여 풀면 $\quad x=\dfrac{4y+5}{2y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $\quad y=\dfrac{4x+5}{2x-3}$

따라서 $g(x)=\dfrac{4x+5}{2x-3}=\dfrac{11}{2x-3}+2$이므로 이 함수의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=\dfrac{3}{2}$과 $y=2$이다.

답 $x=\dfrac{3}{2},\ y=2$

13

|주안점| 유리함수의 그래프, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 선분의 길이의 합의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 P의 x좌표를 $a\,(a>1)$라 하면

$$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{16}{a-1}+2\right),\quad \mathrm{Q}(a,\ 2),\quad \mathrm{R}\left(1,\ \frac{16}{a-1}+2\right)$$

따라서 $\quad \overline{PQ}=\dfrac{16}{a-1}+2-2=\dfrac{16}{a-1}>0$

$\overline{PR}=a-1>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ}+\overline{PR}=\frac{16}{a-1}+a-1$$
$$\geq2\sqrt{\frac{16}{a-1}\times(a-1)}=8$$

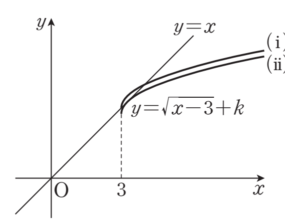
여기서 등호는 $\dfrac{16}{a-1}=a-1$, 즉 $a=5$일 때 성립한다.

따라서 구하는 최솟값은 8이다. 답 8

14

|주안점| 무리함수와 그 역함수의 그래프가 만나는 점은 무리함수의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같음을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

문제 이해 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표와 같다. ▶ 20 %



해결 과정 (i) $y=\sqrt{x-3}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 점 $(3,\ k)$가 직선 $y=x$ 위에 있으면 $k=3$이므로

$k\leq3$ ▶ 30 %

(ii) $y=\sqrt{x-3}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 한 점에서 만날 때, $\sqrt{x-3}+k=x$에서 $\quad \sqrt{x-3}=x-k$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x-3=x^2-2kx+k^2,$

$x^2-(2k+1)x+k^2+3=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+3)>0$에서

$k>\dfrac{11}{4}$ ▶ 40 %

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$\dfrac{11}{4}<k\leq3$ ▶ 10 %

대단원 평가하기

01

|평가 목표| 서로 같은 두 함수를 이용하여 상수의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $f(-1)=g(-1)$에서

$-1+a=-a+b$, 즉 $2a-b=1$ …… ①

$f(0)=g(0)$에서 $a=b$ …… ②

$f(1)=g(1)$에서 $1+a=a+b$, 즉 $b=1$

$b=1$을 ②에 대입하면 $a=1$

답 $a=1$, $b=1$

02

|평가 목표| 함수의 개념을 이해하고, 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.

|풀이| (i) $f(-1)=f(1)=-1$일 때,

$f(0)$의 값은 -1, 0, 1의 3가지

(ii) $f(-1)=f(1)=0$일 때,

$f(0)$의 값은 -1, 0, 1의 3가지

(iii) $f(-1)=f(1)=1$일 때,

$f(0)$의 값은 -1, 0, 1의 3가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는 9이다.

답 9

03

|평가 목표| 일대일대응의 뜻을 알고 주어진 함수가 일대일대응이 되도록 하는 상수 k의 값의 범위를 정할 수 있다.

|풀이| (i) $x\ge 2$일 때, $f(x)=(k+1)x+1$

(ii) $x<2$일 때, $f(x)=(k-1)x+5$

(i), (ii)에서 함수 f가 일대일대응이어야 하므로 $x\ge 2$일 때와 $x<2$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(k+1)(k-1)>0$이므로 $k<-1$ 또는 $k>1$

답 ②

04

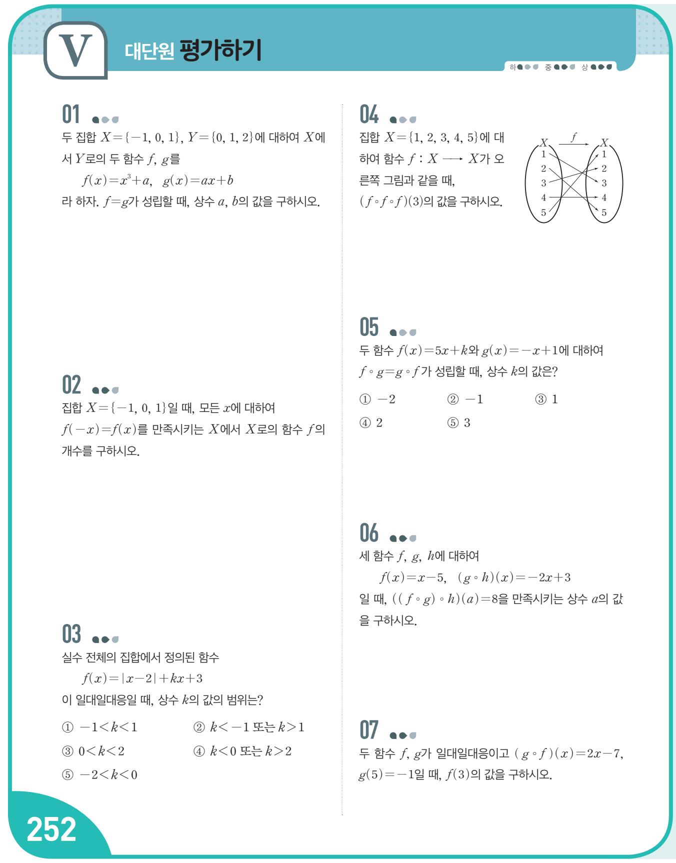
|평가 목표| 합성함수를 이해하고 함숫값을 구할 수 있다.

|풀이| $(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))$

$=f(f(2))$

$=f(5)=1$

답 1



V 대단원 평가하기

하 중 상

01

두 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{0, 1, 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 두 함수 f, g를

$f(x)=x^3+a$, $g(x)=ax+b$

라 하자. $f=g$가 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

02

집합 $X=\{-1, 0, 1\}$일 때, 모든 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 X에서 X로의 함수 f의 개수를 구하시오.

03

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=|x-2|+kx+3$

이 일대일대응일 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $-1<k<1$ ② $k<-1$ 또는 $k>1$
③ $0<k<2$ ④ $k<0$ 또는 $k>2$
⑤ $-2<k<0$

04

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f\circ f\circ f)(3)$의 값을 구하시오.

05

두 함수 $f(x)=5x+k$와 $g(x)=-x+1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$가 성립할 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

06

세 함수 f, g, h에 대하여

$f(x)=x-5$, $(g\circ h)(x)=-2x+3$

일 때, $((f\circ g)\circ h)(a)=8$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

07

두 함수 f, g가 일대일대응이고 $(g\circ f)(x)=2x-7$, $g(5)=-1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

252

05

|평가 목표| 합성함수의 성질을 이용하여 상수 k의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+1)$

$=5(-x+1)+k=-5x+k+5$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(5x+k)$

$=-(5x+k)+1=-5x-k+1$

$f\circ g=g\circ f$에서 $k+5=-k+1$이므로 $k=-2$

답 ①

06

|평가 목표| 함수의 합성에서 결합법칙이 성립함을 이용하여 상수 a의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$

$=f((g\circ h)(x))$

$=f(-2x+3)$

$=(-2x+3)-5$

$=-2x-2$

따라서 $((f\circ g)\circ h)(a)=8$에서 $-2a-2=8$이므로

$a=-5$

답 -5

08

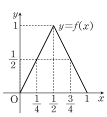
집합 $X=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 함수 $f : X \longrightarrow X$가

$$f(x)=\begin{cases} 8 & (x=2) \\ x-2 & (x\neq 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $g : X \longrightarrow X$가 $g(2)=6$, $f \circ g=g \circ f$를 만족시킬 때, $2g(4)-3g(6)$의 값을 구하시오.

09

집합 $X=\{x|0\leq x\leq 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.



$f^2=f\circ f$, $f^3=f\circ f\circ f$, $\cdots$

로 정의할 때,

$f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{10}\left(\frac{1}{4}\right)$의 값을 구하시오.

10

일차함수 f에 대하여 $f^{-1}(3)=1$, $(f\circ f)(1)=-3$일 때, $f(-2)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

11

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f : X \longrightarrow X$의 역함수가 존재하고

$$f(1)=4,\ f(3)=5,\ f^{-1}(2)=5,\ (f\circ f)(4)=4$$

일 때, $(f\circ f)(2)+(f\circ f)(5)$의 값을 구하시오.

12

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=5x+20,\quad g(x)=\begin{cases} x+25 & (x\geq 25) \\ 2x & (x<25) \end{cases}$$

에 대하여 $(f\circ g^{-1})(30)+(f^{-1}\circ g)(30)$의 값을 구하시오.

13

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(3x+1)=6x-5$가 성립할 때, 역함수는 $f^{-1}(x)=ax+b$이다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나고 $f=f^{-1}$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

253

07

|평가 목표| 일대일대응과 합성함수를 이용하여 함숫값을 구할 수 있다.

|풀이| $(g\circ f)(x)=g(f(x))=2x-7$이므로

$g(f(3))=2\times 3-7=-1$

그런데 함수 g는 일대일대응이고 $g(5)=-1$이므로

$f(3)=5$

답 5

08

|평가 목표| 합성함수를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서

$f(g(x))=g(f(x))$ $\cdots\cdots$ ①

$x=2$를 ①에 대입하면

$f(g(2))=g(f(2))$, 즉 $f(6)=g(8)=4$

$x=8$을 ①에 대입하면

$f(g(8))=g(f(8))$, 즉 $f(4)=g(6)=2$

$x=6$을 ①에 대입하면

$f(g(6))=g(f(6))$, 즉 $f(2)=g(4)=8$

따라서 $2g(4)-3g(6)=2\times 8-3\times 2=10$

답 10

09

|평가 목표| 합성함수를 이용하여 함숫값을 추론하고, 식의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$, $f^2\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,

$f^3\left(\frac{1}{4}\right)=f(1)=0$, $f^4\left(\frac{1}{4}\right)=f(0)=0$

이므로 $n\geq 3$일 때, $f^n\left(\frac{1}{4}\right)=0$

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

10

|평가 목표| 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있다.

|풀이| $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$라 하면

$f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$a+b=3$ $\cdots\cdots$ ①

$(f\circ f)(1)=-3$에서 $f(f(1))=f(3)=-3$이므로

$3a+b=-3$ $\cdots\cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=6$

따라서 $f(x)=-3x+6$이므로 $f(-2)=12$

답 ⑤

11

|평가 목표| 합성함수와 역함수의 성질을 이해하고, 함수를 추론하여 식의 값을 구할 수 있다.

|풀이| $f^{-1}(2)=5$에서 $f(5)=2$

$(f\circ f)(4)=f(f(4))=4$에서 f가 일대일대응이고,

$f(1)=4$이므로 $f(4)=1$

또, $f(3)=5$에서 $f(2)=3$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f)(2)+(f\circ f)(5)&=f(f(2))+f(f(5))\\&=f(3)+f(2)\\&=5+3=8\end{aligned}$$

답 8

12

|평가 목표| 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $g^{-1}(30)=a$라 하면 $\qquad g(a)=30$

$a \geq 25$라 하면 $a+25=30$에서 $a=5$이므로 모순이다.

따라서 $a<25$이므로

$$2a=30, \quad a=15$$

따라서 $\qquad g^{-1}(30)=15$

$$(f \circ g^{-1})(30)=f(g^{-1}(30))=f(15)$$
$$=15 \times 5+20=95$$
$$(f^{-1} \circ g)(30)=f^{-1}(g(30))=f^{-1}(55)$$

$f^{-1}(55)=b$라 하면 $\qquad f(b)=55$

$5b+20=55$에서 $b=7$이므로

$$(f \circ g^{-1})(30)+(f^{-1} \circ g)(30)=95+7=102$$

답 102

13

| 평가 목표 | 역함수를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $3x+1=t$라 하면 $x=\dfrac{t-1}{3}$이므로

$$f(t)=6 \times \frac{t-1}{3}-5, \quad f(t)=2t-7$$

즉 $f(x)=2x-7$이고, 함수 $y=f(x)$의 역함수를 구하기 위해 $y=2x-7$을 x에 대하여 풀면

$$x=\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}$$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$이므로

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{7}{2}$이므로 $\qquad a+b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}=4$

답 ④

14

| 평가 목표 | 유리함수의 그래프와 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $f(1)=2$에서

$$\frac{a+b}{1+2}=2, \quad a+b=6 \qquad \cdots\cdots ①$$

또, $f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$$\frac{2a+b}{2+2}=1, \quad 2a+b=4 \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $\qquad a=-2, b=8$

따라서 $f(x)=\dfrac{-2x+8}{x+2}$이므로

$$f(-1)=10$$

답 10

V 대단원 평가하기

15 ●●●

함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

16 ●●●

다음 **보기**의 함수 중에서 그 그래프를 평행이동하여 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 일치하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $y=\dfrac{2x-1}{x}$ ㄴ. $y=\dfrac{2x+7}{x+3}$

ㄷ. $y=\dfrac{x-3}{x-1}$ ㄹ. $y=\dfrac{-3x-7}{x+2}$

① ㄱ, ㄴ   ② ㄱ, ㄹ   ③ ㄷ, ㄹ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ   ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

17 ●●●

함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나고, 점근선이 두 직선 $x=2$, $y=1$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a-b-c$의 값을 구하시오.

18 ●●●

$-3 \leq x \leq 2$에서 함수 $y=\sqrt{7-3x}+k$의 최솟값이 2일 때, 최댓값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

19 ●●●

두 집합 A, B에 대하여

$$A=\{(x, y) \mid y=\sqrt{x+1}+1\},$$
$$B=\{(x, y) \mid y=-2x+k\}$$

일 때, $n(A \cap B)=1$을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 구하시오.

20 ●●●

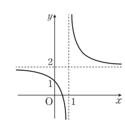
1보다 큰 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}, \quad g(x)=\sqrt{2x-1}$$

에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$의 값을 구하시오.

21 ●●●

함수 $y=\dfrac{bx+c}{ax-1}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 지나는 사분면은? (단, a, b, c는 상수이다.)



① 제1사분면, 제2사분면

② 제3사분면, 제4사분면

③ 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

④ 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면

⑤ 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

254

15

| 평가 목표 | 유리함수의 역함수를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$이므로

$y=\dfrac{2x+1}{x-3}$을 x에 대하여 풀면 $\qquad x=\dfrac{3y+1}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $\qquad y=\dfrac{3x+1}{x-2}$

따라서 $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$에서 $a=-2$, $b=3$, $c=1$이므로

$$a+b+c=2$$

답 2

16

| 평가 목표 | 유리함수의 그래프를 평행이동할 수 있다.

| 풀이 | ㄱ. $y=\dfrac{2x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}+2$이므로

$y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\dfrac{2x+7}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+2$이므로

$y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}+1$이므로

$y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\dfrac{-3x-7}{x+2}=\dfrac{-3(x+2)-1}{x+2}=-\dfrac{1}{x+2}-3$이므로 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 그래프를 평행이동하여 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

17

| 평가 목표 | 유리함수의 그래프와 점근선의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)+b-ac}{x+c}$

$=\dfrac{b-ac}{x+c}+a$

이므로 점근선은 두 직선 $x=-c$와 $y=a$이다. 즉,

$a=1,\ c=-2$

함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$, 즉 $y=\dfrac{x+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{b}{-2},\quad b=-4$

따라서 $a=1,\ b=-4,\ c=-2$이므로

$a-b-c=7$

답 7

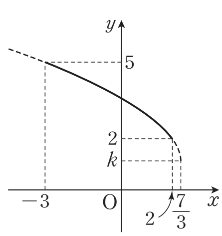
18

| 평가 목표 | 무리함수의 그래프를 이용하여 구한 무리함수의 식에서 최댓값을 구할 수 있다.

| 풀이 | 오른쪽 그림과 같이 $-3\le x\le 2$에서 함수 $y=\sqrt{7-3x}+k$는 $x=2$일 때 최솟값 2를 가지므로

$2=\sqrt{7-3\times 2}+k$

에서 $\quad k=1$



따라서 함수 $y=\sqrt{7-3x}+1$은 $x=-3$일 때 최댓값 $\sqrt{7-3\times(-3)}+1=5$를 갖는다.

답 5

19

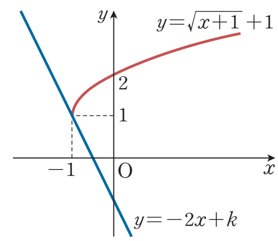
| 평가 목표 | 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

| 풀이 | $n(A\cap B)=1$을 만족시킬 때

곡선 $y=\sqrt{x+1}+1$과 직선 $y=-2x+k$의 교점의 개수는 1이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-2x+k$가 점 $(-1,\ 1)$을 지날 때 k의 값은 최소이므로

$1=2+k,\quad k=-1$



따라서 k의 최솟값은 -1이다.

답 -1

20

| 평가 목표 | 유리함수와 무리함수의 합성 및 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있다.

| 풀이 | $f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f=f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})\circ f$

$=(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}\circ f$

$=g^{-1}\circ f$

$(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(3)$이므로

$g^{-1}(3)=a$라 하면 $\quad g(a)=3$

따라서 $\sqrt{2a-1}=3,\ 2a-1=9$이므로 $\quad a=5$

답 5

21

| 평가 목표 | 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 무리함수의 그래프를 그릴 수 있다.

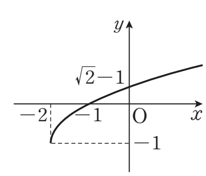
| 풀이 | 주어진 함수의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=1$, $y=2$이므로 $\quad y=\dfrac{k}{x-1}+2\ (k\neq 0)$

이 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{k}{0-1}+2,\quad k=1$

즉, $y=\dfrac{1}{x-1}+2$이므로 $\quad y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

이때 $a=1,\ b=2,\ c=-1$이므로 함수 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



따라서 그래프가 지나는 사분면으로 옳은 것은 ③이다.

답 ③

22

| 평가 목표 | 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 역함수의 함숫값을 추론하고, 식의 값을 구할 수 있다.

해결 과정 $f(2)=2$, $f(3)=1$이면 $f^2=I$이므로 모순이다.
즉, $f(2)=1$, $f(3)=2$이어야 한다. ▶ 30 %
이때 $f^3=I$이므로 역함수 g에 대하여

$$g(1)=2,\quad g(2)=3,\quad g(3)=1$$

이고, $g^3=I$이므로

$$g=g^4=g^7=\cdots,$$
$$g^2=g^5=g^8=\cdots,$$
$$g^3=g^6=g^9=\cdots$$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 $g^{13}(2)=g(2)=3$,

$$g^{14}(3)=g^2(3)=g(g(3))=g(1)=2$$

이므로 구하는 값은

$$g^{13}(2)+g^{14}(3)=3+2=5$$ ▶ 40 %

23

| 평가 목표 | 유리함수의 그래프와 그래프의 대칭성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있다.

해결 과정 주어진 함수의 그래프는 두 직선의 교점에 대해서도 대칭이다.
두 직선의 방정식

$$y=x-1,\quad y=-x+5$$

를 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$
즉, 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 점근선은 두 직선

$$x=3,\ y=2$$ ▶ 40 %

$$f(x)=\frac{k}{x-3}+2\ (k\neq 0) \quad \cdots\cdots ①$$

①의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$3=\frac{k}{1-3}+2,\quad k=-2$$

$k=-2$를 ①에 대입하면

$$f(x)=\frac{-2}{x-3}+2=\frac{2x-8}{x-3}$$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 $f(7)=\dfrac{2\times7-8}{7-3}=\dfrac{3}{2}$ ▶ 20 %

24

| 평가 목표 | 무리함수의 역함수와 그 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

22번부터 24번까지 서술형입니다.

22 ●●●
함수 f에 대하여
$f^2(x)=f(f(x))$, $f^3(x)=f(f^2(x))$, $\cdots$
로 정의하자. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수
$f: X \longrightarrow X$가 두 조건
$f(1)=3$, $f^3=I$ (I는 항등함수)
를 만족시킨다. 함수 f의 역함수를 g라 할 때, $g^{13}(2)+g^{14}(3)$의 값을 구하시오.

23 ●●●
함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나면서 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이고, 직선 $y=-x+5$에 대해서도 대칭이다. 이때 $f(7)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

24 ●●●
함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+1$에 대하여 다음에 답하시오.
(1) 역함수 $y=f^{-1}(x)$를 구하시오.
(2) 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 P와 Q라 할 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하시오.

자기평가 정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02 03	함수의 개념과 그 그래프를 이해한다.	○ △ ×	219 ~ 223쪽
04 05 06 07 08 09	함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.	○ △ ×	224 ~ 225쪽
10 11 12 13 22	역함수의 뜻을 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.	○ △ ×	227 ~ 230쪽
14 15 16 17 23	유리함수와 그 그래프의 성질을 이해하고, 그래프를 그릴 수 있다.	○ △ ×	236 ~ 241쪽
18 19 20 21 24	무리함수와 그 그래프의 성질을 이해하고, 그래프를 그릴 수 있다.	○ △ ×	243 ~ 248쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

255

(1) $y=\sqrt{x-1}+1$에서

$$y-1=\sqrt{x-1}\ (y\geq1)$$

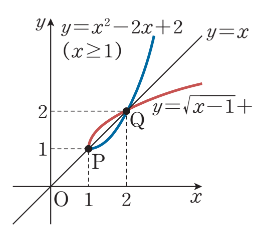
위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$y^2-2y+1=x-1,\quad x=y^2-2y+2\ (y\geq1)$$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=x^2-2x+2\ (x\geq1)$$ ▶ 40 %

(2) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

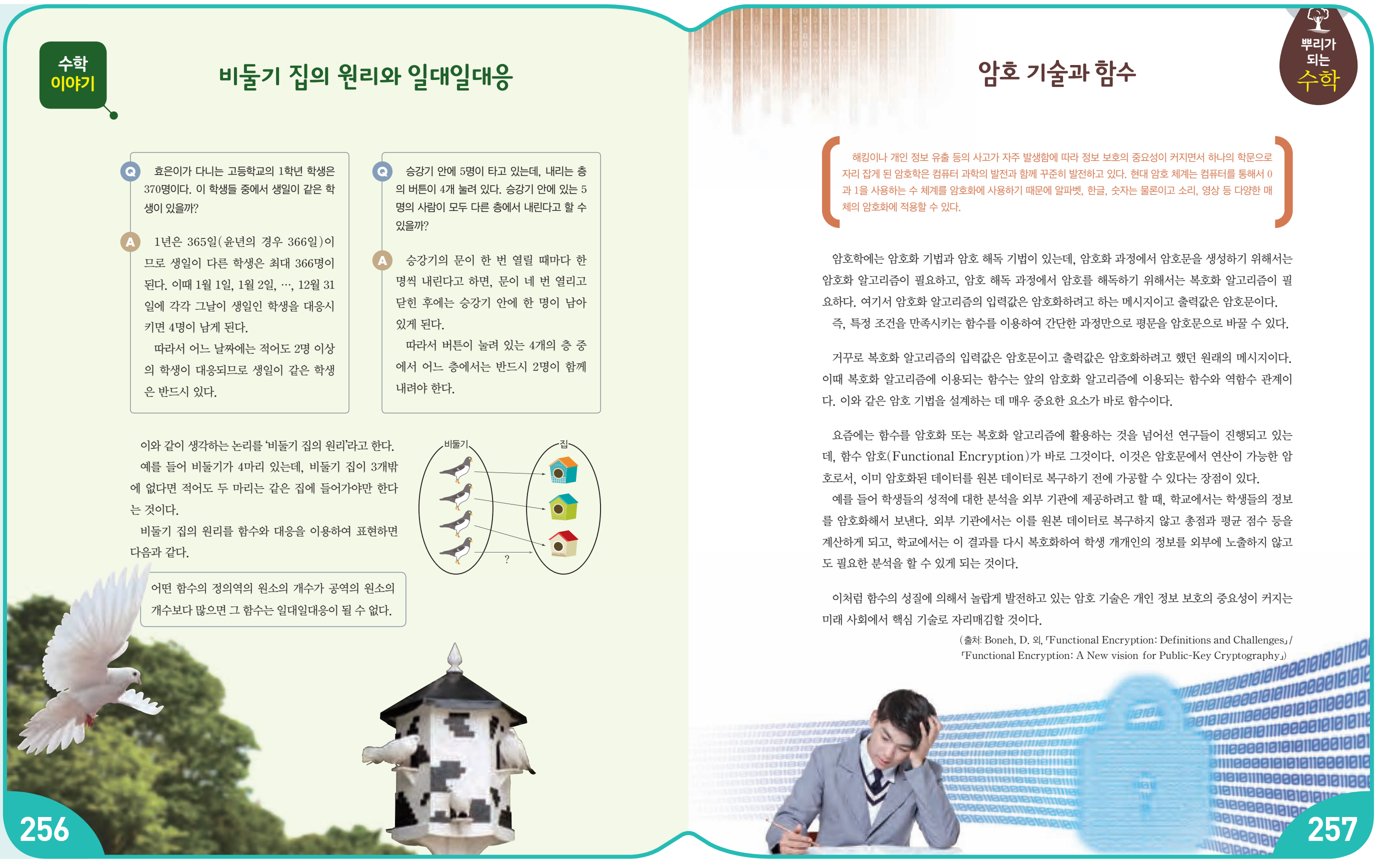


$x^2-2x+2=x$에서

$$x^2-3x+2=0,\quad (x-1)(x-2)=0$$

이므로 $x=1$ 또는 $x=2$
즉, 점 P의 좌표는 $(1,\ 1)$
점 Q의 좌표는 $(2,\ 2)$ ▶ 50 %
따라서 구하는 길이는

$$\overline{PQ}=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$ ▶ 10 %



수학 이야기

비둘기 집의 원리와 일대일대응

Q 효은이가 다니는 고등학교의 1학년 학생은 370명이다. 이 학생들 중에서 생일이 같은 학생이 있을까?

A 1년은 365일(윤년의 경우 366일)이므로 생일이 다른 학생은 최대 366명이 된다. 이때 1월 1일, 1월 2일, ⋯, 12월 31일에 각각 그날이 생일인 학생을 대응시키면 4명이 남게 된다.
따라서 어느 날짜에는 적어도 2명 이상의 학생이 대응되므로 생일이 같은 학생은 반드시 있다.

Q 승강기 안에 5명이 타고 있는데, 내리는 층의 버튼이 4개 눌려 있다. 승강기 안에 있는 5명의 사람이 모두 다른 층에서 내린다고 할 수 있을까?

A 승강기의 문이 한 번 열릴 때마다 한 명씩 내린다고 하면, 문이 네 번 열리고 닫힌 후에는 승강기 안에 한 명이 남아 있게 된다.
따라서 버튼이 눌려 있는 4개의 층 중에서 어느 층에서는 반드시 2명이 함께 내려야 한다.

이와 같이 생각하는 논리를 '비둘기 집의 원리'라고 한다.
예를 들어 비둘기가 4마리 있는데, 비둘기 집이 3개밖에 없다면 적어도 두 마리는 같은 집에 들어가야만 한다는 것이다.
비둘기 집의 원리를 함수와 대응을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

비둘기
집
?

어떤 함수의 정의역의 원소의 개수가 공역의 원소의 개수보다 많으면 그 함수는 일대일대응이 될 수 없다.

256

암호 기술과 함수

뿌리가 되는 수학

해킹이나 개인 정보 유출 등의 사고가 자주 발생함에 따라 정보 보호의 중요성이 커지면서 하나의 학문으로 자리 잡게 된 암호학은 컴퓨터 과학의 발전과 함께 꾸준히 발전하고 있다. 현대 암호 체계는 컴퓨터를 통해서 0과 1을 사용하는 수 체계를 암호화에 사용하기 때문에 알파벳, 한글, 숫자는 물론이고 소리, 영상 등 다양한 매체의 암호화에 적용할 수 있다.

암호학에는 암호화 기법과 암호 해독 기법이 있는데, 암호화 과정에서 암호문을 생성하기 위해서는 암호화 알고리즘이 필요하고, 암호 해독 과정에서 암호를 해독하기 위해서는 복호화 알고리즘이 필요하다. 여기서 암호화 알고리즘의 입력값은 암호화하려고 하는 메시지이고 출력값은 암호문이다.
즉, 특정 조건을 만족시키는 함수를 이용하여 간단한 과정만으로 평문을 암호문으로 바꿀 수 있다.

거꾸로 복호화 알고리즘의 입력값은 암호문이고 출력값은 암호화하려고 했던 원래의 메시지이다. 이때 복호화 알고리즘에 이용되는 함수는 앞의 암호화 알고리즘에 이용되는 함수와 역함수 관계이다. 이와 같은 암호 기법을 설계하는 데 매우 중요한 요소가 바로 함수이다.

요즘에는 함수를 암호화 또는 복호화 알고리즘에 활용하는 것을 넘어선 연구들이 진행되고 있는데, 함수 암호(Functional Encryption)가 바로 그것이다. 이것은 암호문에서 연산이 가능한 암호로서, 이미 암호화된 데이터를 원본 데이터로 복구하기 전에 가공할 수 있다는 장점이 있다.
예를 들어 학생들의 성적에 대한 분석을 외부 기관에 제공하려고 할 때, 학교에서는 학생들의 정보를 암호화해서 보낸다. 외부 기관에서는 이를 원본 데이터로 복구하지 않고 총점과 평균 점수 등을 계산하게 되고, 학교에서는 이 결과를 다시 복호화하여 학생 개개인의 정보를 외부에 노출하지 않고도 필요한 분석을 할 수 있게 되는 것이다.

이처럼 함수의 성질에 의해서 놀랍게 발전하고 있는 암호 기술은 개인 정보 보호의 중요성이 커지는 미래 사회에서 핵심 기술로 자리매김할 것이다.

(출처: Boneh, D. 외, 「Functional Encryption: Definitions and Challenges」/ 「Functional Encryption: A New vision for Public-Key Cryptography」)

257

수학 이야기 ➤ 비둘기 집의 원리와 일대일대응

비둘기 집의 원리는 $(n+1)$개의 물건을 n개의 상자에 넣을 때 적어도 어느 한 상자에는 두 개 이상의 물건이 들어 있다는 원리를 말하며, 보통 비둘기와 비둘기 집의 형태로 비유되어 쓰인다. 매우 당연하고 쉬운 원리처럼 보이지만, 정수론, 확률론, 조합론, 기하학 등에서 전혀 자명하지 않은 결과를 이끌어낼 수 있다.

공식적으로 비둘기 집의 원리를 제기한 사람은 독일의 수학자 디리클레(Dirichlet, J. P. G. L., 1805~1859)인데, 그는 이 원리를 '서랍 원리(Schubfachprinzip, drawer princple)'라고 하였다.

이 원리를 귀류법으로 다음과 같이 증명할 수 있다.

"n개의 비둘기 집과 $(n+1)$마리의 비둘기가 있다고 가정하자. 만약 각 비둘기 집에 한 마리 이하의 비둘기만 들어 있다면, 전체 비둘기 집에는 많아야 n마리의 비둘기가 존재한다. 그런데 비둘기는 모두 $(n+1)$마리이므로, 이것은 모순이다.

따라서 어느 비둘기 집에는 두 마리 이상의 비둘기가 들어 있다."

뿌리가 되는 수학 ➤ 암호 기술과 함수

암호문을 생성하고 해독할 때 사용되는 암호화 알고리즘과 복호화 알고리즘은 서로 역함수 관계이다. 이처럼 암호 기술과 함수는 밀접한 관계가 있다.

함수 암호는 현재 암호학계에서 가장 주목 받고 있는 최신 암호 체계이다. 함수 암호의 특징은 정보를 암호화된 상태에서 자유롭게 분석한 다음 원래 정보는 건드리지 않고 분석 결과만 뽑아낼 수 있다는 점이다.

예를 들어 온라인 영화 서비스를 제공하는 회사에서 회원 개개인이 선호하는 영화와 드라마를 모아 빅데이터 분석으로 회원별 맞춤 서비스를 제공하려면 민감한 개인 정보를 다루어야 한다. 이때 함수 암호를 활용하면 개인 정보는 안전하게 보호하면서 원하는 서비스를 제공할 수 있게 된다.

이러한 이유로 빅데이터 활용의 증가와 함께 함수 암호의 연구도 활발히 진행되고 있다.

VI 경우의 수

1. 경우의 수

이 단원에서는

합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구해 보고,
순열과 조합의 수를 구하는 방법을 알아본다.

1 단원의 개관

지도 목표

1. 경우의 수

- 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.
- 순열의 뜻을 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있게 한다.
- 조합의 뜻을 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

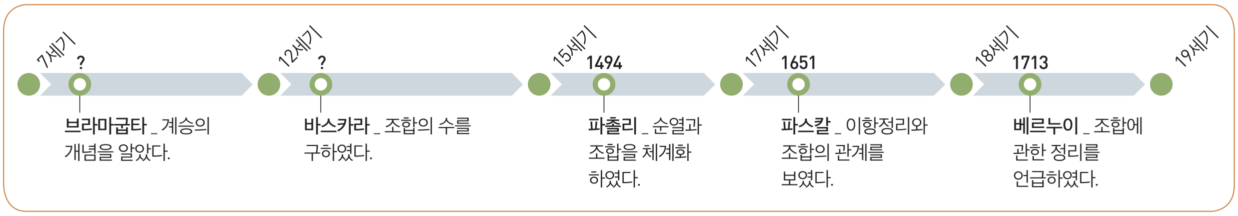
1. 경우의 수

- 합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 그 뜻을 이해하고, 두 가지 법칙이 적용되는 상황의 차이점을 설명하게 한다.
- 순열의 수와 조합의 수는 간단한 경우를 예로 제시하여 직접 나열하거나 수형도를 이용하는 등 다양한 방법으로 구하게 하고, 이를 통해 일반적으로 구하는 방법을 이해하게 한다.
- 실생활 문제를 해결해 봄으로써 다양한 상황에서 순열과 조합의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
- 경우의 수, 순열과 조합과 관련하여 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

학습 계통도

배운 내용	이 단원의 내용	배울 내용
[중학교 수학 2] • 경우의 수 • 확률	1. 경우의 수 01 경우의 수 02 순열 03 조합	[확률과 통계] • 순열과 조합 • 확률의 뜻과 활용 • 확률분포

2 단원의 이론적 배경



1 경우의 수의 역사

가능한 모든 경우의 수를 세는 문제(counting problem)를 해결하는 것은 조합론(組合論, combinatorics)으로 불리는 수학의 한 분야에 속한다. 또, 조합론은 컴퓨터 공학과 밀접한 이산수학(離散數學, discrete mathematics)의 중요한 부분이기도 하다.

경우의 수를 셈하는 것은 인류가 고대부터 행해 오던 일인데, 중국, 인도, 그리스 등에서 수천 년 전부터 연구되고 있었다.


팔괘

고대 중국의 역경(易經)에는 양효(陽爻) ━━ 와 음효(陰爻) ━ ━ 를 3개씩 조합하여 만드는 팔괘(八卦)와 팔괘를 2개씩 묶어서 만드는 육십사괘(六十四卦)가 등장하는데, 그 원리는 3개의 효로 괘를 만드는 경우의 수는 $2^3=8$이고, 6개의 효로 괘를 만드는 경우의 수는 $2^6=64$라는 사실을 바탕에 두고 있다.

인도에서 기원전 6세기에 활동한 외과의사 수슈루타(Suśhruta)는 6개의 기본 맛(단맛, 신맛, 짠맛, 쓴맛, 매운 맛, 떫은 맛)을 $63=2^6-1$가지로 조합할 수 있다고 그의 의학서 『수슈루타 삼히타(Suśruta−samhitā)』에 서술하였다. 이는 6개의 원소로 만들 수 있는 집합 가운데 공집합을 제외한 것들의 개수와 같다.

또한, 베다의 성가(Vedic Chants)에서 시의 운율(韻律, prosody)의 연구에도 경우의 수가 등장하는 것을 볼 수 있다. 기원전 5세기부터 기원전 2세기 사이에 활약한 사람으로 추정되는 핀갈라(Pingala)의 저서 『Chandahśāstra』에는 짧은(guru) 음과 긴(laghu) 음 n개의 배열이 2^n가지임을 연구했는데, 이것은 또한 2진법 연구의 기원이 되었다. 여기에서 핀갈라는 짧은 음과 긴 음을 3개 배열할 때, guru나 laghu가 3개인 것은 각각 1가지, guru 2개, laghu 1개 또는 guru 1개, laghu 2개인 것은 각각 3가지 등으로 구할 수 있음을 보였는데, 이들 경우의 수는 각각 guru를 a, laghu를 b로 나타낼 때 이항 전개식

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

의 계수와 같다.


갈릴레이

그리스의 역사학자 플루타르코스(Plutarchos, 46?∼120?)의 에세이에 따르면 히파르코스(Hipparchos, B.C. 190?∼B.C. 125?)가 10개의 단순 명제를 결합하여 만들 수 있는 긍정적 복합 명제는 101049개이고 부정적 복합 명제는 310952개임을 보였다고 한다.

갈릴레이(Galilei, G., 1564∼1642)는 도박사 친구들로부터 3개의 주사위를 던질 때 나오는 눈의 합이 9가 되는 경우의 수와 10이 되는 경우의 수가 같은데도 불구하고 실제로는 10이 되는 쪽의 확률이 큰 이유를 묻는 질문을 받았다. 이에 대하여 갈릴레이는 눈의 합이 9가 되는 경우의 수는 실제로는 25이고, 10이 되는 경우의 수는 실제로는 27이라고 설명했다.

2 순열과 조합

순열(permutation)의 수를 계산하는 것은 인도에서 시작되었는데, 7세기 인도의 수학자 브라마굽타(Brahmagupta, 598～665?)는 n개의 서로 다른 사물을 배열하는 경우의 수가

$$n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$$

임을 밝혔다. 이것은 지금의 $n!$을 뜻하며, 계승(階乘, factorial)의 개념을 말한 것이다.

12세기 인도의 수학자 바스카라(Bhaskara, A., 1114～1185(1193?))는 n개의 서로 다른 사물에서 k개를 고르는 경우의 수가 $\dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k\times(k-1)\times\cdots\times 2\times 1}$로 주어진다는 사실을 알고 있었다고 한다. 이것은 조합의 수

$${}_n\mathrm{C}_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

을 구한 것이다.

파촐리

순열과 조합에 대한 체계적 연구의 흔적은 이탈리아의 수도사였던 수학자 파촐리(Pacioli, L., 1445～1517)가 1494년 출간한 『산술, 기하학, 비례와 비례적인 것들의 대전』에서 찾을 수 있다. 그는 이 책에서 몇 명의 사람이 탁자에 앉는 경우의 수를 구하는 방법을 설명하였는데, $n!=n\times(n-1)!$임을 이용하여 귀납적 방법으로

$$11!=39916800$$

임을 보였다.

비슷한 시기에 유태인 철학자인 아브라함 이븐 에즈라(Abraham ibn Ezra, A., 1089～1167)도 n개의 서로 다른 사물에서 k개를 고르는 경우의 수를 연구했는데, 그는 특히

$$1\le k\le n\text{일 때,}\quad {}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$$

임을 보였다고 한다.

또한, 유태인 수학자이자 철학자인 거숀(Gershon, L. B., 1288～1344)은

$$1\le k\le n\text{일 때,}\quad {}_n\mathrm{P}_{k+1}=(n-k)\,{}_n\mathrm{P}_k,\quad n!=n\times(n-1)!$$

임을 보였다.

3, 4차 방정식의 해법으로 유명한 16세기 이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G., 1501～1576)와 타르탈리아(Tartaglia, N. F., 1499～1557)는 주사위 놀이와 같은 도박에서 이길 가능성을 계산하기 위하여 주사위에 관한 경우의 수를 구하는 것을 연구했는데, 이를테면 '두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 합에 내기를 걸 때 어느 쪽에 거는 것이 더 유리한가?'와 같은 문제를 해결하는 방법을 연구했다고 한다. 이것을 확률론의 시작으로 보는 견해도 있다.

또, 카르다노는 1539년의 저서 『산술 연습(Practica Arithmeticae)』에서 n개의 서로 다른 사물에서 적어도 2개 이상을 고르는 경우의 수가 2^n-1-n임을 보였는데, 이것을 현대적 기호로 나타내면

$${}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n-1-n$$

이 성립한다는 것이므로 결국 이항정리에서 얻어지는 공식

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$$

을 보인 것과 같다.

3 이항정리와 파스칼의 삼각형

파스칼(Pascal, B., 1623~1662)보다 500년 이상 앞서 아라비아의 수학자 알카라지(Al-karaji, 953~1029?)와 카얌(Khayyam, O., 1048~1131)도 파스칼의 삼각형을 언급했는데, 특히 카얌은 이항정리를 이용하여 방정식의 근을 구하는 방법을 연구했다고 한다.

알카라지

또, 13세기 중국에서도 양휘(楊輝, 1238~1298)와 주세걸(朱世杰, 1270?~1330?)이 파스칼의 삼각형을 알고 있었는데, 특히 주세걸은 『사원옥감(四元玉監)』이라는 책에서 오른쪽 그림과 같은 파스칼의 삼각형을 소개했다.

파스칼의 삼각형은 이항정리(二項定理, binomial theorem)

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_n b^n$$

의 계수 ${}_nC_r$ 사이의 관계를 나타낸 것으로 다음 그림과 같이

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

임을 삼각형 모양으로 나타낸 것이다.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & {}_0C_0 & & & & & \\
 & & & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & & & \\
 & & & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & & & \\
 & & {}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 & & \\
 & {}_4C_0 & & {}_4C_1 & & {}_4C_2 & & {}_4C_3 & & {}_4C_4 & \\
{}_5C_0 & & {}_5C_1 & & {}_5C_2 & & {}_5C_3 & & {}_5C_4 & & {}_5C_5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

파스칼

파스칼은 페르마(Fermat. P., 1601~1665)와 함께 확률론을 창시한 인물인데, 위의 이항정리는 확률론에서 등장하는 이항분포(二項分布, binomial distribution)와 밀접한 관계가 있다.

파스칼의 시대인 17세기에는 도박이 유행했는데, 도박사인 드메레(de Mere, C.)로부터 상금이 걸린 게임이 중도에 중단되었을 때 상금의 분배 문제를 해결해 달라는 부탁을 받고 페르마와의 서신 왕래를 통하여 이에 대한 연구를 한 것이 확률론의 시작이 되었다.

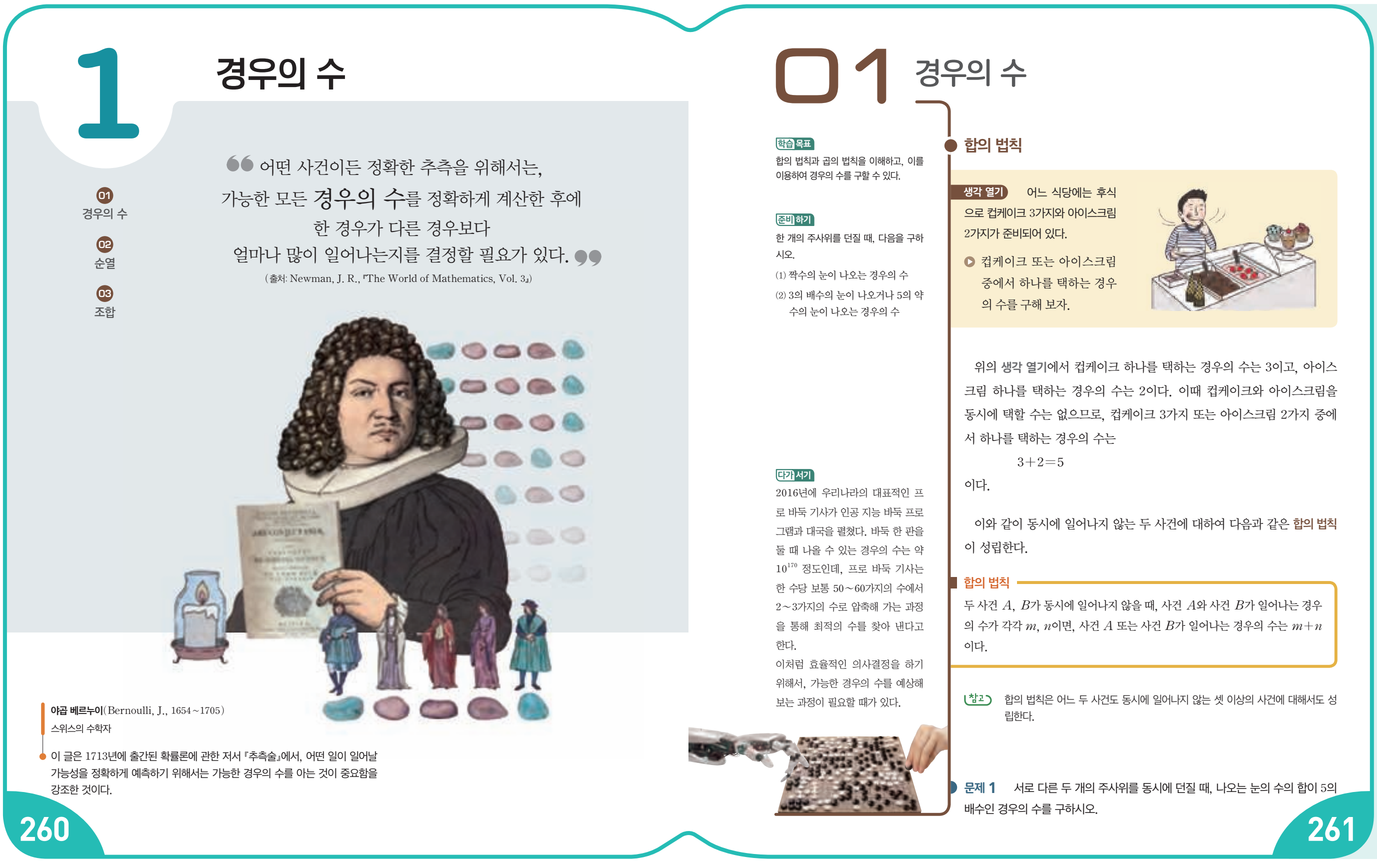
참고 문헌

- Merzbach, U. C., Boyer, C., 『A History of Mathematics, 3rd Edition』, John Wiley & Sons, 2011.
- Ben−Menahem, A., 『Historical Encyclopedia of Natural and Mathematical Sciences』, Springer Verlag, 2009.
- Wilson, R., Watkins, J., 『Combinatorics: Ancient & Modern』, Oxford, 2013.

3 단원의 지도 계획

중단원	소단원	차시 (총 10차시)	교과서 쪽 수	지도 내용	용어와 기호
1. 경우의 수	01 경우의 수	3	261~264	• 합의 법칙 • 곱의 법칙	합의 법칙 곱의 법칙
			265	• 수학 이야기	
	02 순열	2	266~269	• 순열	순열, 계승, $_n\mathrm{P}_r$, $n!$
	03 조합	2	270~272	• 조합	조합, $_n\mathrm{C}_r$
	중단원 마무리	1	273~275	• 중단원 마무리하기	
대단원 마무리		2	276~277	• 대단원 평가하기	
			278	• 수학 이야기	
			279	• 뿌리가 되는 수학	

※ 실제 지도는 학교의 실정에 따라 알맞게 계획하고 재수정할 수 있다.



1 경우의 수

01 경우의 수
02 순열
03 조합

“어떤 사건이든 정확한 추측을 위해서는,
가능한 모든 **경우의 수**를 정확하게 계산한 후에
한 경우가 다른 경우보다
얼마나 많이 일어나는지를 결정할 필요가 있다.”
(출처: Newman, J. R., 『The World of Mathematics, Vol. 3』)

야곱 베르누이(Bernoulli, J., 1654~1705)
스위스의 수학자

이 글은 1713년에 출간된 확률론에 관한 저서 『추측술』에서, 어떤 일이 일어날 가능성을 정확하게 예측하기 위해서는 가능한 경우의 수를 아는 것이 중요함을 강조한 것이다.

260

01 경우의 수

학습 목표
합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

준비하기
한 개의 주사위를 던질 때, 다음을 구하시오.
(1) 짝수의 눈이 나오는 경우의 수
(2) 3의 배수의 눈이 나오거나 5의 약수의 눈이 나오는 경우의 수

다가서기
2016년에 우리나라의 대표적인 프로 바둑 기사가 인공 지능 바둑 프로그램과 대국을 펼쳤다. 바둑 한 판을 둘 때 나올 수 있는 경우의 수는 약 10^{170} 정도인데, 프로 바둑 기사는 한 수당 보통 50~60가지의 수에서 2~3가지의 수로 압축해 가는 과정을 통해 최적의 수를 찾아 낸다고 한다.
이처럼 효율적인 의사결정을 하기 위해서, 가능한 경우의 수를 예상해 보는 과정이 필요할 때가 있다.

합의 법칙

생각 열기 어느 식당에는 후식으로 컵케이크 3가지와 아이스크림 2가지가 준비되어 있다.
▶ 컵케이크 또는 아이스크림 중에서 하나를 택하는 경우의 수를 구해 보자.

위의 **생각 열기**에서 컵케이크 하나를 택하는 경우의 수는 3이고, 아이스크림 하나를 택하는 경우의 수는 2이다. 이때 컵케이크와 아이스크림을 동시에 택할 수는 없으므로, 컵케이크 3가지 또는 아이스크림 2가지 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

$$3+2=5$$

이다.

이와 같이 동시에 일어나지 않는 두 사건에 대하여 다음과 같은 **합의 법칙**이 성립한다.

합의 법칙
두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

참고 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

문제 1 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우의 수를 구하시오.

261

중단원 도입

경우의 수를 셈하는 것은 인류가 고대부터 행해 오던 일인데, 이는 조합론(組合論, combinatorics)으로 불리는 수학의 한 분야에 속한다.
이 단원에서는 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하는 것을 배우고, 순열과 조합의 뜻과 그 관계를 알아본다.

야곱 베르누이

야곱 베르누이(Bernoulli, J., 1654~1705)는 대대로 수학자를 배출한 스위스 베르누이 가문에서 니콜라스 베르누이(Bernoulli, N., 1687~1759)의 첫째 아들로, 동생 요한 베르누이(Bernoulli, John, 1667~1748)와 경쟁하면서 미적분학을 발전시키는 등 많은 수학적 업적을 이루었다.
그의 사후인 1713년에 출간된 『추측술(Ars Conjectandi)』은 베르누이 시행, 베르누이 수 등 중요한 결과를 처음 다루어 확률론의 실질적 출발로서 그를 유명하게 만들었다.

소단원 지도 개관

지도 목표

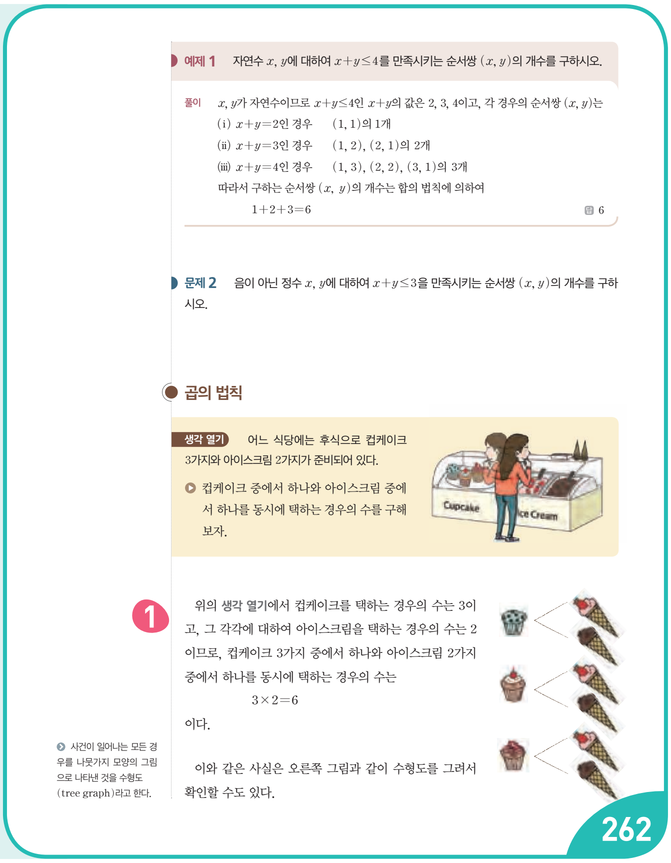
① 경우의 수에서 합의 법칙을 이해할 수 있게 한다.
② 경우의 수에서 곱의 법칙을 이해할 수 있게 한다.
③ 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통하여 이해하고 확인하게 한다.
② 합의 법칙과 곱의 법칙은 두 가지 방법이 적용되는 상황의 차이점을 설명하게 한다.
③ 경우의 수와 관련하여 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.
④ 실생활 문제를 해결해 봄으로써 다양한 상황에서 합의 법칙과 곱의 법칙의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

용어와 기호

- 합의 법칙
- 곱의 법칙



예제 1 자연수 x, y에 대하여 $x+y\le4$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

풀이 x, y가 자연수이므로 $x+y\le4$인 $x+y$의 값은 2, 3, 4이고, 각 경우의 순서쌍 (x, y)는

(i) $x+y=2$인 경우 $(1, 1)$의 1개

(ii) $x+y=3$인 경우 $(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(iii) $x+y=4$인 경우 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$1+2+3=6$ 답 6

문제 2 음이 아닌 정수 x, y에 대하여 $x+y\le3$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

곱의 법칙

생각 열기 어느 식당에는 후식으로 컵케이크 3가지와 아이스크림 2가지가 준비되어 있다.

▶ 컵케이크 중에서 하나와 아이스크림 중에서 하나를 동시에 택하는 경우의 수를 구해 보자.

1 위의 생각 열기에서 컵케이크를 택하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 아이스크림을 택하는 경우의 수는 2이므로, 컵케이크 3가지 중에서 하나와 아이스크림 2가지 중에서 하나를 동시에 택하는 경우의 수는

$3\times2=6$

이다.

이와 같은 사실은 오른쪽 그림과 같이 수형도를 그려서 확인할 수도 있다.

사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 것을 수형도(tree graph)라고 한다.

262

준비하기

|주안점| 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) 짝수의 눈이 나오는 경우 2, 4, 6의 3가지

(2) 3의 배수의 눈이 나오는 경우 3, 6의 2가지

5의 약수의 눈이 나오는 경우 1, 5의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는 $2+2=4$

답 (1) 3 (2) 4

합의 법칙

평가 기준

상	합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 활용하여 경우의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
하	간단한 상황에서 경우의 수를 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 동시에 일어나지 않는 두 사건에서 하나를 택하는 경우의 수를 구하는 방법을 이해하게 한다.

▶ $3+2=5$

문제 풀이

문제 1

|주안점| 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우는 5, 10이므로

(i) 5인 경우 $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4가지

(ii) 10인 경우 $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+3=7$ 답 7

문제 2

|주안점| 합의 법칙을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x+y\le3$인 $x+y$의 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 경우의 순서쌍 (x, y)는

(i) $x+y=0$인 경우 $(0, 0)$의 1개

(ii) $x+y=1$인 경우 $(0, 1)$, $(1, 0)$의 2개

(iii) $x+y=2$인 경우 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$의 3개

(iv) $x+y=3$인 경우 $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$의 4개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는 합의 법칙에 의하여 $1+2+3+4=10$ 답 10

곱의 법칙

생각 열기

|지도 방향| 동시에 일어나는 사건에서 경우의 수를 구하는 방법을 이해하게 한다.

▶ $3\times2=6$

내용 연구

1 하나를 택하는 각각의 경우에 다른 하나를 택하는 경우의 수가 같을 때, 두 가지를 택하는 경우의 수는 각 경우의 수의 곱과 같음을 알게 한다.

|오개념 바로잡기| 컵케이크 3가지 중에서 하나와 아이스크림 2가지 중에서 하나를 '동시에 택하는' 경우의 수를 곱의 법칙에 따라서 구한다고 했으나, 이는 컵케이크 3가지 중에서 하나를 택하고 그 각각에 대하여 아이스크림 2가지 중에서 하나를 택하는 것과도 같은 결과이므로 곱의 법칙은 두 사건이 '잇달아 일어나는' 경우에도 적용됨을 이해하게 한다.

문제 풀이

문제 3

| 주안점 | 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 꽃병을 택하는 경우의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 장미 한 송이를 택하는 경우의 수는 4이다.

따라서 꽃병 한 개와 장미 한 송이를 동시에 택하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times4=8$

답 8

문제 4

| 주안점 | 곱의 법칙을 이용하여 세 사건이 동시에 일어나는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 티셔츠를 택하는 경우의 수는 4이고, 그 각각에 대하여 바지를 택하는 경우의 수는 3, 또 그 각각에 대하여 점퍼를 택하는 경우의 수는 2이다.

따라서 곱의 법칙은 동시에 일어나는 세 사건에 대해서도 성립하므로 구하는 경우의 수는 $4\times3\times2=24$

답 24

문제 5

| 주안점 | 곱의 법칙과 소인수분해를 이용하여 자연수의 약수의 개수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 54를 소인수분해하면 $54=2\times3^3$

2의 약수는 1, 2의 2개

3^3의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3$의 4개

이 중에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 54의 약수이므로 구하는 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times4=8$

(2) 216을 소인수분해하면 $216=2^3\times3^3$

2^3의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$의 4개

3^3의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3$의 4개

이 중에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 216의 약수이므로 구하는 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times4=16$

답 (1) 8 (2) 16

| 참고 | 자연수 n을 소인수분해한 것이

$n=p^{\alpha}\times q^{\beta}\times r^{\gamma}\times\ \cdots$

($p,\ q,\ r,\ \cdots$ 는 소수이고, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$ 는 자연수)

이면 n의 약수의 개수는 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\times\ \cdots$ 이다.

문제 6

| 주안점 | 합의 법칙과 곱의 법칙을 활용하여 도로를 지나가는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

이와 같이 동시에 일어나는 두 사건에 대하여 다음과 같은 **곱의 법칙**이 성립한다.

곱의 법칙은 두 사건이 잇달아 일어나는 경우에도 성립한다.

곱의 법칙

두 사건 $A,\ B$에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 $A,\ B$가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

참고 곱의 법칙은 동시에 일어나는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

문제 3 서로 다른 꽃병 2개와 장미 4송이가 있다. 꽃병에 장미를 꽂기 위해서 꽃병 한 개와 장미 한 송이를 동시에 택하는 경우의 수를 구하시오.

문제 4 민서는 서로 다른 종류의 티셔츠, 바지, 점퍼를 각각 4개, 3개, 2개 가지고 있다. 민서가 이 중에서 티셔츠, 바지, 점퍼를 각각 하나씩 택하여 입는 경우의 수를 구하시오.

예제 2 200의 약수의 개수를 구하시오.

$\times$	1	5	5^2
1	1	5	5^2
2	2	2×5	2×5^2
2^2	2^2	$2^2\times5$	$2^2\times5^2$
2^3	2^3	$2^3\times5$	$2^3\times5^2$

풀이 200을 소인수분해하면 $200=2^3\times5^2$

2^3의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$의 4개

5^2의 약수는 $1,\ 5,\ 5^2$의 3개

이 중에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 200의 약수가 된다.

따라서 구하는 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3=12$

답 12

문제 5 다음 수의 약수의 개수를 구하시오.

(1) 54 (2) 216

263

| 풀이 | (i) $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{D}$인 경우 $1\times3=3$

(ii) $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{C}\rightarrow\mathrm{D}$인 경우 1

(iii) $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{C}\rightarrow\mathrm{D}$인 경우 $2\times1=2$

(iv) $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{C}\rightarrow\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{D}$인 경우 $2\times1\times3=6$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$3+1+2+6=12$

답 12

지도 자료

1. 집합으로 설명하는 합의 법칙

두 사건 $A,\ B$가 일어나는 경우의 집합을 각각 $A,\ B$라 하면

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

두 사건 $A,\ B$가 동시에 일어나지 않으면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

2. 곱의 법칙

두 사건 $A,\ B$가 일어나는 경우의 집합을 각각 $A,\ B$라 하면 두 사건 $A,\ B$가 동시에 일어나는 경우의 수는 A와 B의 곱집합 $A\times B$의 원소의 개수와 같다.

이때 $A\times B=\{(a,\ b)\,|\,a\in A,\ \ b\in B\}$이므로

$n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

예제 3 어느 휴양림에는 오른쪽 그림과 같이 야영장에서 대피소로 가는 길이 3가지, 대피소에서 정상으로 가는 길이 4가지, 야영장에서 정상으로 바로 가는 길이 2가지가 있다. 세 지점 중에서 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않는다고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 야영장에서 대피소를 거쳐 정상까지 가는 경우의 수

(2) 야영장에서 정상까지 가는 모든 경우의 수

풀이 (1) 야영장에서 대피소로 가는 길은 3가지, 대피소에서 정상으로 가는 길은 4가지이므로, 곱의 법칙에 의하여 야영장에서 대피소를 거쳐 정상까지 가는 경우의 수는

$3\times4=12$

(2) 야영장에서 대피소를 거쳐 정상으로 가는 경우의 수는 12, 야영장에서 정상으로 바로 가는 경우의 수는 2이다. 이때 두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로, 합의 법칙에 의하여 야영장에서 정상까지 가는 모든 경우의 수는

$12+2=14$

답 (1) 12 (2) 14

문제 6 오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로망이 있다. 주어진 도로를 이용하여 A 지점에서 D 지점까지 가는 경우의 수를 구하시오.

(단, 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않는다.)

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음은 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 홀수인 경우의 수를 구하는 방법에 대하여 민지와 정우가 나눈 대화이다.

활동 ❶ 민지의 방법으로 경우의 수를 구해 보자.

활동 ❷ 정우의 방법으로 경우의 수를 구하고, 민지의 방법으로 구한 결과와 비교해 보자.

264

수학 이야기

아브라카다브라와 경우의 수

우리나라의 마술사들은 '수리수리 마하수리'라는 주문을 외우는데, 이 말은 불교 경전의 하나인 『천수경』의 첫 구절에서 유래한 것으로 '잘 이루어진다'라는 뜻이라고 한다.

반면에 서양의 마술사들은 'Abracadabra'라는 주문을 외우는데, 이 말은 '말한 대로 이루어진다'라는 뜻을 가진 히브리어에서 유래된 것으로 병이나 재앙을 물리치는 데 효과가 있다고 하여 과거 주술사들이 열병을 다스릴 때 외웠다고 전해진다. 또, 왼쪽 그림과 같이 역삼각형 모양에 글자를 하나씩 배열하여 장식품이나 목걸이를 만들어 부적처럼 몸에 지니기도 했다.

헝가리 태생으로 미국의 스탠퍼드 대학교에서 수학 교수를 지낸 폴리아(Pólya, G., 1887~1985)는 아브라카다브라와 관련된 다음과 같은 문제를 제시했다.

오른쪽 그림에서 가장 위에 있는 글자 A에서 시작하여 아래로 내려가면서 바로 이웃한 글자를 하나씩 택하여 ABRACADABRA라는 단어를 만들 수 있는 서로 다른 방법은 모두 몇 가지일까?

이 문제의 그림에서 각 문자의 위치를 점으로 나타내고 가장 위쪽에 있는 점 A부터 시작하여 그 아래에 있는 각 점까지 도달하는 경우의 수를 차례대로 구하면, 단어를 만들 수 있는 방법은 오른쪽 그림과 같이 모두 252가지가 있음을 알 수 있다.

265

생각 넓히기

|지도 방향| 하나의 상황에서 합의 법칙과 곱의 법칙을 적용하여 문제를 해결하는 방법을 설명해 보게 한다.

|풀이| ❶ (i) 합이 3인 경우 (1, 2), (2, 1)의 2가지

(ii) 합이 5인 경우 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

(iii) 합이 7인 경우 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지

(iv) 합이 9인 경우 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지

(v) 합이 11인 경우 (5, 6), (6, 5)의 2가지

(i)~(v)에서 합의 법칙에 의하여 눈의 수의 합이 홀수인 경우의 수는 $2+4+6+4+2=18$

❷ 짝수의 눈이 나오는 경우의 수는 3이고, 홀수의 눈이 나오는 경우의 수는 3이므로 곱의 법칙에 의하여

(짝수, 홀수)인 경우의 수는 $3\times3=9$

(홀수, 짝수)인 경우의 수는 $3\times3=9$

이때 두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로, 합의 법칙에 의하여 눈의 수의 합이 홀수인 경우의 수는

$9+9=18$

따라서 민지의 방법으로 구한 결과와 서로 같다.

답 ❶ 18

❷ 18, 서로 같다.

수학 이야기 아브라카다브라와 경우의 수

Abracadabra는 로마의 학자 사모니쿠스(Sammonicus, Q. S., ?~212)가 쓴 시 「Praecepta de Medicina」에 처음 등장하는데, 그는 Abracadabra를 양피지에 삼각형 모양으로 써야 한다고 가르쳤다고 한다.

교과서 265쪽에서 Abracadabra라는 단어를 만드는 경우의 수를 구하기 위하여 제시한 숫자는 각 단계의 문자에 이르는 경우의 수를 나타낸 것인데, 이것은 합의 법칙에 따라 전 단계의 문자에 이르는 경우의 수의 합으로 구해진다.

이를테면 그림에서 ABRA의 맨 끝 A에 이르는 경우의 수는 전 단계 R에 이르는 경우의 수의 합으로, 그림의 4번째 줄에서 각 A가 나오는 경우의 수 1, 3, 3, 1은 각각 전 단계 R에 이르는 경우의 수의 합과 같다.

02 순열

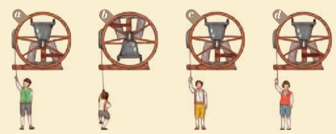
학습 목표
순열의 뜻을 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다.

준비하기
두 자리 자연수 중에서 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 서로 다른 자연수의 개수를 구하시오.

다가서기
바다를 항해하는 배는 깃발을 이용하여 신호를 보내기도 한다. 이때 서로 다른 깃발을 나열하는 순서에 따라 여러 가지 신호를 만들어 항해에 필요한 정보를 전달할 수 있다.
이처럼 서로 다른 것 중에서 일부를 택하여 나열할 때, 순서를 고려해야 하는 경우가 있다.

● 순열

생각 열기 영국에는 일렬로 배치된 교회의 종들을 이용하여 음악을 연주하는 '전조명종술'이라는 기술이 전해지고 있다. 다음 그림은 음색이 서로 다른 네 개의 종 a, b, c, d 중에서 종 b를 친 것을 나타낸다.



▶ 네 개의 종 중에서 서로 다른 두 개를 택하여 순서대로 치는 경우의 수를 구해 보자.

위의 생각 열기에서 첫 번째 종을 택하는 경우는 a, b, c, d의 4가지이고 그 각각에 대하여 두 번째 종을 택하는 경우는 첫 번째 종을 제외한 3가지이므로, 네 개의 종 중에서 서로 다른 두 개를 택하여 순서대로 치는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$4\times3=12$$

이다. 오른쪽 수형도에서와 같이 서로 다른 두 개의 종을 순서대로 치는 경우를 모두 나열하면 12가지가 있음을 알 수 있다.

a — b, c, d
b — a, c, d
c — a, b, d
d — a, b, c

일반적으로 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하며, 이 순열의 수를 기호로

$$_{n}\mathrm{P}_{r}$$

와 같이 나타낸다.

◀ $_{n}\mathrm{P}_{r}$의 P는 순열을 뜻하는 permutation의 첫 글자이다.

순열의 수 $_{n}\mathrm{P}_{r}$를 구하는 방법을 알아보자.

서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 나열할 때, 첫 번째 자리에 올 수 있는 것은 n가지이고 그 각각에 대하여 두 번째 자리에 올 수 있는 것은 첫 번째 자리에 놓인 것을 제외한 $(n-1)$가지이다. 이와 같이 차례대로 생각하면 r번째 자리에 올 수 있는 것은 $n-(r-1)$, 즉 $(n-r+1)$가지이다.

첫 번째	두 번째	세 번째	…	r번째
↑	↑	↑		↑
n가지	$(n-1)$가지	$(n-2)$가지	…	$(n-r+1)$가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 다음이 성립한다.

1

$$_{n}\mathrm{P}_{r}=\underbrace{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r개}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$_{n}\mathrm{P}_{r}$: n 서로 다른 것의 개수, r 택하는 것의 개수

순열의 수 (1)
서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는
$$_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$$

보기 $_{6}\mathrm{P}_{3}=6\times5\times4=120$

문제 1 다음 값을 구하시오.

(1) $_{7}\mathrm{P}_{2}$ (2) $_{5}\mathrm{P}_{4}$ (3) $_{8}\mathrm{P}_{3}$

서로 다른 n개에서 n개를 모두 택하는 순열의 수는

$$_{n}\mathrm{P}_{n}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

이다. 여기서 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 **계승**이라 하며, 이것을 기호로

$$n!$$

과 같이 나타낸다. 즉,

$$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

이다. 따라서 $_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$이다.

▶ n!은 'n의 계승(階乘)' 또는 'n factorial'이라고 읽는다.

소단원 지도 개관

지도 목표

① 순열의 뜻을 이해할 수 있게 한다.
② 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 순열의 수는 간단한 경우를 예로 제시하여 직접 나열하거나 수형도를 이용하는 등 다양한 방법으로 구하게 하고, 이를 통하여 일반적으로 구하는 방법을 이해하게 한다.
② 순열과 관련하여 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.
③ 실생활 문제를 해결해 봄으로써 다양한 상황에서 순열의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

용어와 기호

• 순열(順列, permutation)
• 계승(階乘, factorial)
• $_{n}\mathrm{P}_{r}$
• $n!$

준비하기

|주안점| 자릿수가 다른 두 자리 자연수의 개수를 구할 수 있는지 확인한다.

|풀이| 십의 자리 숫자를 택하는 경우는 9가지이고, 일의 자리 숫자를 택하는 경우는 0, 1, 2, …, 9 중에서 십의 자리 숫자를 제외한 9가지이다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$$9\times9=81$$
답 81

● 순열

평가 기준

상	순열의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	순열의 뜻을 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다.
하	순열의 뜻을 말할 수 있고, 간단한 상황에서 순열의 수를 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 순서대로 종을 치는 경우의 수를 구하게 함으로써 순열에 대한 흥미를 갖게 하고, 순열의 뜻을 생각해 보게 한다.

▶ $4\times3=12$

한편, $0<r<n$일 때 순열의 수 ${}_{n}P_{r}$를 계승을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}{}_{n}P_{r}&=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)(n-r)\times\cdots\times3\times2\times1}{(n-r)\times\cdots\times3\times2\times1}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

$0!=1$이면 ${}_{n}P_{n}=n!=\frac{n!}{0!}$

${}_{n}P_{0}=1$이면 ${}_{n}P_{0}=1=\frac{n!}{n!}$

2 여기서 $0!=1$, ${}_{n}P_{0}=1$로 정의하면, 위의 등식은 $r=n$과 $r=0$일 때도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

순열의 수 (2)

1. ${}_{n}P_{n}=n!$, $0!=1$, ${}_{n}P_{0}=1$
2. ${}_{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

보기 ${}_{8}P_{4}=\frac{8!}{(8-4)!}=\frac{8!}{4!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=1680$

문제 2 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{5}P_{5}$ (2) $0!\times3!$ (3) ${}_{4}P_{0}$ (4) $4!\times{}_{6}P_{2}$

예제 1 $1\le r\le n$일 때, 등식 ${}_{n}P_{r}=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함을 증명하시오.

증명 1 $n\times{}_{n-1}P_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!}={}_{n}P_{r}$

따라서 ${}_{n}P_{r}=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$이 성립한다.

증명 2 ${}_{n}P_{r}$는 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이다.

n개에서 한 개를 택하는 경우는 n가지이고, 그 각각에 대하여 하나를 택하고 남은 $(n-1)$개에서 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{n-1}P_{r-1}$이다.

따라서 곱의 법칙에 의하여 ${}_{n}P_{r}=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$이 성립한다.

문제 3 $1\le r<n$일 때, 등식 ${}_{n}P_{r}={}_{n-1}P_{r}+r\times{}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함을 증명하시오.

268

내용 연구

1 순열은 서로 다른 것을 차례대로 나열하는 경우의 수이고, 한 번 나열한 것을 다시 쓸 수 없으므로

$${}_{n}P_{r}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$$

이다. 즉, ${}_{n}P_{r}$는 n부터 시작하여 1만큼씩 작은 자연수를 차례대로 r개 곱한 것이다.

| 오개념 바로잡기 | ${}_{n}P_{r}$에서 마지막 인수는 $(n-r)$가 아니고 $(n-r+1)$임을 유의하게 한다.

2 $0!=1$, ${}_{n}P_{0}=1$로 정의하면

$${}_{n}P_{0}=1=\frac{n!}{(n-0)!},\quad {}_{n}P_{n}=n!=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{(n-n)!}$$

이므로 $r=0$일 때나 $r=n$일 때도 ${}_{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$이 성립함을 확인하게 한다.

문제 풀이

문제 1

| 주안점 | 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) ${}_{7}P_{2}=7\times6=42$

(2) ${}_{5}P_{4}=5\times4\times3\times2=120$

(3) ${}_{8}P_{3}=8\times7\times6=336$

답 (1) 42 (2) 120 (3) 336

문제 2

| 주안점 | 여러 가지 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) ${}_{5}P_{5}=5!=120$

(2) $0!\times3!=1\times6=6$

(3) ${}_{4}P_{0}=\frac{4!}{4!}=1$

(4) $4!\times{}_{6}P_{2}=4!\times\frac{6!}{4!}=720$

답 (1) 120 (2) 6 (3) 1 (4) 720

문제 3

| 주안점 | 순열의 수에 대한 등식을 증명할 수 있게 한다.

| 증명 1 | ${}_{n-1}P_{r}+r\times{}_{n-1}P_{r-1}$

$$\begin{aligned}&=\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\times\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\\&=\frac{(n-r)(n-1)!+r(n-1)!}{(n-r)!}\\&=\frac{n(n-1)!}{(n-r)!}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\\&={}_{n}P_{r}\end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$${}_{n}P_{r}={}_{n-1}P_{r}+r\times{}_{n-1}P_{r-1}$$

| 증명 2 | ${}_{n}P_{r}$는 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 다음의 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 나열할 r개 중에서 n이 포함되지 않는 경우

n을 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{n-1}P_{r}$이다.

(ii) 나열할 r개 중에서 n이 포함되는 경우

n을 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수가 ${}_{n-1}P_{r-1}$이고 각 경우에 대하여 n을 이미 배열된 $(r-1)$개의 앞, 뒤나 사이에 배열하는 방법이 r가지이므로 그 경우의 수는 $r\times{}_{n-1}P_{r-1}$이다.

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로, 합의 법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$${}_{n}P_{r}={}_{n-1}P_{r}+r\times{}_{n-1}P_{r-1}$$

문제 풀이

문제 4

|주안점| 순열의 수를 활용하여 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 서로 이웃한 두 개의 숫자를 하나로 생각하고, 이것과 세 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이다. 이때 각 경우에 대하여 두 개의 숫자의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$4!\times2!=24\times2=48$$

(2) 문자와 숫자를 교대로 나열하는 경우는 다음과 같이 문자 사이에 숫자를 하나씩 나열해야 한다.

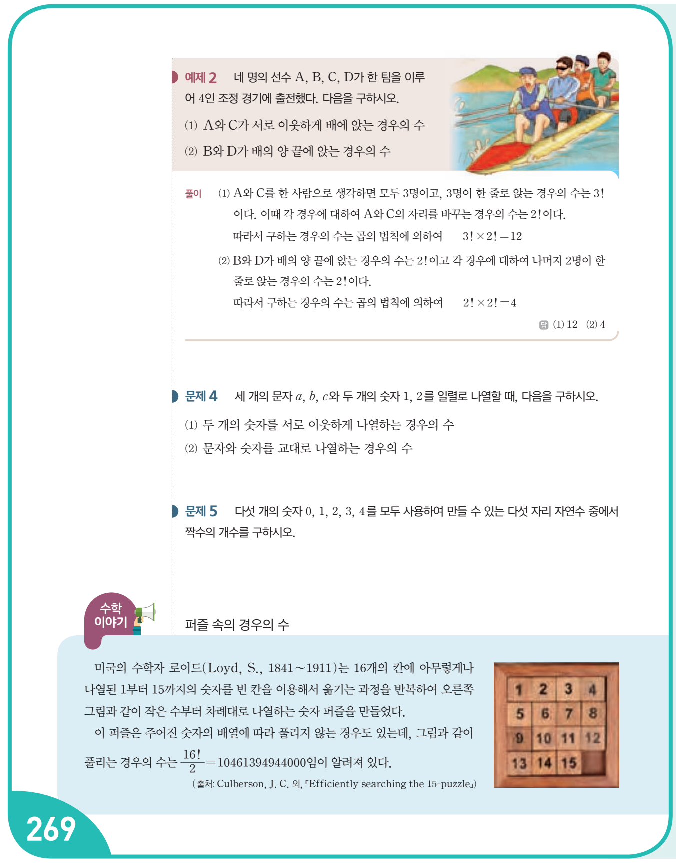
문자, 숫자, 문자, 숫자, 문자

이때 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$이고, 각 경우에 대하여 숫자를 나열하는 경우의 수는 $2!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$3!\times2!=6\times2=12$$

답 (1) 48
(2) 12



예제 2 네 명의 선수 A, B, C, D가 한 팀을 이루어 4인 조정 경기에 출전했다. 다음을 구하시오.

(1) A와 C가 서로 이웃하게 배에 앉는 경우의 수

(2) B와 D가 배의 양 끝에 앉는 경우의 수

풀이 (1) A와 C를 한 사람으로 생각하면 모두 3명이고, 3명이 한 줄로 앉는 경우의 수는 $3!$이다. 이때 각 경우에 대하여 A와 C의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3!\times2!=12$

(2) B와 D가 배의 양 끝에 앉는 경우의 수는 $2!$이고 각 경우에 대하여 나머지 2명이 한 줄로 앉는 경우의 수는 $2!$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2!\times2!=4$

답 (1) 12 (2) 4

문제 4 세 개의 문자 a, b, c와 두 개의 숫자 1, 2를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하시오.

(1) 두 개의 숫자를 서로 이웃하게 나열하는 경우의 수

(2) 문자와 숫자를 교대로 나열하는 경우의 수

문제 5 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수 중에서 짝수의 개수를 구하시오.

수학 이야기 퍼즐 속의 경우의 수

미국의 수학자 로이드(Loyd, S., 1841~1911)는 16개의 칸에 아무렇게나 나열된 1부터 15까지의 숫자를 빈 칸을 이용해서 옮기는 과정을 반복하여 오른쪽 그림과 같이 작은 수부터 차례대로 나열하는 숫자 퍼즐을 만들었다.

이 퍼즐은 주어진 숫자의 배열에 따라 풀리지 않는 경우도 있는데, 그림과 같이 풀리는 경우의 수는 $\frac{16!}{2}=10461394944000$임이 알려져 있다.

(출처: Culberson, J. C. 외, 「Efficiently searching the 15-puzzle」)

269

문제 5

|주안점| 순열의 수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 짝수가 되려면 일의 자리 숫자는 0, 2, 4가 되어야 한다.

(i) 일의 자리 숫자가 0인 경우

1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 순열의 수이므로

$$4!=24$$

(ii) 일의 자리 숫자 2인 경우

첫 자리에는 0이 올 수 없으므로 1, 3, 4의 세 개 중 하나를 택하면 ${}_3P_1=3$이고, 남은 세 수를 가운데 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$3\times3!=18$$

(iii) 일의 자리 숫자가 4인 경우

일의 자리 숫자가 2인 경우와 마찬가지이므로

$$3\times3!=18$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 짝수의 개수는 합의 법칙에 의하여

$$24+18+18=60$$

이다.

답 60

수학 이야기 퍼즐 속의 경우의 수

로이드(Loyd. S., 1841~1911)의 숫자 퍼즐이 1870년대에 만들어졌을 당시에는 유럽에서 엄청난 인기를 누렸다고 한다. 그런데 정작 로이드의 고향인 미국에서는 특허를 받지 못했는데, 그 이유는 이 퍼즐을 푸는 방법을 제시하지 못했기 때문이다.

로이드는 1부터 13까지는 순서대로 모두 제자리에 있고 14와 15만 자리가 바뀐 숫자 퍼즐을 모두 순서대로 맞추는 사람에게 당시로는 매우 많은 돈인 1000달러의 상금을 걸었는데, 아무도 이 퍼즐을 풀지 못했다.

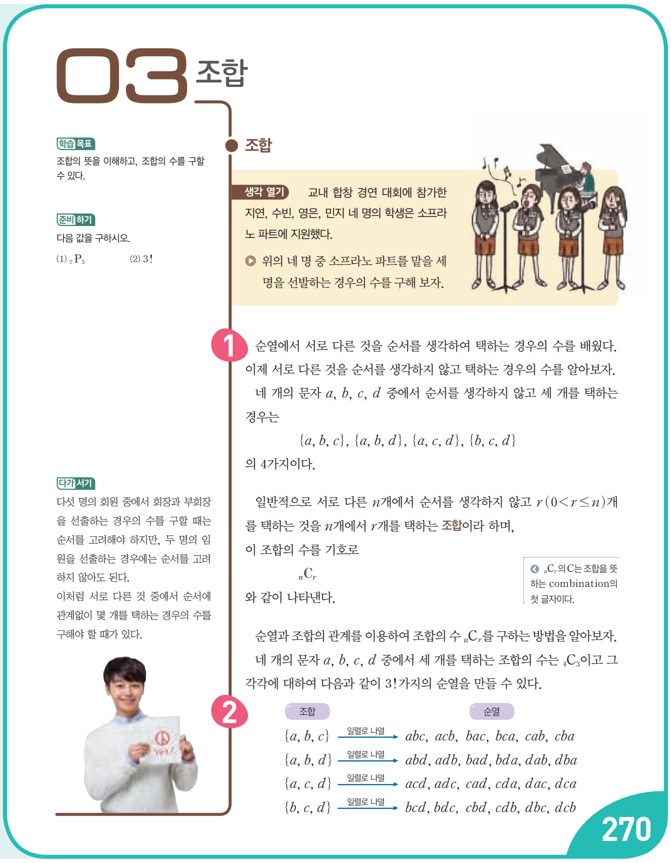
15, 14와 같이 큰 수가 작은 수보다 앞에 나오는 것을 반전(反轉, inversion)이라 하는데, 이를테면 3, 1, 4, 2에서 반전은

(3, 1), (3, 2), (4, 2)

같이 3번 일어나므로 반전의 수는 3이다.

이 경우와 같이 반전의 수가 홀수 개인 숫자 퍼즐은 풀 수 없음이 증명되었다.

그런데 로이드가 제시한 퍼즐은 1부터 13까지는 모두 제자리에 있고 14와 15만 바뀌었으므로, 반전의 수가 1이어서 풀리지 않는 퍼즐이었던 것이다.



03 조합

학습 목표
조합의 뜻을 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.

준비하기
다음 값을 구하시오.
(1) ${}_7\mathrm{P}_3$ (2) $3!$

조합

생각 열기 교내 합창 경연 대회에 참가한 지연, 수빈, 영은, 민지 네 명의 학생은 소프라노 파트에 지원했다.

▶ 위의 네 명 중 소프라노 파트를 맡을 세 명을 선발하는 경우의 수를 구해 보자.

1 순열에서 서로 다른 것을 순서를 생각하여 택하는 경우의 수를 배웠다. 이제 서로 다른 것을 순서를 생각하지 않고 택하는 경우의 수를 알아보자.

네 개의 문자 a, b, c, d 중에서 순서를 생각하지 않고 세 개를 택하는 경우는

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

의 4가지이다.

다가서기
다섯 명의 회원 중에서 회장과 부회장을 선출하는 경우의 수를 구할 때는 순서를 고려해야 하지만, 두 명의 임원을 선출하는 경우에는 순서를 고려하지 않아도 된다.
이처럼 서로 다른 것 중에서 순서에 관계없이 몇 개를 택하는 경우의 수를 구해야 할 때가 있다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하며, 이 조합의 수를 기호로

$${}_n\mathrm{C}_r$$

와 같이 나타낸다.

${}_n\mathrm{C}_r$의 C는 조합을 뜻하는 combination의 첫 글자이다.

순열과 조합의 관계를 이용하여 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$를 구하는 방법을 알아보자.

2 네 개의 문자 a, b, c, d 중에서 세 개를 택하는 조합의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3$이고 그 각각에 대하여 다음과 같이 $3!$가지의 순열을 만들 수 있다.

조합		순열
$\{a, b, c\}$	일렬로 나열 →	abc, acb, bac, bca, cab, cba
$\{a, b, d\}$	일렬로 나열 →	abd, adb, bad, bda, dab, dba
$\{a, c, d\}$	일렬로 나열 →	acd, adc, cad, cda, dac, dca
$\{b, c, d\}$	일렬로 나열 →	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

270

소단원 지도 개관

지도 목표

① 조합의 뜻을 이해할 수 있게 한다.
② 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

① 조합의 수는 간단한 경우를 예로 제시하여 직접 나열하거나 수형도를 이용하는 등 다양한 방법으로 구하게 하고, 이를 통하여 일반적으로 구하는 방법을 이해하게 한다.
② 조합과 관련하여 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.
③ 실생활 문제를 해결해 봄으로써 다양한 상황에서 조합의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

용어와 기호

• 조합(組合, combination)
• ${}_n\mathrm{C}_r$

준비하기

|주안점| 순열의 수를 구할 수 있는지 확인한다.

|풀이| (1) ${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$

(2) $3!=3\times2\times1=6$

답 (1) 210 (2) 6

● 조합

평가 기준

상	조합의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
중	조합의 뜻을 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
하	조합의 뜻을 말할 수 있고, 간단한 상황에서 조합의 수를 구할 수 있다.

생각 열기

|지도 방향| 합창 대회에서 소프라노 파트를 맡을 학생을 선발하는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

▶ 네 명 중 세 명을 택하여 소프라노 파트를 맡기면 되므로 구하는 경우는 다음과 같다.

{지연, 수빈, 영은}, {지연, 수빈, 민지},
{지연, 영은, 민지}, {수빈, 영은, 민지}

따라서 구하는 경우의 수는 4이다.

다른 관점에서 생각해 보면 네 명 중 세 명을 택하는 경우는 나머지 한 사람을 제외시키는 것과 같은데, 제외시킬 한 사람을 택하는 경우의 수는 4이므로 같은 결과를 얻을 수 있다.

내용 연구

1 네 개의 문자 a, b, c, d 중에서 세 개를 택하는 경우의 수는 집합 $\{a, b, c, d\}$의 부분집합 중에서 원소가 3개인 것의 개수와 같다.
일반적으로 n개의 원소 중에서 $r(0<r\le n)$개를 택하는 경우는 각각의 경우에 원소를 택하는 순서는 생각하지 않는다.
따라서 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$는 n개의 원소를 갖는 집합에서 r개의 원소를 택하는 경우의 수이므로 원소가 r개인 부분집합의 개수와 같다.

2 네 개의 문자 중에서 세 개를 택하는 조합에서 택한 세 개를 일렬로 나열하면 순열이 되고, 각 경우에 순열의 수는 $3!$인데 조합에서는 순서를 생각하지 않으므로 순열에서 $3!$가지씩 중복됨을 이해하게 한다.

내용 연구

1. 조합에서 순서를 생각하면 순열이므로 조합의 수를 순열의 수와 연관지어 구할 수 있다.
   서로 다른 n개에서 $r(0<r\le n)$개를 택하는 조합의 수는
   $${}_{n}\mathrm{C}_{r}$$
   이고, 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는
   $${}_{n}\mathrm{P}_{r}$$
   이다. 또, r개를 일렬로 나열하는 방법의 수는
   $$r!$$
   이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times r!={}_{n}\mathrm{P}_{r}$가 성립한다.

2. $0!=1$, ${}_{n}\mathrm{P}_{0}=1$이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{0}=1$로 정의하면
   $${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\text{에서}$$
   $r=0$일 때,
   $${}_{n}\mathrm{C}_{0}=1=\frac{n!}{0!(n-0)!}$$
   이다. 즉, 위의 등식은 $r=0$일 때도 성립함을 확인하게 한다.

3. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 남은 $n-r$개를 택하는 경우의 수와 같으므로
   $${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$$
   임을 이해하게 한다.
   |참고| ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$를 구할 때, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$이므로 r와 $n-r$ 중에서 크지 않은 것을 찾아 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ 또는 ${}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$를 이용하여 조합의 수를 구하는 것이 편리함을 알게 한다.
   예를 들어 ${}_{8}\mathrm{C}_{5}$의 값은 다음과 같이 구하는 것이 편리하다.
   $${}_{8}\mathrm{C}_{5}={}_{8}\mathrm{C}_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$
   |오개념 바로잡기| ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$이지만 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}\neq{}_{n}\mathrm{P}_{n-r}$임을 주의하게 한다.

문제 풀이

문제 1

|주안점| 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) ${}_{8}\mathrm{C}_{2}=\frac{{}_{8}\mathrm{P}_{2}}{2!}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

(2) ${}_{7}\mathrm{C}_{7}=\frac{{}_{7}\mathrm{P}_{7}}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$

(3) ${}_{6}\mathrm{C}_{0}=1$

답 (1) 28 (2) 1 (2) 1

그런데 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{3}$이므로 곱의 법칙에 의하여 ${}_{4}\mathrm{C}_{3}\times3!={}_{4}\mathrm{P}_{3}$이 성립함을 알 수 있다.

1 일반적으로 서로 다른 n개에서 $r(0<r\le n)$개를 택하는 조합의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$이다. 그런데 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$이므로 곱의 법칙에 의하여
$${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times r!={}_{n}\mathrm{P}_{r}$$
이다. 즉, 다음이 성립한다.
$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$
2 또, $0!=1$, ${}_{n}\mathrm{P}_{0}=1$이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{0}=1$로 정의하면, 위의 등식은 $r=0$일 때도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

조합의 수
서로 다른 n개에서 $r(0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는
$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

보기 ${}_{5}\mathrm{C}_{3}=\frac{{}_{5}\mathrm{P}_{3}}{3!}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

문제 1 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{8}\mathrm{C}_{2}$ (2) ${}_{7}\mathrm{C}_{7}$ (3) ${}_{6}\mathrm{C}_{0}$

문제 2 다음을 구하시오.

(1) 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 6개의 점 중에서 택한 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수
(2) 20명의 학생 중에서 4명의 학생회 임원을 선출하는 경우의 수

271

문제 2

|주안점| 조합의 수를 활용하여 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 서로 다른 6개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
$${}_{6}\mathrm{C}_{3}=\frac{{}_{6}\mathrm{P}_{3}}{3!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$
(2) 20명의 학생 중에서 4명을 택하는 경우의 수는
$${}_{20}\mathrm{C}_{4}=\frac{{}_{20}\mathrm{P}_{4}}{4!}=\frac{20\times19\times18\times17}{4\times3\times2\times1}=4845$$

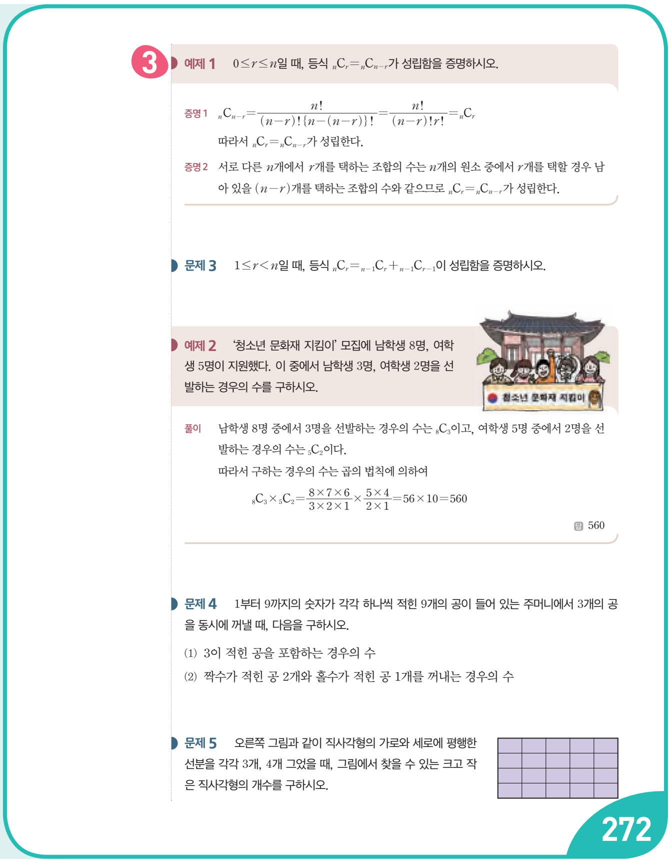
답 (1) 20 (2) 4845

지도 자료

조합이 도형에 응용되는 경우

① 서로 다른 n개의 점에서 두 점을 이어 만든 직선의 개수
➡ ${}_{n}\mathrm{C}_{2}$

② 임의의 세 점이 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점에서 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수
➡ ${}_{n}\mathrm{C}_{3}$



3 예제 1 $0 \le r \le n$일 때, 등식 ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$가 성립함을 증명하시오.

증명 1 ${}_{n}C_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = {}_{n}C_{r}$

따라서 ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$가 성립한다.

증명 2 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 n개의 원소 중에서 r개를 택할 경우 남아 있을 $(n-r)$개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$가 성립한다.

문제 3 $1 \le r < n$일 때, 등식 ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1}$이 성립함을 증명하시오.

예제 2 '청소년 문화재 지킴이' 모집에 남학생 8명, 여학생 5명이 지원했다. 이 중에서 남학생 3명, 여학생 2명을 선발하는 경우의 수를 구하시오.

풀이 남학생 8명 중에서 3명을 선발하는 경우의 수는 ${}_{8}C_{3}$이고, 여학생 5명 중에서 2명을 선발하는 경우의 수는 ${}_{5}C_{2}$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_{8}C_{3} \times {}_{5}C_{2} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 56 \times 10 = 560$$

답 560

문제 4 1부터 9까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하시오.

(1) 3이 적힌 공을 포함하는 경우의 수

(2) 짝수가 적힌 공 2개와 홀수가 적힌 공 1개를 꺼내는 경우의 수

문제 5 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로와 세로에 평행한 선분을 각각 3개, 4개 그었을 때, 그림에서 찾을 수 있는 크고 작은 직사각형의 개수를 구하시오.

272

문제 3

| 주안점 | 조합의 수에 대한 등식을 증명할 수 있게 한다.

| 증명 1 | ${}_{n-1}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1}$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_{n}C_{r}$$

따라서

$${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1}$$

이 성립한다.

| 증명 2 | ${}_{n}C_{r}$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수이므로 다음의 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) r개 중에서 n이 포함되지 않는 경우

n을 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하는 경우의 수는

$${}_{n-1}C_{r}$$

이다.

(ii) r개 중에서 n이 포함되는 경우

n을 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_{n-1}C_{r-1}$$

이다.

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로, 합의 법칙에 의하여

$${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1}$$

이 성립한다.

문제 4

| 주안점 | 조합의 수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 3이 적힌 공을 제외한 8개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$${}_{8}C_{2} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

(2) 짝수 2, 4, 6, 8이 적힌 공 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{4}C_{2}$이고, 홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 공 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{5}C_{1}$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_{4}C_{2} \times {}_{5}C_{1} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 5 = 30$$

답 (1) 28 (2) 30

문제 5

| 주안점 | 조합의 수를 이용하여 찾을 수 있는 직사각형의 개수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 직사각형은 가로와 세로에 평행한 선분 중에서 각각 2개씩을 택하여 만들 수 있다.

가로로 평행한 5개의 선분 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{5}C_{2}$이고, 세로로 평행한 6개의 선분 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{6}C_{2}$이다.

따라서 구하는 직사각형의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_{5}C_{2} \times {}_{6}C_{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 150$$

답 150

| 참고 | m개의 가로선과 n개의 세로선에서 찾을 수 있는 크고 작은 직사각형의 개수는

$${}_{m}C_{2} \times {}_{n}C_{2} \ (\text{단, } m \ge 2,\ n \ge 2)$$

중단원 마무리하기

01

| 주안점 | 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 4의 배수인 경우는 4, 8, 12의 3가지

5의 배수인 경우는 5, 10의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$3+2=5$

답 5

02

| 주안점 | 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 6의 약수의 눈은 1, 2, 3, 6의 4가지

3의 배수의 눈은 3, 6의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times2=8$

답 8

03

| 주안점 | 순열과 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) ${}_9P_2=9\times8=72$

(2) $\dfrac{8!}{6!}=8\times7=56$

(3) ${}_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

(4) ${}_6C_6=1$

답 (1) 72 (2) 56 (3) 120 (4) 1

04

| 주안점 | 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) ${}_5P_3=5\times4\times3=60$

(2) $4!=4\times3\times2\times1=24$

(3) ${}_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

답 (1) 60 (2) 24 (3) 45

05

| 주안점 | 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 나오는 눈의 수의 합이 10 이상인 경우는 10, 11, 12인 경우가 있다.

VI-1. 경우의 수

중단원 마무리하기

경우의 수

(1) **합의 법칙**

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

(2) **곱의 법칙**

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

순열

(1) 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하며, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

(2) 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 **계승**이라 하며, 이것을 기호로 $n!$과 같이 나타낸다. 즉,

$$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

이다.

(3) **순열의 수**

① ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_nP_n=n!$, $0!=1$, ${}_nP_0=1$

조합

(1) 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

(2) **조합의 수**

${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}$

$=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

273

기본

01 1부터 12까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 12개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 4의 배수 또는 5의 배수가 적힌 공이 나오는 경우의 수를 구하시오.

02 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째에는 6의 약수의 눈이 나오고, 두 번째에는 3의 배수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

03 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_9P_2$ (2) $\dfrac{8!}{6!}$

(3) ${}_{10}C_3$ (4) ${}_6C_6$

04 다음을 구하시오.

(1) 5개의 문자 a, b, c, d, e 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수

(2) 4명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수

(3) 색이 서로 다른 10장의 색종이 중에서 2장을 뽑는 경우의 수

(i) 눈의 수의 합이 10인 경우는

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 11인 경우는

(5, 6), (6, 5)의 2가지

(iii) 눈의 수의 합이 12인 경우는

(6, 6)의 1가지

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$3+2+1=6$

답 6

06

| 주안점 | 곱의 법칙을 활용하여 샌드위치를 주문하는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 야채를 택하는 경우의 수는 4이고, 그 각각에 대하여 치즈를 택하는 경우의 수는 5, 또 그 각각에 대하여 소스를 택하는 경우의 수는 2이다.

따라서 샌드위치를 주문하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times5\times2=40$

답 40

표 준

05 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 10 이상인 경우의 수를 구하시오.

06 어느 샌드위치 가게에는 샌드위치를 주문할 때, 추가로 택할 수 있는 4가지의 야채, 5가지의 치즈, 2가지의 소스가 준비되어 있다. 이 가게에서 야채, 치즈, 소스를 각각 하나씩 추가로 택하여 샌드위치를 주문하는 경우의 수를 구하시오.

07 다음을 구하시오.

(1) 양의 정수 x, y에 대하여 $x+y\le 5$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수

(2) 다항식 $(a+b+c+d)(x+y)$를 전개할 때, 생기는 항의 개수

08 영어 단어 smile을 이루는 5개의 알파벳을 모두 사용하여 일렬로 나열할 때, 다음을 구하시오.

(1) 일렬로 나열하는 경우의 수

(2) 모음이 양 끝에 오도록 나열하는 경우의 수

09 이어달리기에 참가한 남학생 4명과 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 다음을 구하시오.

(1) 남학생 4명을 서로 이웃하게 세우는 경우의 수

(2) 여학생을 양 끝에 세우는 경우의 수

274

07

|주안점| 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 또는 항의 개수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) x, y가 양의 정수이므로 $x+y\le 5$인 $x+y$의 값은 2, 3, 4, 5이고, 각 경우의 순서쌍 (x, y)는

(i) $x+y=2$인 경우 $(1, 1)$의 1개

(ii) $x+y=3$인 경우 $(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(iii) $x+y=4$인 경우 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$의 3개

(iv) $x+y=5$인 경우 $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4개

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의하여

$$1+2+3+4=10$$

(2) 다항식을 전개할 때 생기는 항은 a, b, c, d 중 하나와 x, y 중 하나를 택하여 곱한 것이다.

a, b, c, d 중 하나를 택하는 경우의 수는 4이고, x, y 중 하나를 택하는 경우의 수는 2이다.

따라서 구하는 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$4\times 2=8$$

답 (1) 10 (2) 8

08

|주안점| 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 5개의 알파벳 s, m, i, l, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$5!=120$$

(2) 2개의 모음 i, e를 양 끝에 나열하는 경우의 수는 $2!$이고, 각 경우에 대하여 가운데에 3개의 자음 s, m, l을 나열하는 경우의 수는 $3!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$2!\times 3!=12$$

답 (1) 120 (2) 12

09

|주안점| 순열의 수를 활용하여 이어달리기를 하는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 남학생 4명을 한 명으로 생각하면 모두 4명이고, 4명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $4!$이다. 이때 각 경우에 대하여 남학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$4!\times 4!=576$$

(2) 세 여학생 중에서 두 여학생을 택하여 양 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2$이고, 각 경우에 대하여 나머지 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_3P_2\times 5!=720$$

답 (1) 576 (2) 720

10

|주안점| 조합의 수를 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| (1) 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

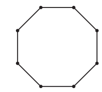
$${}_8C_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$$

(2) 8개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_8C_3=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$$

답 (1) 28 (2) 56

10 오른쪽 그림과 같은 정팔각형에 대하여 다음을 구하시오.



(1) 두 꼭짓점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수

(2) 세 꼭짓점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수

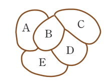
11 12명의 배구 선수 중에서 경기에 출전할 6명의 선수를 뽑으려고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 두 선수 A, B를 포함하여 뽑는 경우의 수

(2) 두 선수 A, B를 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

발전

12 오른쪽 그림과 같이 구분된 5개의 영역을 서로 다른 4가지 색 중 전부 또는 일부를 사용하여 칠하려고 한다. 한 가지 색을 여러 번 사용해도 좋으나 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠하여 구분할 때, 칠하는 경우의 수를 구하시오.



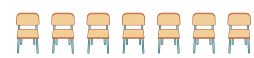
|서·술·형|

13 서로 다른 3개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 할 때, $abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

사고력+

|서·술·형|

14 7개의 의자가 일렬로 놓여 있다. 두 명의 학생이 서로 다른 의자에 앉을 때, 두 명 사이에 적어도 하나의 빈 의자가 있도록 앉는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



275

11

| 주안점 | 조합의 수를 활용하여 배구 선수가 경기에 출전하는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | (1) 두 선수 A, B를 제외한 10명 중에서 4명을 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

(2) 두 선수 A, B를 제외한 10명 중에서 6명을 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_6={}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

답 (1) 210 (2) 210

12

| 주안점 | 곱의 법칙을 이용하여 서로 다른 영역을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

| 풀이 | 가장 많이 이웃하고 있는 영역 B에 칠할 수 있는 색의 가짓수는 4

영역 A는 영역 B에 이웃하므로 영역 A에 칠할 수 있는 색의 가짓수는 3

영역 E는 두 영역 A와 B에 이웃하므로 영역 E에 칠할 수 있는 색의 가짓수는 2

영역 D는 두 영역 B와 E에 이웃하므로 영역 D에 칠할 수 있는 색의 가짓수는 2

영역 C는 두 영역 B와 D에 이웃하므로 칠할 수 있는 색의 가짓수는 2

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3\times2\times2\times2=96$

답 96

13

| 주안점 | 합의 법칙을 이용하여 다항식과 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

해결 과정 $abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) abc의 값이 홀수, $a+b+c$의 값이 짝수인 경우

abc의 값이 홀수이면 a, b, c가 모두 홀수이므로 $a+b+c$의 값이 짝수인 경우는 없다. ▶ 30 %

(ii) abc의 값이 짝수, $a+b+c$의 값이 홀수인 경우

a, b, c 중에서 한 개는 홀수, 나머지 두 개는 짝수이어야 하므로 순서쌍 (a, b, c)는

(홀수, 짝수, 짝수), (짝수, 홀수, 짝수), (짝수, 짝수, 홀수)

의 3가지이다.

이때 (홀수, 짝수, 짝수)인 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

마찬가지로 (짝수, 홀수, 짝수)인 경우의 수와 (짝수, 짝수, 홀수)인 경우의 수도 각각 27이다. ▶ 40 %

답 구하기 (ii)의 3가지 경우는 동시에 일어날 수 없으므로, 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$27+27+27=81$ ▶ 30 %

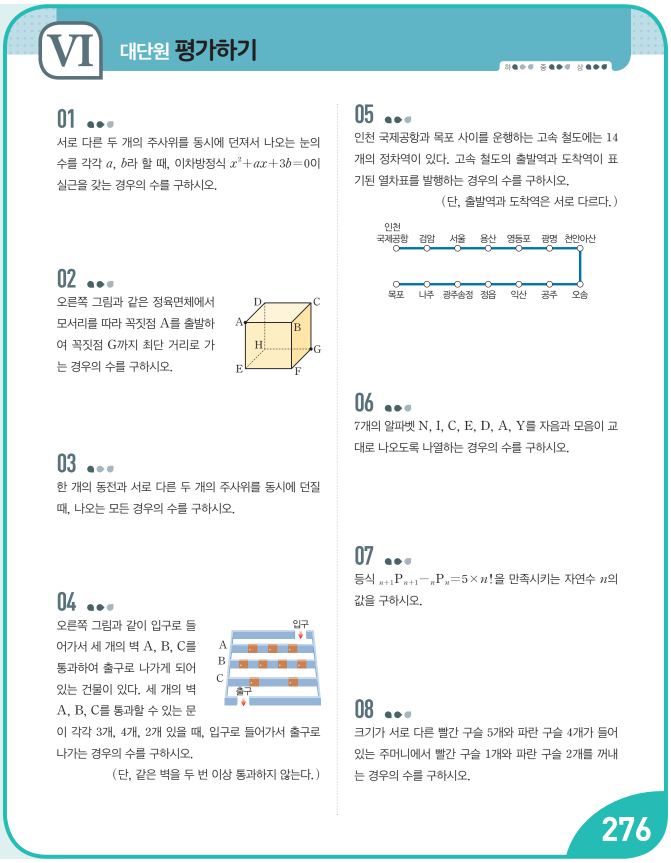
14

| 주안점 | 순열의 수를 활용하여 의자에 앉는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

해결 과정 두 명의 학생이 빈 의자 7개 중에서 서로 다른 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_7P_2=42$ ▶ 40 %

두 명의 학생 사이에 빈 의자가 없도록 이웃하여 앉는 경우의 수는 $6\times2=12$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 두 명 사이에 적어도 하나의 빈 의자가 있도록 앉는 경우의 수는 $42-12=30$ ▶ 20 %


VI 대단원 평가하기

하 중 상

01

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, 이차방정식 $x^2+ax+3b=0$이 실근을 갖는 경우의 수를 구하시오.

02

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 모서리를 따라 꼭짓점 A를 출발하여 꼭짓점 G까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.

03

한 개의 동전과 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수를 구하시오.

04

오른쪽 그림과 같이 입구로 들어가서 세 개의 벽 A, B, C를 통과하여 출구로 나가게 되어 있는 건물이 있다. 세 개의 벽 A, B, C를 통과할 수 있는 문이 각각 3개, 4개, 2개 있을 때, 입구로 들어가서 출구로 나가는 경우의 수를 구하시오.

(단, 같은 벽을 두 번 이상 통과하지 않는다.)

05

인천 국제공항과 목포 사이를 운행하는 고속 철도에는 14개의 정차역이 있다. 고속 철도의 출발역과 도착역이 표기된 열차표를 발행하는 경우의 수를 구하시오.

(단, 출발역과 도착역은 서로 다르다.)

06

7개의 알파벳 N, I, C, E, D, A, Y를 자음과 모음이 교대로 나오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

07

등식 ${}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}-{}_n\mathrm{P}_n=5\times n!$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

08

크기가 서로 다른 빨간 구슬 5개와 파란 구슬 4개가 들어 있는 주머니에서 빨간 구슬 1개와 파란 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수를 구하시오.

276

대단원 평가하기

01

| 평가 기준 | 합의 법칙을 이용하여 이차방정식이 실근을 갖는 경우의 수를 구할 수 있다.

| 풀이 | 이차방정식 $x^2+ax+3b=0$이 실근을 가지려면 이차방정식의 판별식 D가 $D=a^2-12b\geq 0$이어야 한다.

이때 $b\geq 1$이므로 $a^2\geq 12b\geq 12$에서 $a=4,\ 5,\ 6$이다.

(i) $a=4$이면 $4^2\geq 12b$에서 $b=1$의 1가지

(ii) $a=5$이면 $5^2\geq 12b$에서 $b=1,\ 2$의 2가지

(iii) $a=6$이면 $6^2\geq 12b$에서 $b=1,\ 2,\ 3$의 3가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$1+2+3=6$ 답 6

02

| 평가 기준 | 합의 법칙을 이용하여 도형에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있다.

| 풀이 | 꼭짓점 B를 거쳐 가는 경우는

A−B−C−G, A−B−F−G의 2가지

꼭짓점 D, E를 거쳐 가는 경우의 수도 마찬가지로 각각 2이므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$2+2+2=6$ 답 6

03

| 평가 기준 | 곱의 법칙을 이용하여 두 가지 사건이 동시에 일어나는 경우의 수를 구할 수 있다.

| 풀이 | 한 개의 동전을 던질 때 나타나는 경우의 수는 2이고, 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나타나는 경우의 수는 $6\times 6=36$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times 36=72$ 답 72

04

| 평가 기준 | 곱의 법칙을 활용하여 통로를 통과하는 경우의 수를 구할 수 있다.

| 풀이 | 세 개의 벽 A, B, C를 통과하는 문을 택하는 경우의 수가 각각 3, 4, 2이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times 4\times 2=24$ 답 24

05

| 평가 기준 | 순열의 수를 활용하여 열차표를 발행하는 경우의 수를 구할 수 있다.

| 풀이 | 14개의 역에서 차례대로 2개의 역을 택하는 순열의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_{14}\mathrm{P}_2=14\times 13=182$ 답 182

06

| 평가 기준 | 순열의 수를 이용하여 알파벳을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.

| 풀이 | 자음은 N, C, D, Y이고, 모음은 I, E, A이므로 자음과 모음을 교대로 나열하려면 자음 4개를 나열하고 자음 사이에 모음 3개를 하나씩 나열해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4!\times 3!=144$ 답 144

07

| 평가 기준 | 순열의 수를 이용하여 등식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구할 수 있다.

| 풀이 | ${}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}-{}_n\mathrm{P}_n=(n+1)!-n!$

$=(n+1)\times n!-n!=n\times n!$

$n\times n!=5\times n!$에서 $n=5$ 답 5

08

| 평가 기준 | 조합의 수를 이용하여 구슬을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.

| 풀이 | 빨간 구슬 5개 중에서 한 개를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1$이고, 파란 구슬 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=5\times\frac{4\times3}{2\times1}=30$$

답 30

09

| 평가 기준 | 조합의 수를 이용하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수를 구할 수 있다.

| 풀이 | 평행사변형은 수평선 방향의 평행선 4개 중에서 2개를 택하고, 사선 방향의 평행선 5개 중에서 2개를 택하여 만들 수 있다.
따라서 구하는 평행사변형의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}=60$$

답 60

10

| 평가 기준 | 조합의 수를 이용하여 이차방정식이 주어진 해를 갖게 하는 자연수의 값의 합을 구할 수 있다.

| 풀이 | 이차방정식 $5x^2-{}_n\mathrm{P}_r\,x-6{}_n\mathrm{C}_{n-r}=0$의 두 근이 -2, 6이므로 근과 계수의 관계로부터

$(\text{두 근의 합})=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{5}=4$에서 $\quad {}_n\mathrm{P}_r=20$

$(\text{두 근의 곱})=\frac{-6{}_n\mathrm{C}_{n-r}}{5}=-12$에서 $\quad {}_n\mathrm{C}_{n-r}=10$

${}_n\mathrm{C}_{n-r}={}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{20}{r!}=10$이므로 $\quad r!=2,\quad r=2$

${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)=20$에서 $\quad n=5$

따라서 구하는 값은 $\quad n+r=7$

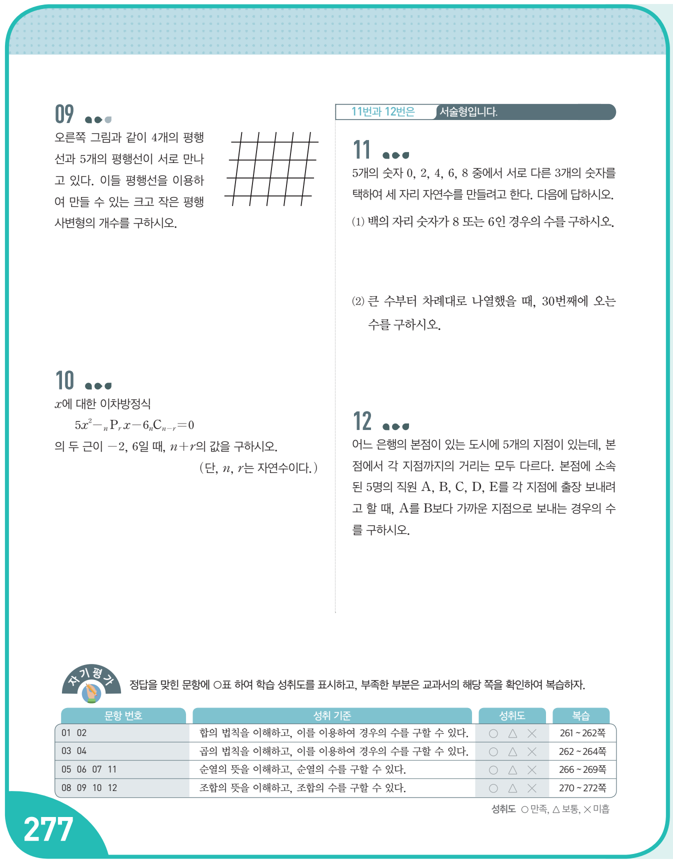
답 7

11

| 평가 기준 | 조합의 수를 이용하여 자연수에 관한 경우의 수를 구할 수 있다.

| 풀이 | (1) 백의 자리 숫자가 8인 경우의 수는 8을 제외한 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 $\quad {}_4\mathrm{P}_2=12$ ▶ 30 %
같은 방법으로 백의 자리 숫자가 6인 경우의 수는

$${}_4\mathrm{P}_2=12$$


09 ●●●

오른쪽 그림과 같이 4개의 평행선과 5개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이들 평행선을 이용하여 만들 수 있는 크고 작은 평행사변형의 개수를 구하시오.

10 ●●●

x에 대한 이차방정식

$$5x^2-{}_n\mathrm{P}_r\,x-6{}_n\mathrm{C}_{n-r}=0$$

의 두 근이 -2, 6일 때, $n+r$의 값을 구하시오.
(단, n, r는 자연수이다.)

11번과 12번은 서술형입니다.

11 ●●●

5개의 숫자 0, 2, 4, 6, 8 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리 자연수를 만들려고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 백의 자리 숫자가 8 또는 6인 경우의 수를 구하시오.

(2) 큰 수부터 차례대로 나열했을 때, 30번째에 오는 수를 구하시오.

12 ●●●

어느 은행의 본점이 있는 도시에 5개의 지점이 있는데, 본점에서 각 지점까지의 거리는 모두 다르다. 본점에 소속된 5명의 직원 A, B, C, D, E를 각 지점에 출장 보내려고 할 때, A를 B보다 가까운 지점으로 보내는 경우의 수를 구하시오.

자기평가 정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02	합의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	○ △ ×	261~262쪽
03 04	곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	○ △ ×	262~264쪽
05 06 07 11	순열의 뜻을 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다.	○ △ ×	266~269쪽
08 09 10 12	조합의 뜻을 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.	○ △ ×	270~272쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

277

이므로 백의 자리 숫자가 8 또는 6인 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $\quad 12+12=24$ ▶ 30 %

(2) 30번째에 오는 수는 백의 자리 숫자가 4인 수 중에서 큰 수부터 차례대로 나열했을 때, 6번째 수이다.
이때 십의 자리 숫자가 8인 경우의 수는 3, 십의 자리 숫자가 6인 경우의 수는 3이다.
따라서 30번째에 오는 수는 이들 중에서 가장 작은 수인 460이다. ▶ 40 %

12

| 평가 기준 | 조합의 수를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

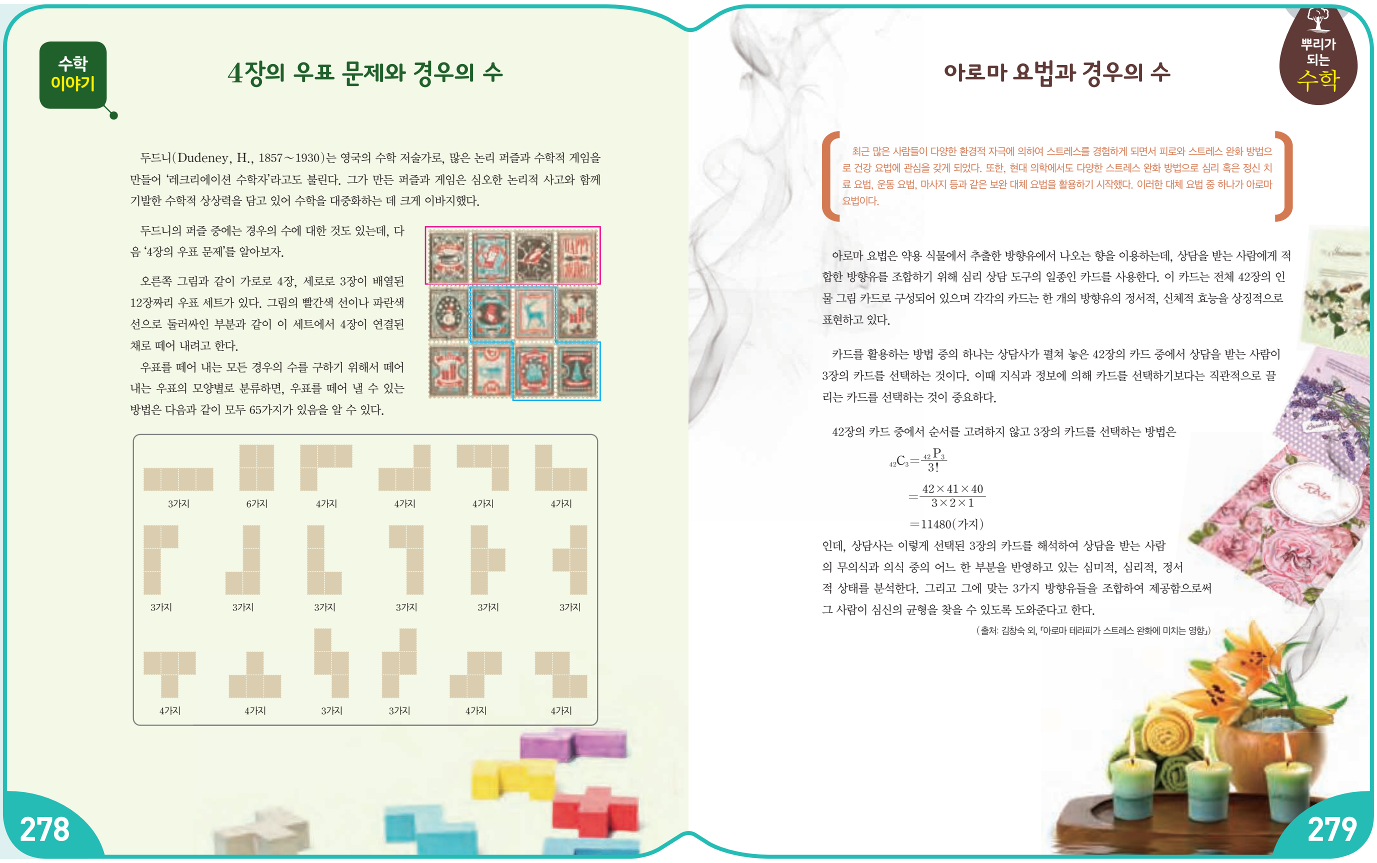
해결 과정 5개의 지점 중에서 2개의 지점을 택하여 A는 가까운 지점에, B는 먼 지점에 출장 보내면 되므로 이를 만족시키는 2개의 지점을 택하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$ ▶ 40 %

3명의 직원 C, D, E를 나머지 3개의 지점에 출장 보내는 경우의 수는 $\quad 3!$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$10\times3!=60$$ ▶ 30 %



수학 이야기

4장의 우표 문제와 경우의 수

두드니(Dudeney, H., 1857～1930)는 영국의 수학 저술가로, 많은 논리 퍼즐과 수학적 게임을 만들어 '레크리에이션 수학자'라고도 불린다. 그가 만든 퍼즐과 게임은 심오한 논리적 사고와 함께 기발한 수학적 상상력을 담고 있어 수학을 대중화하는 데 크게 이바지했다.

두드니의 퍼즐 중에는 경우의 수에 대한 것도 있는데, 다음 '4장의 우표 문제'를 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 가로로 4장, 세로로 3장이 배열된 12장짜리 우표 세트가 있다. 그림의 빨간색 선이나 파란색 선으로 둘러싸인 부분과 같이 이 세트에서 4장이 연결된 채로 떼어 내려고 한다.

우표를 떼어 내는 모든 경우의 수를 구하기 위해서 떼어 내는 우표의 모양별로 분류하면, 우표를 떼어 낼 수 있는 방법은 다음과 같이 모두 65가지가 있음을 알 수 있다.

뿌리가 되는 수학

아로마 요법과 경우의 수

최근 많은 사람들이 다양한 환경적 자극에 의하여 스트레스를 경험하게 되면서 피로와 스트레스 완화 방법으로 건강 요법에 관심을 갖게 되었다. 또한, 현대 의학에서도 다양한 스트레스 완화 방법으로 심리 혹은 정신 치료 요법, 운동 요법, 마사지 등과 같은 보완 대체 요법을 활용하기 시작했다. 이러한 대체 요법 중 하나가 아로마 요법이다.

아로마 요법은 약용 식물에서 추출한 방향유에서 나오는 향을 이용하는데, 상담을 받는 사람에게 적합한 방향유를 조합하기 위해 심리 상담 도구의 일종인 카드를 사용한다. 이 카드는 전체 42장의 인물 그림 카드로 구성되어 있으며 각각의 카드는 한 개의 방향유의 정서적, 신체적 효능을 상징적으로 표현하고 있다.

카드를 활용하는 방법 중의 하나는 상담사가 펼쳐 놓은 42장의 카드 중에서 상담을 받는 사람이 3장의 카드를 선택하는 것이다. 이때 지식과 정보에 의해 카드를 선택하기보다는 직관적으로 끌리는 카드를 선택하는 것이 중요하다.

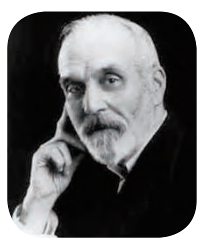
42장의 카드 중에서 순서를 고려하지 않고 3장의 카드를 선택하는 방법은

$$ {}_{42}C_3 = \frac{{}_{42}P_3}{3!} = \frac{42\times41\times40}{3\times2\times1} = 11480(\text{가지}) $$

인데, 상담사는 이렇게 선택된 3장의 카드를 해석하여 상담을 받는 사람의 무의식과 의식 중의 어느 한 부분을 반영하고 있는 심미적, 심리적, 정서적 상태를 분석한다. 그리고 그에 맞는 3가지 방향유들을 조합하여 제공함으로써 그 사람이 심신의 균형을 찾을 수 있도록 도와준다고 한다.

(출처: 김창숙 외, 「아로마 테라피가 스트레스 완화에 미치는 영향」)

수학 이야기 4장의 우표 문제와 경우의 수



두드니

두드니(Dudeney, H., 1857～1930)는 영국의 탁월한 수학 퍼즐 제작자였는데, 체스(chess)에 대한 퍼즐을 지역 신문에 기고하기 시작한 것은 불과 9살 때 부터였다고 한다. 그는 『셜록 홈즈』의 저자인 코난 도일과 같은 문학 동아리에서 활동했고, 교과서 269쪽 수학 이야기에서 소개된 15-퍼즐의 제작자인 미국의 수학자 로이드와도 교류했다고 한다.

두드니는 『켄터베리 퍼즐(Canterbury Puzzle)』 등 많은 저서를 썼고, 거미와 파리 문제, 하버대셔의 퍼즐(Harberdasher's Puzzle) 등 유명한 기하학적 퍼즐을 만들었다. 위의 '4장의 우표 문제'는 1917년의 저서 『수학의 즐거움(Amusements in Mathematics)』에 나오는 285번째 문제이다.

뿌리가 되는 수학 아로마 요법과 경우의 수

우리의 생활에서 경우의 수와 확률을 고려해야 하는 일은 이루 헤아릴 수 없을 정도로 많다.

따라서 경우의 수, 순열, 조합과 나아가 앞으로 배울 확률의 계산 등은 여러 가지 직업 선택에 있어서 매우 좋은 기반이 될 수 있다.

경제와 경영 분야에서는 매일 시시각각으로 쏟아져 나오는 정보를 취합하여 호재나 위험 요소 등 예상되는 경우의 수에 대한 대책들을 세워야 하는데, 이를 위해서 통계적 방법이나 확률론의 기법이 응용된다. 이러한 수학적 정보 처리는 사회 과학 전반에서 매우 활발하게 응용되고 있다.

이는 현대인이 삶의 다양한 영역에서 겪을 수 있는 심리적인 고통과 스트레스 및 부적응을 완화하기 위한 심리 분석에 있어서도 예외가 아닌데, 아로마 요법을 이용한 심리 상담에서도 여러 가지 경우의 수를 고려한 분석이 이용된다.

MEMO