

고등학교

수학 I

황선욱

강병개

윤갑진

이광연

김수영

이문호

김원일

박문환

박상의



수학은 인류의 탄생과 더불어 발전하기 시작하여 지금의 문명과 문화를 이루는 데 있어서 가장 중요한 역할을 하고 있습니다. 과학 기술이나 공학적 현상을 설명하고 표현하는 것은 물론이고, 복잡한 사회 현상이나 국제 경제의 흐름을 분석하고 예측하는 데에도 수학이 그 도구로 사용됩니다.

즉, 수학은 우리의 삶 전체와 관련하여 요구되는 과학적 의사소통에 필요한 가장 합리적이고 객관적인 언어인 동시에 문제 해결에서 가장 기본적으로 사용되는 기술적 도구인 것입니다.

학교에서 수학을 공부하는 목적은, 역사적 사실을 이해하듯이 수학적 사실을 단순히 이해만 하는 것이 아니라, 다른 교과와 학습이나 생활 주변에서 부딪히는 여러 가지 문제를 능률적이고 합리적으로 해결하고 그 결과를 활용하는 데 필요한 수학적 원리와 지식을 익히고 수학적 사고 능력을 기르는 데 있습니다. 따라서 수학을 공부하게 되면

● 여러 가지 복잡한 상황으로부터 최선의 해결책을 찾아내는 **비판적 문제 해결 능력**

● 추상적 상황을 구체화하거나 구체적 상황을 추상화하여 문제를 해결하는 **창의적 사고 능력**

● 복잡하고 모호한 상황을 단순하고 객관적인 상황으로 통합적으로 형식화하는 **정보 처리 능력**

등이 길러지게 되어, 과학 기술이나 공학 분야는 물론이고 인문·사회 및 예술과 체육 분야의 일을 하는 데에도 기본적으로 필요한 자질이 형성된다는 뜻입니다.

이와 같은 취지를 살리기 위하여 이 교과서는, 학생 여러분의 수학적 사고 능력이 효과적으로 키워질 수 있도록 구성된 교육과정에 따라 체계적으로 꾸며졌습니다. 또한, 학생 여러분의 수학적 호기심과 상상력을 키울 수 있는 다양한 **수학 이야기**뿐만 아니라 각 분야 전문가들이 작성한 글을 토대로 구성한 **뿌리가 되는 수학**도 수록하여, 수학의 가치를 인식하여 자기 주도적 학습 태도와 실천 능력을 키울 수 있게 하였습니다.

끝으로, 이 교과서를 통하여 학생 여러분의 수학적 창의성과 6가지 수학 교과 역량을 크게 키워서 우리나라뿐만 아니라 전 인류의 발전에 크게 기여하는 인재가 되기를 바랍니다.

지은이 씀

이 교과서는 다양한 수학적 경험을 바탕으로 여러 가지 문제를
합리적이고 능률적으로 해결할 수 있도록 구성하여 다음과 같은 수학 교과 역량을 기를 수 있습니다.

자기 주도 학습을 통한 수학 교과 역량 키우기

문제 해결



해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력

추론



수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력

창의·융합



수학의 지식과 기능을 토대로 새롭게 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결·융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력

의사소통



수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제 해결 과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력

정보처리



다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력

태도 및 실천



수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력

교과서의 재임새

이 교과서는 교육과정에 제시되어 있는 학습 내용을 대단원, 중단원, 소단원으로 나누어 체계적으로 학습할 수 있도록 하였습니다. 또한, 각 단원은 수학적 개념과 기능을 쉽게 이해하고 습득할 수 있도록 구성하였으며, 더불어 수학 교과 역량을 신장할 수 있도록 다양한 분야에서 유익하고 재미있는 소재를 선정하였습니다.



1

도입 학습

대단원 도입

대단원과 관련된 수학과 생활 관련 사진을 통해 단원에 대한 흥미를 유발할 수 있습니다.

중단원 도입

중단원에서 배우게 될 내용과 관련된 명언과 그 배경의 소개를 통해 흥미와 호기심을 유발할 수 있습니다.

2

단원 학습

준비하기 | 소단원 학습에 필요한 기초적인 내용을 점검할 수 있습니다.

다가서기 | 소단원에서 학습할 내용과 관련된 생활 소재를 통해 흥미와 호기심을 유발할 수 있습니다.

생각 열기 | 학습을 시작하기 전에 실마리가 되는 내용을 제시하여 학습 동기를 유발할 수 있습니다.

예제, 문제 | 학습 내용의 대표적인 문제와 모범적인 풀이를 통해 문제 해결 과정을 이해하고, 유사한 문제를 통해 다시 한번 확인할 수 있습니다.

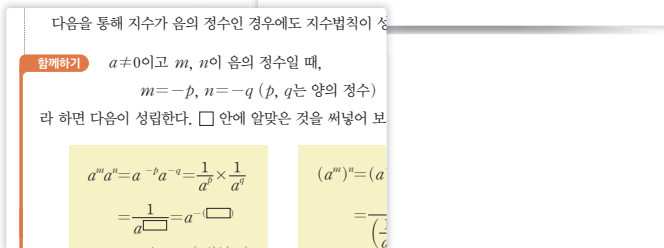
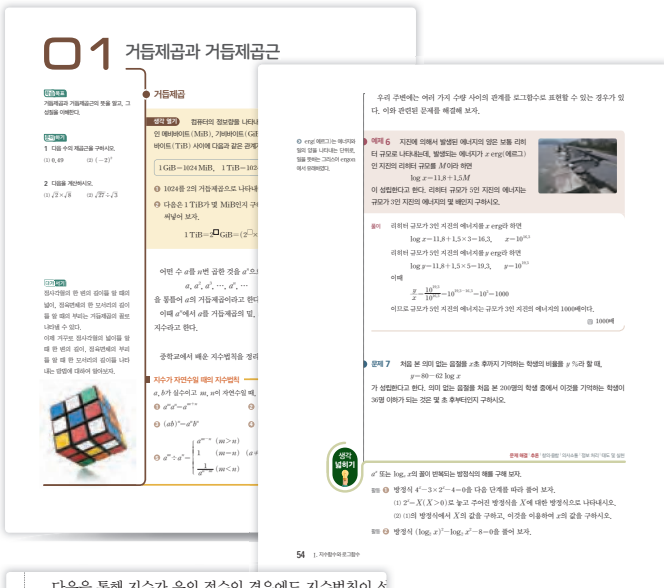
함께하기 | 제시된 과정을 선생님과 함께 단계를 따라 활동하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 발견하고 이해할 수 있습니다.

생각 넓히기 | 배운 내용의 다양한 상황으로의 확장을 통해 교과 역량을 키울 수 있습니다.

생각 톡톡 간단한 질문을 통해 사고의 폭을 넓힙니다.

보기 구체적인 예를 통해 학습 내용을 확인합니다.

참고 **주의** 보충 또는 주의할 내용을 확인합니다.



스스로 원리와 법칙을 깨우치는 ‘자기 주도적 교과서’
 체계적인 학습으로 수학에 흥미와 자신감을 갖게 하는 ‘배움이 즐거운 교과서’
 친근한 소재로 수학의 유용성과 가치를 이해하는 ‘가치를 일깨우는 교과서’



3

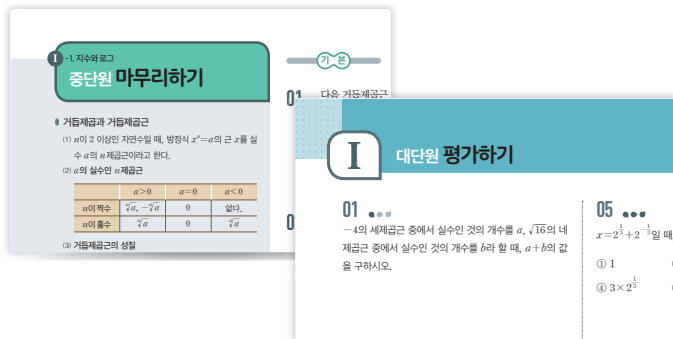
창의·융합 학습

탐구&융합

수학적 개념을 타 교과나 실생활에 접목하여 다양한 아이디어를 만들어 낼 수 있습니다.

공학적 도구

배운 내용을 공학적 도구를 활용하여 확인하고 탐구할 수 있습니다.



4

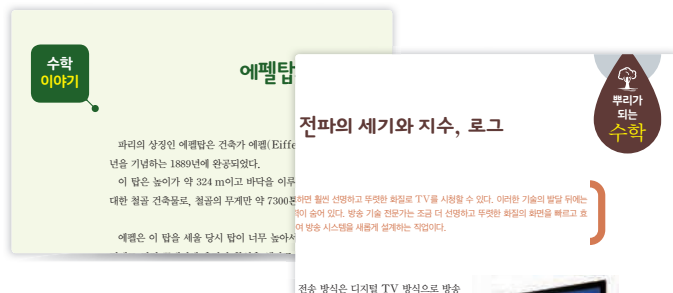
자기 주도적 마무리 학습

중단원 마무리하기

중단원에서 배운 핵심 개념을 한눈에 정리하고, 수준별 문제를 통해 배운 내용을 적용 및 응용하는 연습을 할 수 있습니다.

대단원 평가하기

대단원의 다양한 문제를 통해 학습 성취도를 스스로 확인할 수 있습니다.



5

수학의 가치 탐구 학습

수학 이야기

수학 개념을 알 수 있는 다양한 이야기를 제시하여 수학의 가치와 유용성을 느낄 수 있습니다.

뿌리가 되는 수학

각 분야 전문가의 경험을 토대로 작성한 글을 통해 이 단원의 핵심 내용이 어떤 분야에서 어떻게 활용되는지 알 수 있습니다.

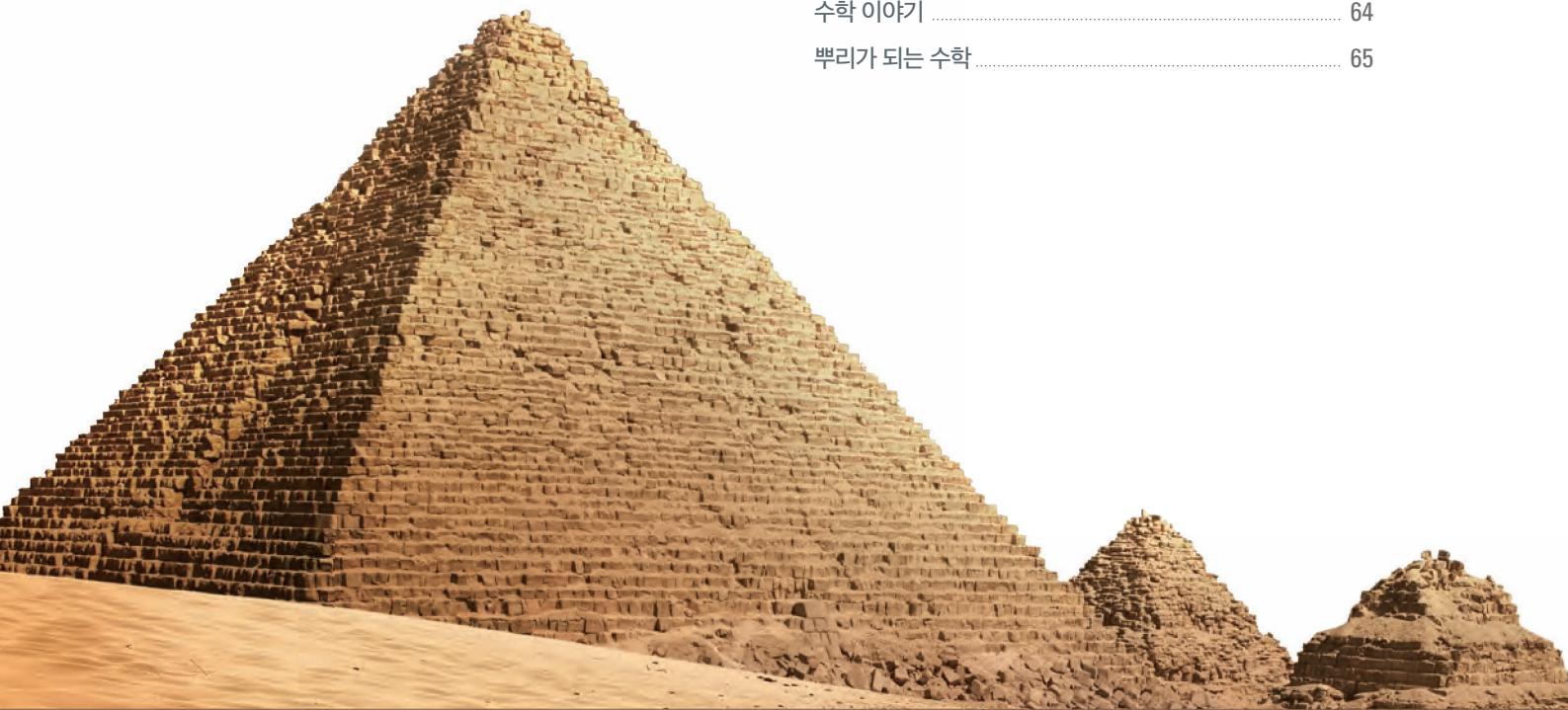
1. 지수와 로그

01 거듭제곱과 거듭제곱근	11
02 지수의 확장	17
수학 이야기	23
03 로그	24
탐구&융합	31
04 상용로그	32
탐구&융합	35
중단원 마무리하기	36

2. 지수함수와 로그함수

01 지수함수와 로그함수	41
02 지수함수와 로그함수의 활용	49
탐구&융합	55
중단원 마무리하기	56

대단원 평가하기	60
수학 이야기	64
뿌리가 되는 수학	65





삼각함수

1. 삼각함수

01 일반각과 호도법	69
02 삼각함수	74
탐구&융합	80
03 삼각함수의 그래프	81
공학적 도구	91
중단원 마무리하기	92

2. 삼각함수의 활용

01 사인법칙	97
02 코사인법칙	102
탐구&융합	107
중단원 마무리하기	108
대단원 평가하기	112
수학 이야기	116
뿌리가 되는 수학	117



수열

1. 등차수열과 등비수열

01 수열	121
02 등차수열	123
03 등비수열	130
수학 이야기	137
중단원 마무리하기	138

2. 수열의 합

01 합의 기호 Σ	143
02 여러 가지 수열의 합	146
탐구&융합	150
중단원 마무리하기	151

3. 수학적 귀납법

01 수열의 귀납적 정의	155
탐구&융합	157
02 수학적 귀납법	158
수학 이야기	162
중단원 마무리하기	163

대단원 평가하기	166
수학 이야기	170
뿌리가 되는 수학	171

부록

정답 및 풀이	172
상용로그표	195
삼각함수표	197
찾아보기	198
자료 출처	199



I 지수함수와 로그함수

옛날부터 수학자들은 아주 큰 수나 작은 수를 나타내거나 계산할 때의 불편함을 줄이기 위해 고심했다.

그 결과 지수와 로그의 개념을 고안해냈으며, 지수법칙과 로그 계산법은 계산기가 발명되기 전까지 큰 수나 거듭제곱이 포함된 복잡한 계산에 큰 도움이 되었다.

또한, 지수함수와 로그함수는 다양한 자연 현상과 사회 현상을 분석하고 예측하는 데 매우 중요한 역할을 한다.





지수함수나 로그함수를 이용하여 건축물을 디자인할 수 있다.

1. 지수와 로그

2. 지수함수와 로그함수

이 단원에서는

거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이해하고,
지수법칙을 실수의 범위까지 확장한다. 또, 로그의 뜻과 성질을
이해하고, 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 및 그 활용을 알아본다.

1

지수와 로그

01

거듭제곱과 거듭제곱근

02

지수의 확장

03

로그

04

상용로그

“수학을 공부할 때 큰 수의 곱셈과 나눗셈, 제곱과 세제곱처럼 성가신 것이 없다. 그래서 이러한 방해물을 어떻게 제거할 수 있을까 계속 생각했다.”

(출처: Budd, C. J. 외, 『Mathematics Galore!』)



네이피어(Napier, J., 1550~1617)

영국의 수학자, 천문학자

- 이 글은 네이피어가 1614년 로그 계산법을 처음 소개한 『놀라운 로그 체계의 기술』에서 찾아볼 수 있다. 그는 'Napier's bones'라 불리는 곱셈과 나눗셈 계산기와 로그 계산법을 발명하여 천문 연구에 큰 도움을 주었다.

01 거듭제곱과 거듭제곱근

학습 목표

거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

준비하기

1 다음 수의 제곱근을 구하시오.

- (1) 0.49 (2) $(-2)^2$

2 다음을 계산하시오.

- (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ (2) $\sqrt{27} \div \sqrt{3}$

더가서기

정사각형의 한 변의 길이를 알 때의 넓이, 정육면체의 한 모서리의 길이를 알 때의 부피는 거듭제곱의 꼴로 나타낼 수 있다.

이제 거꾸로 정사각형의 넓이를 알 때 한 변의 길이, 정육면체의 부피를 알 때 한 모서리의 길이를 나타내는 방법에 대하여 알아보자.



거듭제곱

생각 열기

컴퓨터의 정보량을 나타내는 단위인 메비바이트 (MiB), 기비바이트 (GiB), 테비바이트 (TiB) 사이에 다음과 같은 관계가 있다.



$$1 \text{ GiB} = 1024 \text{ MiB}, \quad 1 \text{ TiB} = 1024 \text{ GiB}$$

- 1024를 2의 거듭제곱으로 나타내어 보자.
- 다음은 1 TiB가 몇 MiB인지 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$1 \text{ TiB} = 2^{\square} \text{ GiB} = (2^{\square} \times 2^{\square}) \text{ MiB} = 2^{\square} \text{ MiB}$$

어떤 수 a 를 n 번 곱한 것을 a^n 으로 나타내고,

$$a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$$

을 통틀어 a 의 거듭제곱이라고 한다.

이때 a^n 에서 a 를 거듭제곱의 밑, n 을 거듭제곱의 지수라고 한다.

$$\leftarrow a = a^1 \text{이다.}$$

$$\begin{array}{c} a^n \leftarrow \text{지수} \\ \uparrow \\ a \leftarrow \text{밑} \end{array}$$

중학교에서 배운 지수법칙을 정리하면 다음과 같다.

지수가 자연수일 때의 지수법칙

a, b 가 실수이고 m, n 이 자연수일 때,

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$
- $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \quad (a \neq 0) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$

● **문제 1** 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0, b \neq 0$)

(1) $ab^3 \times a^2b^4$

(2) $(a^2b)^3$

(3) $a^4b^3 \div \left(\frac{b^2}{a}\right)^3$

● **거듭제곱근**

제곱하여 실수 a 가 되는 수를 a 의 제곱근이라 하고, 세제곱하여 실수 a 가 되는 수를 a 의 세제곱근이라고 한다.

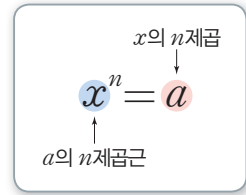
일반적으로 n 이 2 이상인 자연수일 때, n 제곱하여 실수 a 가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n = a$$

의 근 x 를 a 의 n 제곱근이라고 한다.

a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a 의 **거듭제곱근**이라고 한다.

실수 a 의 n 제곱근은 복소수의 범위에서 n 개가 있음이 알려져 있다. 그러나 여기에 서는 거듭제곱근 중에서 실수인 것만 다루기로 한다.



➡ x 가 a 의 n 제곱근이다.
 $\Leftrightarrow x^n = a$

● **예제 1** 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하시오.

(1) -1 의 세제곱근

(2) 16 의 네제곱근

➡ (1) 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 판별식 D 는 $D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ 이므로, $x^2 - x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

풀이 (1) -1 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -1$ 이므로

$$x^3 + 1 = 0, \quad (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

이때 $x^2 - x + 1 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로 $x + 1 = 0$ 에서 $x = -1$

따라서 -1 의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -1 이다.

(2) 16 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 16$ 이므로

$$x^4 - 16 = 0, \quad (x-2)(x+2)(x^2 + 4) = 0$$

이때 $x^2 + 4 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로 $(x-2)(x+2) = 0$ 에서 $x = \pm 2$

따라서 16 의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-2, 2$ 이다.

답 (1) -1 (2) $-2, 2$

● **문제 2** 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하시오.

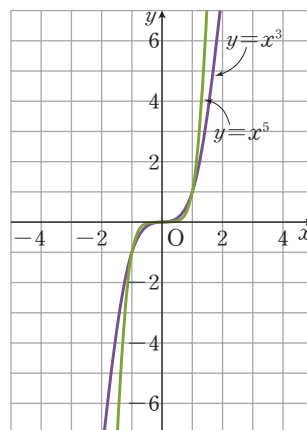
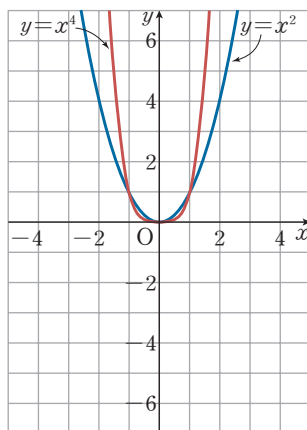
(1) -8 의 세제곱근

(2) 49 의 네제곱근

이제 함수 $y=x^n$ 의 그래프를 이용하여 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것을 찾아 보자.

함께하기

다음은 네 함수 $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$ 의 그래프이다.



활동 ① x 축에 평행한 직선 $y=a$ 를 그은 후, 이 직선과 주어진 네 함수의 그래프의 교점의 개수를 각각 조사해 보자.

활동 ② 활동 ①의 결과로부터 알 수 있는 사실을 말해 보자.

실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$ 의 실근이므로 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

따라서 다음과 같이 n 이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표를 구하면, a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것을 찾을 수 있다.

① n 이 짝수인 경우

함수 $y=x^n$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다.

(i) $a > 0$ 일 때, a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 양수와 음수의 두 개가 있고, 이것을 각각

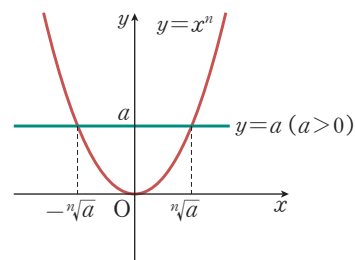
$$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$$

와 같이 나타낸다.

(ii) $a=0$ 일 때, a 의 n 제곱근은 0 하나뿐이다.

즉, $\sqrt[n]{0}=0$ 이다.

(iii) $a < 0$ 일 때, a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 없다.



② n 이 짝수일 때,
 $y=x^n$ 에 x 대신 $-x$ 를 대입하면

$$y=(-x)^n=x^n$$

이므로 함수 $y=x^n$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

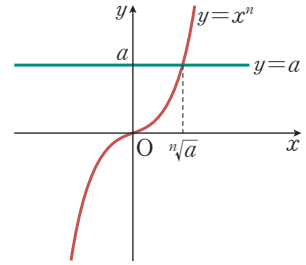
▶ n 이 홀수일 때,
 $y=x^n$ 에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면
 $-y=(-x)^n=-x^n$
 즉, $y=x^n$
 이므로 함수 $y=x^n$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

② n 이 홀수인 경우

함수 $y=x^n$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다.

a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나뿐이고, 이것을 $\sqrt[n]{a}$ 와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



▶ $\sqrt[n]{a}$ 는 ' n 제곱근 a '라고 읽는다.
 또, $\sqrt[n]{a}$ 는 간단히 $\sqrt{a}$ 로 나타낸다.

a 의 실수인 n 제곱근

n 이 2 이상인 자연수일 때,

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

예 1 ① 16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 2, -2 이므로

$$\sqrt[4]{16}=2, -\sqrt[4]{16}=-2$$

② -16 의 네제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

③ -27 의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -3 이므로

$$\sqrt[3]{-27}=-3$$

▶ n 이 홀수일 때, $\sqrt[n]{a}$ 의 부호는 a 의 부호와 일치한다.

문제 3 다음 값을 구시오.

(1) $\sqrt[3]{8}$

(2) $\sqrt[4]{81}$

(3) $\sqrt[5]{-32}$

(4) $-\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

문제 4 전해 내려오는 이야기에 따르면 고대 그리스에서는 전염병을 퇴치하기 위하여, 아폴론 신전에 있는 정육면체 모양의 제단을 처음 제단의 부피의 2배인 정육면체 모양으로 새로 만들어야 했다고 한다. 처음 제단의 부피가 8 m^3 라 할 때, 새로 만들어야 하는 제단의 한 모서리의 길이를 구시오.



● 거듭제곱근의 성질

지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 성질을 알아보자.

$a > 0$ 이고 n 이 2 이상인 자연수일 때, $\sqrt[n]{a}$ 는 n 제곱하면 a 가 되는 양수이므로

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

가 성립한다.

이를 이용하면 $a > 0$, $b > 0$ 이고 n 이 2 이상인 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$$

이다. 이때 $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$ 이므로 $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} > 0$ 이다.

따라서 $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ 는 ab 의 양의 n 제곱근이므로 다음이 성립한다.

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

한편, $a > 0$ 이고 m, n 이 2 이상인 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = a^m$$

이다. 이때 $\sqrt[n]{a} > 0$ 이므로 $(\sqrt[n]{a})^m > 0$ 이다.

따라서 $(\sqrt[n]{a})^m$ 은 a^m 의 양의 n 제곱근이므로 다음이 성립한다.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

생각 **토록**

$\sqrt[n]{a^m}$ 과 $\sqrt[m]{a^n}$ 은 같을까?

문제 5 $a > 0$, $b > 0$ 이고 m, n 이 2 이상인 자연수일 때, 다음이 성립함을 보이시오.

$$(1) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(2) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

■ 거듭제곱근의 성질

$a > 0$, $b > 0$ 이고 m, n 이 2 이상인 자연수일 때,

① $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

보기 ① $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \times 8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ ② $\sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

③ $(\sqrt[4]{9})^2 = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

④ $\sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

문제 6 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{125} \times \sqrt[4]{5}$

(2) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$

(3) $(\sqrt[6]{49})^3$

(4) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$

문제 7 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{54} - 6\sqrt[3]{2}$

(2) $2\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{2}$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} + 2\sqrt[4]{3}$

(4) $(\sqrt[3]{11})^4 - \sqrt[3]{121}$

탐구

문제 8 다음 계산에서 잘못된 부분을 찾아 그 이유를 설명하고 바르게 고치시오.

$$\sqrt[4]{(-6)^4} + \sqrt[3]{-2^6} = -6 + 4 = -2$$

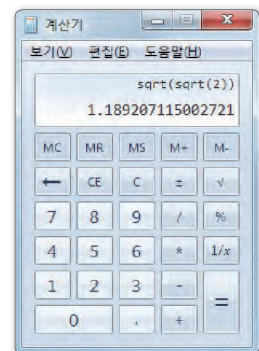
생각
넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림과 같은 컴퓨터 계산기 프로그램에서 2, $\sqrt{}$, $\sqrt{}$ 를 차례대로 누르면 $\sqrt[4]{2}$ 의 어림한 값을 구할 수 있다.

활동 ① $\sqrt[4]{2}$ 의 어림한 값을 구할 때, $\sqrt{}$ 를 두 번 누르는 이유를 말해 보자.

활동 ② $\sqrt[16]{2}$ 의 어림한 값을 구하려면 2를 누른 후 $\sqrt{}$ 를 몇 번 눌러야 하는지 말해 보자.



02 지수의 확장

학습 목표

- 지수가 정수, 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.
- 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

준비하기

다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $2^3 \times 2^2 = 2^{\square}$ (2) $2^6 \div 2^2 = 2^{\square}$

(3) $(2^5)^2 = 2^{\square}$ (4) $2^4 \times 3^4 = \square^4$

더가서기

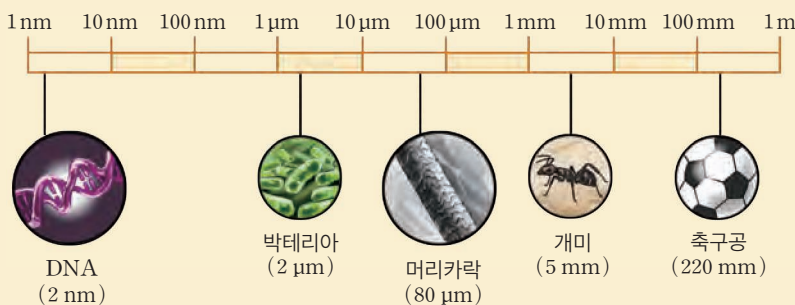
정확한 양을 표현하기 위해 자연수에서 정수, 유리수, 실수로 수의 범위가 확장되었다.

마찬가지로 정확한 양을 거듭제곱으로 나타내기 위하여 지수를 자연수에서 정수, 유리수, 실수로 확장할 필요가 있다.

지수가 정수인 경우

생각 열기

머리카락의 굵기는 평균 $80 \mu\text{m}$ (마이크로미터)이고 DNA의 폭은 2 nm (나노미터)라고 한다. 여기서 $1 \mu\text{m}$ 는 $\frac{1}{10^6} \text{ m}$ 이고, 1 nm 는 $\frac{1}{10^9} \text{ m}$ 이다.



(출처: 천합지이, 『나노 테크놀로지 입문』)

① 1 m는 $1 \mu\text{m}$ 의 몇 배인지 말해 보자.

② 다음은 1 nm가 몇 μm 인지 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$1 \text{ nm} = \frac{1}{10^9} \text{ m} = \frac{1}{10^9} \times 10^{\square} \mu\text{m} = \frac{1}{10^{\square}} \mu\text{m}$$

지금까지는 지수가 양의 정수인 경우만 다루었다. 이제 지수의 범위를 0 또는 음의 정수까지 확장해 보자.

a 가 0이 아닌 실수일 때, 양의 정수 m, n 에 대하여 지수법칙

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 성립한다.

그런데 $m=0$ 일 때 ①이 성립한다고 하면

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$$

이므로 $a^0=1$ 로 정의할 수 있다.

또, 양의 정수 n 에 대하여 $m=-n$ 일 때도 ①이 성립한다고 하면

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \text{이다.}$$

이므로 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 로 정의할 수 있다.

따라서 지수가 0 또는 음의 정수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

예 ① $2^0 = 1$

② $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

문제 1 다음 값을 구하시오.

(1) $(\sqrt[3]{5})^0$

(2) $(-2)^0$

(3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

(4) $(-3)^{-3}$

다음은 통해 지수가 음의 정수인 경우에도 지수법칙이 성립함을 확인해 보자.

함께하기 $a \neq 0$ 이고 m, n 이 음의 정수일 때,

$$m = -p, n = -q \quad (p, q \text{는 양의 정수})$$

라 하면 다음이 성립한다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{-p} a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} \\ &= \frac{1}{a^{\square}} = a^{-(\square)} \\ &= a^{-p-q} = a^{(-p)+(-q)} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^{\square}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\square}}} \\ &= a^{\square} = a^{(-p)(-q)} \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

① m, n 중에서 하나만 음의 정수인 경우에도 위와 같은 방법으로 지수법칙이 성립함을 보일 수 있다.

위의 활동에서 $a \neq 0$ 이고 m, n 이 음의 정수일 때,

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

이 성립함을 알 수 있다. 이것은 지수가 0일 때도 성립한다.

문제 2 $a \neq 0, b \neq 0$ 이고 m, n 이 0 또는 음의 정수일 때, 다음 지수법칙이 성립함을 보이시오.

(1) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(2) $(ab)^n = a^n b^n$

일반적으로 지수가 정수일 때도 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 정수일 때의 지수법칙

① ②는 m, n 의 대소에 관계없이 성립한다.

$a \neq 0, b \neq 0$ 이고 m, n 이 정수일 때,

① $a^m a^n = a^{m+n}$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ $(ab)^n = a^n b^n$

예 ① $2^5 \times 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2 = 4$

② $3^{-3} \div 3 = 3^{-3-1} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

③ $a \neq 0$ 일 때, $(a^{-2})^3 = a^{-2 \times 3} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$

④ $a \neq 0, b \neq 0$ 일 때, $(ab^3)^{-2} = a^{-2}(b^3)^{-2} = a^{-2}b^{-6} = \frac{1}{a^2 b^6}$

문제 3 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0, b \neq 0$)

(1) $3^7 \times 3^{-4}$

(2) $2^2 \div (2^{-1})^{-3}$

(3) $(a^{-3}b^2)^{-2}$

(4) $(ab)^5 \div (a^2b^{-3})^{-2}$

지수가 유리수인 경우

지수의 범위를 유리수까지 확장해 보자.

$a > 0$ 일 때, 두 정수 p, q 에 대하여 지수법칙

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

이 성립한다. 지수가 유리수인 경우에도 이 등식이 성립한다고 하면 두 정수 m, n ($n \geq 2$)에 대하여

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

이므로, $a^{\frac{m}{n}}$ 은 a^m 의 양의 n 제곱근이다. 즉, 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

주의 지수가 유리수일 때, $a < 0$ 이면

$$5 = (5^2)^{\frac{1}{2}} = \{(-5)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-5)^{2 \times \frac{1}{2}} = -5$$

와 같은 모순이 생긴다. 따라서 $a > 0$ 인 조건이 필요하다.

따라서 지수가 유리수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

유리수인 지수

$a > 0$ 이고 m, n ($n \geq 2$)이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{특히} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

예 1 ① $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

② $9^{-\frac{3}{2}} = 9^{\frac{-3}{2}} = \sqrt{9^{-3}} = \sqrt{(3^2)^{-3}} = \sqrt{(3^{-3})^2} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

문제 4 다음 값을 구하시오.

(1) $4^{\frac{3}{2}}$

(2) $125^{-\frac{2}{3}}$

(3) $81^{0.75}$

(4) $16^{-0.5}$

다음을 통해 지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립함을 확인해 보자.

함께하기 $a > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때,

$$r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q} \quad (m, n, p, q \text{는 정수}, n \geq 2, q \geq 2)$$

라 하면 다음이 성립한다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{\square}} \sqrt[nq]{a^{\square}} = \sqrt[nq]{a^{\square}} \\ &= a^{\frac{\square}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^r)^s &= \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} \\ &= \sqrt[q]{a^{\square}} = a^{\frac{\square}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}} \\ &= a^{rs} \end{aligned}$$

위의 활동에서 $a > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때,

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

이 성립함을 알 수 있다.

문제 5 $a > 0, b > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때, 다음 지수법칙이 성립함을 보이시오.

(1) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

(2) $(ab)^r = a^r b^r$

일반적으로 지수가 유리수일 때도 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때,

① $a^r a^s = a^{r+s}$

② $a^r \div a^s = a^{r-s}$

③ $(a^r)^s = a^{rs}$

④ $(ab)^r = a^r b^r$

보기 ① $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

② $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}})^6 = (a^{\frac{1}{2}})^6 (b^{\frac{1}{3}})^6 = a^{\frac{1}{2} \times 6} b^{\frac{1}{3} \times 6} = a^3 b^2$

문제 6 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a > 0, b > 0$)

(1) $5^{-\frac{3}{2}} \times 5^{0.5}$

(2) $3^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$

(3) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

(4) $a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} \times (a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

예제 1 $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{a^5 \sqrt{b^2}} \div \sqrt[3]{a^2 b}$

(2) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

풀이 (1) $\sqrt[3]{a^5 \sqrt{b^2}} \div \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[3]{a^5 \sqrt[2]{b^2}} \div \sqrt[3]{a^2 b} = a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{1}{3}} \div (a^2 b)^{\frac{1}{3}}$
 $= a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}}$
 $= a^1 = a$

(2) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2\}$
 $= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3$
 $= a - b$

답 (1) a (2) $a - b$

② (2) 곱셈 공식
 $(x-y)(x^2+xy+y^2)$
 $= x^3 - y^3$
 을 이용하여 전개한다.

문제 7 $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{ab^3} \times \sqrt[12]{a^7 b^5} \div \sqrt[3]{a^5 b}$

(2) $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

지수가 실수인 경우

지수의 범위가 실수까지 확장됨을 $3^{\sqrt{2}}$ 을 통하여 알아 보자.

$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$ 이므로 $\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워지는 유리수

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$$

를 지수로 갖는 수

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, \dots$$

은 오른쪽 표와 같이 어떤 일정한 수에 가까워진다는 사실이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$ 으로 정의한다.

이와 같은 방법으로 $a > 0$ 이고 x 가 실수일 때, a^x 을 정의할 수 있다.

일반적으로 지수가 실수일 때도 다음 지수법칙이 성립한다.

x	3^x
1	3
1.4	4.655536722
1.41	4.706965002
1.414	4.727695035
1.4142	4.728733930
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\sqrt{2}$	$3^{\sqrt{2}}$

지수가 실수일 때의 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때,

① $a^x a^y = a^{x+y}$

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$

④ $(ab)^x = a^x b^x$

문제 8 $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $3^{2\sqrt{3}} \times 3^{2-2\sqrt{3}}$

(2) $a^{\sqrt{5}+1} \div a^{\sqrt{5}-2}$

(3) $((\sqrt{5})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$

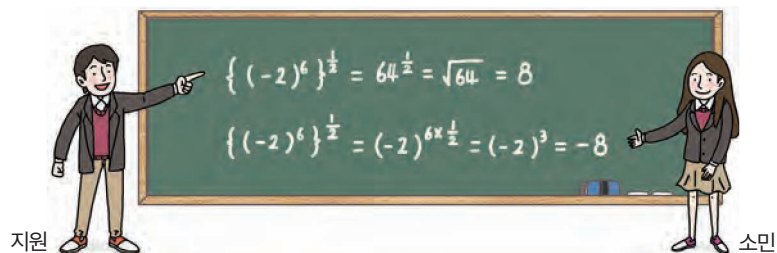
(4) $(a^{\frac{\sqrt{2}}{2}} b^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$

생각
넓히기



문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음은 지원이와 소민이가 각각 $\{(-2)^6\}^{\frac{1}{2}}$ 을 계산한 것이다.



활동 ▶ 지원이와 소민이 중에서 잘못 계산한 사람은 누구인지 말하고, 그 이유를 말해 보자.

순식간은 얼마나 빠를까?

정수		분수	
크기	이름	크기	이름
10^0	일(一)	10^{-1}	분(分)
10^1	십(十)	10^{-2}	리(厘)
10^2	백(百)	10^{-3}	모(毛)
10^3	천(千)	10^{-4}	사(絲)
10^4	만(萬)	10^{-5}	홀(忽)
10^8	억(億)	10^{-6}	미(微)
10^{12}	조(兆)	10^{-7}	섬(纖)
10^{16}	경(京)	10^{-8}	사(沙)
10^{20}	해(垓)	10^{-9}	진(塵)
10^{24}	자(秭)	10^{-10}	애(埃)
10^{28}	양(穰)	10^{-11}	묘(渺)
10^{32}	구(溝)	10^{-12}	막(漠)
10^{36}	간(澗)	10^{-13}	모호(模湖)
10^{40}	정(正)	10^{-14}	준순(浚巡)
10^{44}	재(載)	10^{-15}	수유(須臾)
10^{48}	극(極)	10^{-16}	순식(瞬息)
10^{52}	항하사(恒河沙)	10^{-17}	탄지(彈指)
10^{56}	아승기(阿僧祇)	10^{-18}	찰나(刹那)
10^{60}	나유타(那由他)	10^{-19}	육덕(六德)
10^{64}	불가사의(不可思議)	10^{-20}	허공(虛空)
10^{68}	무량수(無量數)	10^{-21}	청정(淸淨)

‘찰나의 순간’, ‘순식간에 벌어진 일’과 같이 아주 짧은 시간을 표현할 때, 찰나 또는 순식이라는 말을 쓴다.

그런데 찰나와 순식은 어느 정도의 짧은 시간을 나타낼까? 또, 어떤 차이가 있을까?

동양에서는 수를 읽을 때 주로 중국과 인도에서 전래한 수사(數詞, 사물의 수량이나 순서를 나타내는 품사)를 이용하는데, 왼쪽 표와 같이 찰나(刹那)는 10^{-18} , 순식(瞬息)은 10^{-16} 을 나타낸다. 즉, 순식은 찰나보다 100배 더 긴 시간을 나타낼을 알 수 있다.

찰나가 어느 정도의 시간인지 정확한 정의는 없으나, 대략 $\frac{1}{75}$ 초 또는 약 0.013초 정도의 시간으로 알려져 있다.

항하사, 나유타, 불가사의, 무량수 등은 불교에서 나온 용어로 ‘헤아릴 수 없이 많다’는 뜻으로 이해할 수 있는데, ‘항하사’는 인도 갠지스강에 있는 모래알의 수만큼 많다는 뜻이라고 한다.

한편, 영어에서는 10의 거듭제곱에서 사용하는 어근인 ten(10), hundred(10^2), thousand(10^3), million(10^6), billion(10^9)을 사용하여 수를 읽는다.

특히, 구골(googol)은 10^{100} , 구골플렉스(googolplex)는 10^{googol} , 즉 $10^{10^{100}}$ 을 나타내는 수이고, 구골플렉시안(googolplexian)은 $10^{\text{googolplex}}$ 을 나타내는 수로 1 다음에 0이 1조 개가 붙는 아주 큰 수이다.

(출처: 김창덕, 『우리나라 명수법에 대한 소고(III)』)

03 로그

학습 목표

로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

준비하기

다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $3\square=27$ (2) $10\square=\frac{1}{\sqrt{1000}}$

다가 서기

흔히 매우 큰 수를 ‘천문학적인 수’라 일컫는데, 이는 천문학에서 큰 수가 이용되기 때문이다. 큰 수는 계산이 불편하므로 쉽게 계산할 수 있는 새로운 수인 로그가 발명되었다. 이에 대해 프랑스의 수학자 라플라스(Laplace, P. S., 1749~1827)는 “로그의 발명으로 천문학자의 수명이 두 배가 되었다.”라고 말했다.

(출처: 루타 라이머 외, 『수학자도 사람이다! 1』)



로그

생각 열기 다음은 민서와 현규의 대화이다.



▶ 현규의 대답을 식으로 나타내어 보자.

위의 **생각 열기**에서 나타낸 식 $2^x=10$ 에서 x 를 2와 10을 이용하여 기호로 나타내는 방법을 알아보자.

$a>0, a\neq 1$ 일 때, 양수 N 에 대하여

$$a^x=N$$

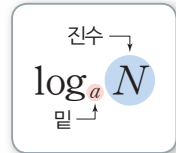
을 만족시키는 실수 x 는 오직 하나 존재한다. 이 수 x 를

$$\log_a N$$

으로 나타내고, a 를 밑으로 하는 N 의 **로그**라고 한다.

이때 N 을 $\log_a N$ 의 진수라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



로그

$a>0, a\neq 1, N>0$ 일 때,

$$a^x=N \iff x=\log_a N$$

참고

앞으로 특별한 언급 없이 $\log_a N$ 으로 쓸 때는 밑 a 와 진수 N 이 위의 조건을 모두 만족시키는 것으로 생각한다.

log는 logarithm의 약자이다.

① $2^5 = 32 \iff 5 = \log_2 32$
 ② $3^{-3} = \frac{1}{27} \iff -3 = \log_3 \frac{1}{27}$

문제 1 다음 등식을 $x = \log_a N$ 의 꼴로 나타내시오.

(1) $(\sqrt{3})^4 = 9$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ (3) $8^{\frac{1}{3}} = 2$

문제 2 다음 등식을 $a^x = N$ 의 꼴로 나타내시오.

(1) $\log_2 1 = 0$ (2) $\log_4 16 = 2$ (3) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$

예제 1 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 16$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

풀이 (1) $\log_2 16 = x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$2^x = 16$$

$$16 = 2^4 \text{이므로} \quad x = 4$$

따라서 $\log_2 16 = 4$ 이다.

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$$

$$9 = 3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \text{이므로} \quad x = -2$$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ 이다.

답 (1) 4 (2) -2

문제 3 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_3 27$ (2) $\log_2 \frac{1}{16}$
 (3) $\log_{\frac{1}{4}} 64$ (4) $\log_5 \sqrt{125}$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \log_a N = x \\ &\Leftrightarrow a^x = N \end{aligned}$$

예제 2 다음 등식을 만족시키는 N 의 값을 구하시오.

$$(1) \log_3 N = 4$$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}} N = 3$$

풀이 (1) 로그의 정의에 의하여 $N = 3^4 = 81$

(2) 로그의 정의에 의하여 $N = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

답 (1) 81 (2) $\frac{1}{8}$

문제 4 다음 등식을 만족시키는 N 의 값을 구하시오.

$$(1) \log_4 N = -3$$

$$(2) \log_{\frac{1}{5}} N = -2$$

로그의 성질

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 알아보자.

$a > 0, a \neq 1$ 일 때, $a^0 = 1, a^1 = a$ 이므로 로그의 정의에 의하여

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

이다.

또, $M > 0, N > 0$ 일 때, $\log_a M = m, \log_a N = n$ 으로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$a^m = M, a^n = N$$

이고 지수법칙에 의하여

$$MN = a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$M^k = (a^m)^k = a^{mk} \quad (k \text{는 실수})$$

이다. 따라서 로그의 정의를 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = m - n = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^k = mk = k \log_a M \quad (k \text{는 실수})$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow a^x = N \\ &\Leftrightarrow \log_a N = x \end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 성질

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때,

① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k 는 실수)

보기

① $\log_4 1 = 0, \log_5 5 = 1$

② $\log_3 15 = \log_3 (3 \times 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$

③ $\log_2 \frac{5}{2} = \log_2 5 - \log_2 2 = \log_2 5 - 1$

④ $\log_3 \sqrt{8} = \log_3 \sqrt{2^3} = \log_3 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_3 2$

문제 5 로그의 성질을 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_6 \frac{1}{\sqrt{6}}$

(2) $\log_3 \sqrt[4]{27}$

(3) $-\log_{\frac{1}{5}} 25$

예제 3 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 \frac{8}{3} + 2 \log_2 \sqrt{6}$

(2) $2 \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 5 - \log_3 4\sqrt{5}$

풀이 (1) $\log_2 \frac{8}{3} + 2 \log_2 \sqrt{6} = \log_2 \frac{8}{3} + \log_2 (\sqrt{6})^2 = \log_2 \frac{8}{3} + \log_2 6$

$= \log_2 \left(\frac{8}{3} \times 6 \right) = \log_2 16$

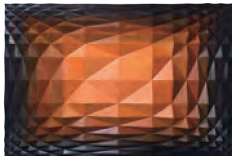
$= \log_2 2^4 = 4$

(2) $2 \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 5 - \log_3 4\sqrt{5} = \log_3 2^2 + \log_3 5^{\frac{1}{2}} - \log_3 4\sqrt{5}$

$= \log_3 4 + \log_3 \sqrt{5} - \log_3 4\sqrt{5}$

$= \log_3 \frac{4 \times \sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \log_3 1$

$= 0$



☞ 미국의 화가 록웰
(Rockwell, D.)의 로그를
이용한 작품

답 (1) 4 (2) 0

문제 6 다음 값을 구하시오.

(1) $3 \log_4 2\sqrt{2} - \log_4 \sqrt{2}$

(2) $\log_5 2 - \log_5 2\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$

예제 4 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_{10} 24$

(2) $\log_{10} 75$

풀이 (1) $\log_{10} 24 = \log_{10} (2^3 \times 3) = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3$
 $= 3 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 3a + b$

(2) $\log_{10} 75 = \log_{10} (3 \times 5^2) = \log_{10} 3 + \log_{10} 5^2$
 $= \log_{10} 3 + 2 \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + 2 \log_{10} \frac{10}{2}$
 $= \log_{10} 3 + 2(1 - \log_{10} 2) = -2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 2$
 $= -2a + b + 2$

답 (1) $3a + b$ (2) $-2a + b + 2$

문제 7 $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_2 100$

(2) $\log_2 \frac{3}{10}$

(3) $\log_2 \frac{\sqrt{45}}{2}$

수학 이야기

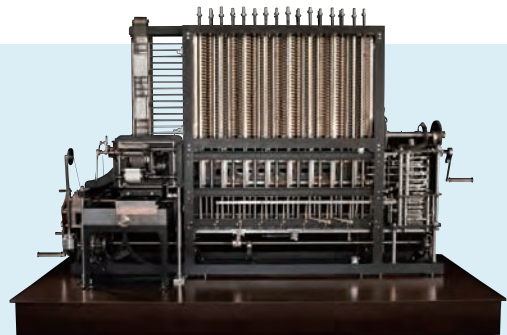


네이피어의 뼈

계산을 쉽게 하고자 하는 인간의 소망은 고대부터 계산기를 만들려는 노력으로 이어졌다.

중국에서는 주판이 만들어져 널리 사용되었고, 19세기 초에 영국의 수학자 배비지(Babbage, C., 1792~1871)가 발명한 기계식 계산기인 차분 기관은 오늘날 계산기의 모태가 되었다.

한편, 계산기 말고도 계산을 편리하게 하는 보조 도구의 개발은 인류의 전 역사를 통해 널리 이루어졌다. 그중에서도 로그를 발명한 네이피어(Napier, J., 1550~1617)는 복잡한 계산을 쉽게 할 수 있는 도구로 '네이피어의 뼈(Napier's bones)'를 고안함으로써 기계식 계산기의 토대를 쌓았다. 네이피어의 뼈를 이용한 계산은 35년 후 파스칼(Pascal, B., 1623~1662)이 계산기를 발명하는 데 영향을 주었으며 컴퓨터의 개발에도 큰 도움을 주게 되었다.



배비지의 차분 기관

(출처: EBS, 2015)

● 로그의 밑의 변환

생각 열기 다음에 답하시오.

- ① $\log_{16} 64$ 의 값을 구해 보자.
- ② $\frac{\log_2 64}{\log_2 16}$ 와 $\frac{\log_4 64}{\log_4 16}$ 의 값을 각각 구하고, 그 값을 ①의 결과와 비교해 보자.

$a > 0, a \neq 1, b > 0$ 일 때, a 를 밑으로 하는 로그 $\log_a b$ 를 1이 아닌 양수 c 를 밑으로 하는 로그로 나타내어 보자.

$\log_a b = m, \log_c a = n$ 으로 놓으면 $b = a^m, a = c^n$ 이므로

$$b = a^m = (c^n)^m = c^{mn}$$

이다. 로그의 정의에 의하여 $mn = \log_c b$ 이므로

$$(\log_a b)(\log_c a) = \log_c b$$

이다. 따라서 양변을 $\log_c a$ 로 나누면 다음이 성립한다.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

■ 로그의 밑의 변환

② $a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1$
이므로
 $\log_c a \neq 0$

② 로그의 밑을 다른 수로 바꿀 때 로그의 밑의 변환을 이용하면 편리하다.

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1 \text{ 일 때, } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\text{예} \quad \log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$$

문제 8 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_{216} 36$

(2) $\log_{\sqrt{3}} 27$

문제 9 1이 아닌 세 양수 a, b, c 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

(2) $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c a) = 1$

예제 5 $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_3 16$

(2) $\log_{10} 9$

풀이 (1) $\log_3 16 = \frac{\log_5 16}{\log_5 3} = \frac{\log_5 2^4}{\log_5 3} = \frac{4 \log_5 2}{\log_5 3} = \frac{4a}{b}$

(2) $\log_{10} 9 = \frac{\log_5 9}{\log_5 10} = \frac{\log_5 3^2}{\log_5 (2 \times 5)} = \frac{2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 5} = \frac{2b}{a+1}$

답 (1) $\frac{4a}{b}$ (2) $\frac{2b}{a+1}$

문제 10 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_2 \sqrt{6}$

(2) $\log_5 18$

생각
넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음은 1이 아닌 세 양수 a , b , c 에 대하여 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ 임을 보이는 과정이다.

$a^{\log_b c} = x$ 라 하면 로그의 정의에 의하여

$$\log_b c = \log_a x \quad \dots\dots ①$$

로그의 밑의 변환에 의하여

$$\log_b c = \frac{1}{\boxed{}}, \quad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} \quad \dots\dots ②$$

①과 ②에서 $\frac{1}{\boxed{}} = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ 이므로 $\log_c x = \frac{\boxed{}}{\log_c b} = \boxed{}$

로그의 정의에 의하여 $x = c^{\boxed{}}$

따라서 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ 이다.

활동 ① ☐ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

활동 ② 위의 성질을 이용하여 $4^{\log_2 9}$ 의 값을 구해 보자.

로그의 밑과 진수에 필요한 조건

$\log_a N$ 을 정의할 때 밑 a 는 1이 아닌 양수이어야 하고 진수 N 은 양수이어야 한다. 이와 같은 조건이 왜 필요한지 그 이유를 예를 통해 알아보자.



1 밑 a 는 왜 1이 아닌 양수이어야 할까?

① $a < 0$ 인 경우

$a = -3, N = 5$ 라 하면 $\log_{-3} 5 = x$ 에서 $(-3)^x = 5$
이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

② $a = 0$ 인 경우

$N = 5$ 라 하면 $\log_0 5 = x$ 에서 $0^x = 5$
이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

③ $a = 1$ 인 경우

$N = 5$ 라 하면 $\log_1 5 = x$ 에서 $1^x = 5$
이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

따라서 ①, ②, ③으로부터 $\log_a N$ 에서 밑 a 는 1이 아닌 양수이어야 함을 알 수 있다.

2 진수 N 은 왜 양수이어야 할까?

① $N < 0$ 인 경우

$a = 5, N = -2$ 라 하면 $\log_5 (-2) = x$ 에서 $5^x = -2$
이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

② $N = 0$ 인 경우

$a = 5$ 라 하면 $\log_5 0 = x$ 에서 $5^x = 0$
이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

따라서 ①과 ②로부터 $\log_a N$ 에서 진수 N 은 양수이어야 함을 알 수 있다.

탐 구 $\log_{x+1} (8-x)$ 가 정의되는 정수 x 를 모두 구해 보자.

04 상용로그

학습 목표

상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

준비하기

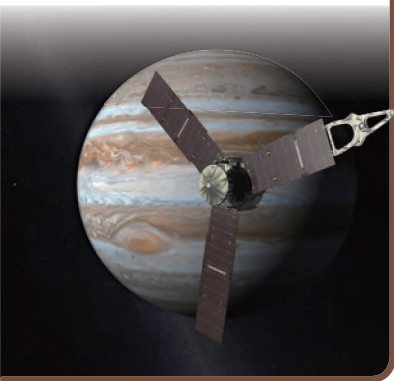
다음 ☐ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $\log_{10} 100 = \square$

(2) $\log_{10} 0.001 = \square$

다가서기

미국 항공 우주국(NASA)의 목성 탐사선 주노(JUNO)는 약 2800000000 km의 거리를 비행하여 목성에 도착했는데, 이 거리는 2.8×10^9 km로 나타낼 수 있다. 무게나 길이, 거리 등과 같이 우리가 일상생활에서 사용하는 수는 10의 거듭제곱으로 나타내는 경우가 많으므로, 자연 현상이나 사회 현상을 탐구할 때 밑이 10인 로그를 사용하면 편리하다.



상용로그

생각 열기

pH는 수소 이온 농도인 $[H^+]$ 의 지수를 나타낸 것으로 0에서 14까지 측정된다. 이때 $[H^+]$ 가 10배씩 증가하면 pH는 1씩 감소한다고 한다.



(출처: Wilbraham 외, 『Chemistry』)

- ① 다음 표는 pH와 $[H^+]$ 사이의 대응 관계를 나타낸 것이다. 표를 완성해 보자.

pH	5		7		9
$[H^+]$	10^{-5}	10^{-6}		10^{-8}	

- ② pH가 2인 레몬의 $[H^+]$ 는 pH가 7인 순수한 물의 $[H^+]$ 의 몇 배인지 구해 보자.

위의 생각 열기에서 pH는 $-\log_{10} [H^+]$ 로 구할 수 있다.

이와 같이 실생활에서 10을 밑으로 하는 로그를 사용하는 경우가 많다.

10을 밑으로 하는 로그를 **상용로그**라 하며, 양수 N 에 대하여 상용로그 $\log_{10} N$ 은 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다. 예를 들어 $\log_{10} 2$ 를 간단히 $\log 2$ 로 나타낸다.

한편, $\log 10^n = \log_{10} 10^n = n$ 이므로 10의 거듭제곱 꼴의 수에 대한 상용로그의 값은 로그의 성질을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

① $\log 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$

② $\log \sqrt[3]{100} = \log_{10} \sqrt[3]{10^2} = \log_{10} 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

● **문제 1** 다음 상용로그의 값을 구하시오.

- (1) $\log 1000$ (2) $\log \frac{1}{10000}$
 (3) $\log \sqrt[4]{10^5}$ (4) $\log 10\sqrt{10}$

이 책의 부록에 있는 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

상용로그표를 이용하면 정수 부분이 한 자리인 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있다.

예를 들어 오른쪽 상용로그표에서

$\log 2.28$ 의 값을 구할 때, 2.2의 가로줄과 8의 세로줄이 만나는 곳의 수 0.3579를 찾으면 된다. 즉,

$$\log 2.28 = 0.3579$$

이다.

수	0	1	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0682	.0719	.0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	.3010	.3032	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3747	.3766	.3784
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

▶ 상용로그표에서 .3579는 0.3579를 뜻한다.

▶ 상용로그표에 있는 상용로그의 값은 어림한 값이지만 편의상 등호를 사용하여 나타낸다.

● **문제 2** 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

- (1) $\log 3.73$ (2) $\log 6.09$

상용로그표와 로그의 성질을 이용하면 상용로그표에 없는 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있다.

● **예제 1** 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

- (1) $\log 416$ (2) $\log 0.00887$

풀이 (1) 상용로그표에서 $\log 4.16 = 0.6191$ 이므로

$$\begin{aligned}\log 416 &= \log (4.16 \times 10^2) = \log 4.16 + \log 10^2 \\ &= 0.6191 + 2 = 2.6191\end{aligned}$$

(2) 상용로그표에서 $\log 8.87 = 0.9479$ 이므로

$$\begin{aligned}\log 0.00887 &= \log (8.87 \times 10^{-3}) = \log 8.87 + \log 10^{-3} \\ &= 0.9479 + (-3) = -2.0521\end{aligned}$$

답 (1) 2.6191 (2) -2.0521

문제 3 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $\log 53.6$

(2) $\log 0.0952$

예제 2 어떤 광원으로부터 d m 떨어진 지점에서 사람이 느끼는 감각 강도는

$$\log \frac{h}{d^2} \quad (h > 0 \text{인 상수})$$

라고 한다. 감각 강도가 3일 때의 광원으로부터의 거리는 감각 강도가 1일 때의 광원으로부터의 거리의 몇 배인지 구하시오.

풀이 감각 강도가 3, 1일 때의 광원으로부터의 거리를 각각 d_1 m, d_2 m라 하면

$$3 = \log \frac{h}{d_1^2}, \quad 1 = \log \frac{h}{d_2^2}$$

$$\text{이므로} \quad \frac{h}{d_1^2} = 10^3, \quad \frac{h}{d_2^2} = 10$$

$$\text{즉, } d_1^2 = \frac{h}{1000}, \quad d_2^2 = \frac{h}{10} \text{이므로} \quad \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{1}{100}$$

$$\text{따라서 } \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{10} \text{이므로 감각 강도가 3일 때의 광원으로부터의 거리는 감각 강도가 1}$$

$$\text{일 때의 광원으로부터의 거리의 } \frac{1}{10} \text{배이다.}$$

$$\text{답 } \frac{1}{10} \text{ 배}$$

별의 밝기는 눈으로 보이는 밝기인 겉보기 등급과 실제 밝기인 절대 등급으로 나뉜다.

문제 4 지구로부터의 거리가 x 광년인 별의 겉보기 등급을 m , 절대 등급을 M 이라 하면

$$m - M = 5 \log x - 5$$

가 성립함이 알려져 있다. 겉보기 등급이 3, 절대 등급이 -2 인 별의 지구로부터의 거리는 몇 광년인지 구하시오.

생각
넓히기



문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

빛이 어떤 유리판을 한 장 통과할 때마다 그 밝기가 5 %씩 감소한다고 한다.

(단, $\log 9.5 = 0.9777$, $\log 5.984 = 0.7770$ 으로 계산한다.)

1x(럭스)는 빛의 조명도를 나타내는 단위이다.

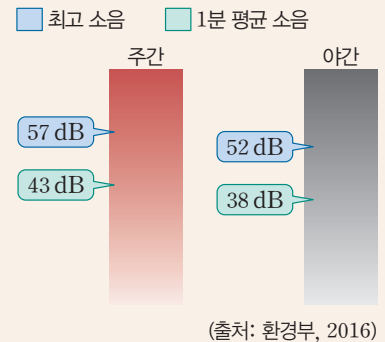
활동 1 밝기가 1lx인 빛이 이 유리판을 n 장 통과하였을 때의 밝기를 식으로 나타내어 보자.

활동 2 밝기가 1000 lx인 빛이 이 유리판을 10장 통과하였을 때의 밝기를 구해 보자.

충간 소음, 지혜롭게 해결하는 방법은?

공동 주택이 늘어나면서 충간 소음이 사회적 문제가 되고 있다. 특히, 겨울철에는 난방을 위해 창문을 닫고 생활하기 때문에 충간 소음을 더 심하게 느낀다고 한다.

충간 소음은 소리의 세기에 따른 소리의 크기로 측정할 수 있는데, 법으로 정한 충간 소음의 허용 기준은 오른쪽 그림과 같다.



한편, 소리의 세기가 $I \text{ W/m}^2$ 일 때, 소리의 크기 $D \text{ dB}$ 는

$$D = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

와 같이 정한다고 한다. 이때 dB(데시벨)은 소리의 크기를 나타내는 단위이다.

탐 구 1 다음 표는 유형에 따른 소리의 세기를 조사한 것이다. 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

소리 유형	$I \text{ W/m}^2$	$\frac{I}{10^{-12}}$	$D \text{ dB}$
속삭이는 대화	10^{-10}		
냉장고 또는 청소기 소리	10^{-8}		
물건을 떨어뜨리는 소리	$10^{-6.5}$		
망치질 소리	10^{-6}		
전화벨 소리	10^{-5}		
스피커 음악 소리	$10^{-3.5}$		

2 1의 표에서 최고 소음을 기준으로 주간과 야간에 허용 가능한 소리 유형을 각각 정리해 보자.

주간	
야간	

3 충간 소음을 줄이기 위해 실천할 수 있는 방법을 조사하여 발표해 보자.



중단원 마무리하기

● 거듭제곱과 거듭제곱근

- (1) n 이 2 이상인 자연수일 때, 방정식 $x^n = a$ 의 근 x 를 실수 a 의 n 제곱근이라고 한다.
 (2) a 의 실수인 n 제곱근

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(3) 거듭제곱근의 성질

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 이 2 이상인 자연수일 때,

- ① $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
 ③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ ④ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

● 지수의 확장

- (1) $a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때,

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- (2) $a > 0$ 이고 $m, n (n \geq 2)$ 이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

(3) 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때,

- ① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y = a^{x-y}$
 ③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $(ab)^x = a^x b^x$

● 로그

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때,

- (1) 로그: $a^x = N \iff x = \log_a N$

(2) 로그의 성질

- ① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
 ② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
 ③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
 ④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k 는 실수)

- (3) 로그의 밑의 변환: $b > 0, c > 0, c \neq 1$ 일 때,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

- (4) 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하며, 보통 $\log N$ 과 같이 나타낸다.

01

다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하시오.

- (1) -125 의 세제곱근
 (2) $\frac{1}{81}$ 의 네제곱근

02

다음 값을 구하시오.

- (1) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{72}$ (2) $\frac{\sqrt[4]{2500}}{\sqrt[4]{4}}$
 (3) $(\sqrt[6]{4})^3$ (4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$

03

다음 값을 구하시오.

- (1) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}}$ (2) $4^{\frac{4}{3}} \div 4^{-\frac{1}{6}}$
 (3) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$ (4) $\left(3^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \times 2^{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{6}}$

04

다음 등식을 만족시키는 x 의 값을 구하시오.

- (1) $\log_5 x = 2$ (2) $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$
 (3) $\log x = -4$ (4) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{100}} = x$

05

다음 값을 구하시오.

- (1) $\log_{0.25} 16$ (2) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$
 (3) $\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{3}{2}$ (4) $2 \log \sqrt{10} - \log 100$

06 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

(2) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{16} \times \sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{3}$

(3) $\sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{27^2}$

(4) $\sqrt[5]{32^2} \div (\sqrt[3]{2})^6 \div \sqrt[3]{\sqrt{64}}$

07 $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되도록 하는 정수 n 의 값을 모두 구하시오.

08 $x > 0$ 에 대하여 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $x + \frac{1}{x}$

(2) $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$

09 실수 x 에 대하여 $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{4}{3}$ 일 때, a^{4x} 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

10 $\log_{x-2}(6-x)$ 가 정의되도록 하는 정수 x 의 개수를 구하시오.

11 세 수

$$A=3^{\log_5 27 - \log_3 18}, B=\log_5 25 - \log_5 \frac{1}{125}, C=\log_2 \{\log_4 (\log_8 64)\}$$

중에서 가장 큰 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

12 $\log (\log_2 3) + \log (\log_3 4) + \log (\log_4 5) + \cdots + \log (\log_{1023} 1024)$ 의 값을 구하시오.13 $\log_5 2=a, \log_5 3=b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_5 12$

(2) $\log_5 \frac{27}{2}$

(3) $\log_6 72$

(4) $\log_3 \frac{9}{16}$

14 상용로그표를 이용하여 다음에 답하시오.

(1) $\log N=0.7582$ 인 실수 N 의 값을 구하시오.

(2) (1)을 이용하여 $\log M=3.7582$ 인 실수 M 의 값을 구하시오.

15 $\log 4.73=0.6749$ 임을 이용하여 다음 등식을 만족시키는 x 의 값을 구하시오.

(1) $x=\log 473$

(2) $\log x=-1.3251$

16 두 실수 a, b 에 대하여 $4^{\frac{1}{a}} = 25^{\frac{1}{b}} = 1000$ 이 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

17 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $\frac{2}{1-a^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{8}}} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{1+a}$ 의 값을 구하시오.

사고력 ⊕

18 세 양수 a, b, c 에 대하여
 $3^a = 5^b = k^c, \quad ab = bc + ca$
 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

|서·술·형|

19 이차방정식 $x^2 - 2x - 7 = 0$ 의 두 근이 $\log_2 a, \log_2 b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

20 세기가 x W인 전파가 벽을 투과하여 세기가 y W인 전파로 바뀔 때, 그 벽의 전파 감쇠비는 $10 \log \frac{y}{x}$ dB이라고 한다.

세기가 200 W인 전파가 어떤 벽을 투과하여 세기가 63 W인 전파로 바뀌었을 때, 이 벽의 전파 감쇠비는 몇 dB인지 상용로그표를 이용하여 구하시오.

(단, W(와트)는 전력의 단위이다.)



2

지수함수와 로그함수

01

지수함수와 로그함수

02

지수함수와 로그함수의
활용

“ 인류의 최대 결점은
지수함수를 이해할 수
없다는 데 있다. ”

(출처: www.albartlett.org)



바틀릿(Bartlett, A. A., 1923~2013)

미국의 물리학자

- 이 글은 바틀릿이 ‘계산, 인구와 에너지’라는 주제로 평생 동안 1742번의 강연을 할 때 늘 강조했던 말이다. 그는 기하급수적으로 증가하는 지수함수의 특성을 토대로 사회 개혁의 필요성을 주장한 에너지와 환경 문제의 전문가였다.

01 지수함수와 로그함수

학습 목표

- 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.
- 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

준비하기

1 방정식 $y = x^2$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

2 함수 $y = 3x - 1$ 의 역함수를 구하시오.

더가서기

이분법으로 분열하는 세포의 개체 수, 방사성 동위 원소의 잔류량, 혈액 속의 약물의 농도 등은 시간에 따라 일정한 비율로 변화한다.

이와 같이 변화하는 현상은 지수 또는 로그를 이용하여 함수로 나타낼 수 있다.



지수함수의 뜻과 그래프

생각 열기

강이나 호수 등의 민물에서 주로 서식하는 짚신벌레는 한 번 분열할 때마다 개체 수가 2배가 된다고 한다.



1 짚신벌레의 분열 횟수를 x , 개체 수를 y 라 하자. 처음 짚신벌레의 개체 수가 1일 때, 다음 표를 완성해 보자.

x	1	2	3	4	5	6
y	2					

2 1에서 x 와 y 사이의 관계를 식으로 나타내어 보자.

위의 생각 열기에서 x 와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면

$$y = 2^x$$

이다. 이때 x 에 대하여 2^x 의 값은 하나로 정해지므로 $y = 2^x$ 은 x 에 대한 함수이다.

a 가 1이 아닌 양수일 때, 실수 x 에 대하여 a^x 의 값은 하나로 정해진다. 따라서 x 에 a^x 을 대응시키면

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

은 x 에 대한 함수이다. 이 함수를 a 를 밑으로 하는 **지수함수**라고 한다.

예를 들어 함수 $y = 2^x$ 은 2를 밑으로 하는 지수함수이다.

참고

함수 $y = a^x$ 에서 지수 x 는 실수이므로 $a > 0$ 인 경우만 생각한다. 또, $a = 1$ 이면 함수 $y = a^x$ 은 $y = 1$ 인 상수함수가 된다. 따라서 지수함수에서는 밑이 1이 아닌 양수인 경우만 생각하기로 한다.

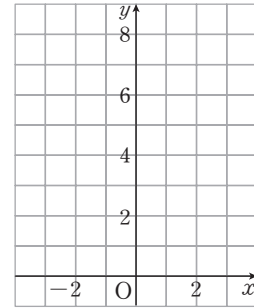
다음을 통해 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프의 모양을 알아보자.

함께하기 지수함수 $y=2^x$ 에 대하여 다음에 답해 보자.

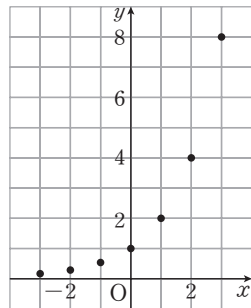
활동 ① 함수 $y=2^x$ 에서 실수 x 의 값에 대응하는 y 의 값을 구하여 다음 표를 완성해 보자.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...								...

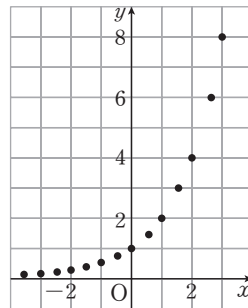
활동 ② 활동 ①의 표로부터 얻은 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보자.
또, 그 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 추측해 보자.



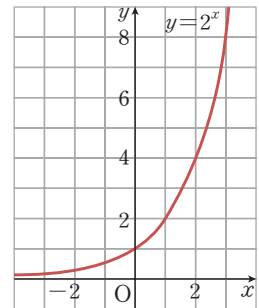
위의 표에서 얻은 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 [그림 1]과 같이 좌표평면 위에 나타내고, 더 많은 순서쌍을 [그림 2]와 같이 점으로 나타내어 그 점들을 매끄럽게 연결하면 [그림 3]과 같은 곡선이 나타난다. 이 곡선이 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

➤ $a > 0, a \neq 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $a^x > 0$ 이다.

➤ 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다.

위의 그래프에서 지수함수 $y=2^x$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합임을 알 수 있다.

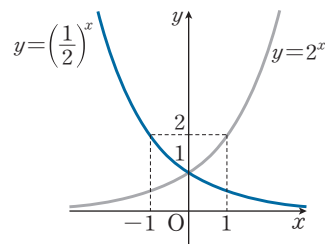
한편, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프는 x 축에 한없이 가까워진다.

즉, 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프의 점근선은 x 축이다.

④ $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ 이므로,
함수 $y=a^x$ 과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의
그래프는 y 축에 대하여 대칭
이다.

예제 1 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 그리시오.

풀이 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ 이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는
 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것
이다.
따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

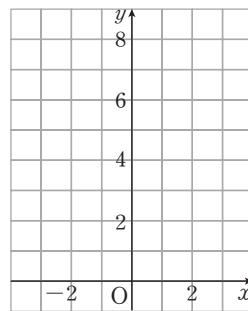


답 풀이 참조

문제 1 다음 지수함수의 그래프를 그리시오.

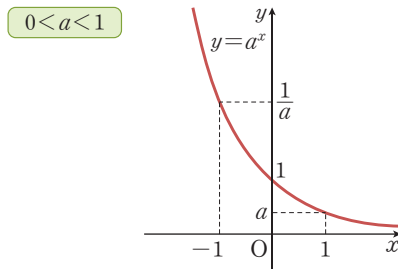
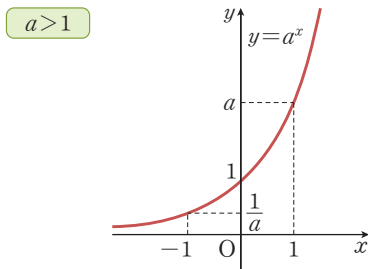
(1) $y=3^x$

(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



일반적으로 지수함수 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$)의 그래프는 a 의 값에 따라 다음과 같다.

④ $a\neq 0$ 일 때,
 $a^0=1$, $a^1=a$



위의 그래프에서 지수함수의 성질은 다음과 같음을 알 수 있다.

지수함수 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$)의 성질

④ $a>1$ 일 때, $x_1<x_2$ 이면
 $a^{x_1}<a^{x_2}$

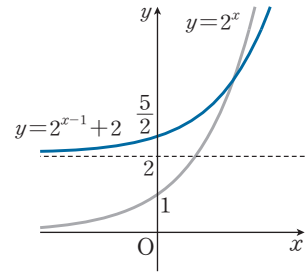
$0<a<1$ 일 때, $x_1<x_2$ 이면
 $a^{x_1}>a^{x_2}$

- ① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
- ② $a>1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 $0<a<1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
- ③ 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나고, x 축을 점근선으로 갖는다.

② 함수 $y=f(x-a)+b$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

예제 2 함수 $y=2^{x-1}+2$ 의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

풀이 함수 $y=2^{x-1}+2$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y=2^{x-1}+2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $y=2$ 이다.

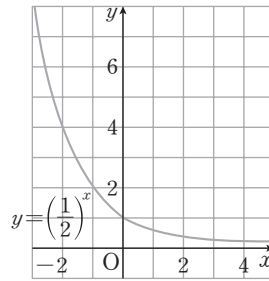
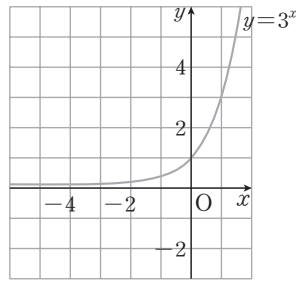


답 풀이 참조

문제 2 다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

(1) $y=3^{x+1}-2$

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$



로그함수의 뜻과 그래프

지수함수 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$)은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수를 갖는다.

이때 로그의 정의에 의하여

$$y=a^x \iff x=\log_a y$$

이므로, $x=\log_a y$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면 지수함수 $y=a^x$ 의 역함수

$$y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$$

를 얻는다. 이 함수를 a 를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.

따라서 로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

생각 **독**

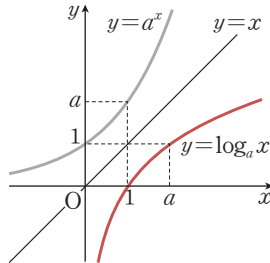
지수함수와 로그함수의 정의역과 치역 사이에는 어떤 관계가 있을까?

일반적으로 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)는 지수함수 $y = a^x$ 의 역함수이므로 이들의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

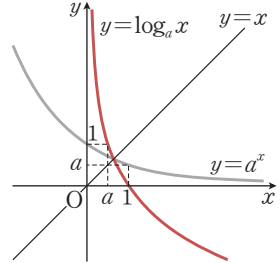
따라서 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프는 지수함수 $y = a^x$ 의 그래프를 이용하여 다음과 같이 그릴 수 있고, 그래프의 점근선은 y 축이다.

- $a > 0, a \neq 1$ 일 때,
 $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

$a > 1$



$0 < a < 1$



위의 그래프에서 로그함수의 성질은 다음과 같음을 알 수 있다.

로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 성질

- 1 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
- 2 $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
- 3 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나고, y 축을 점근선으로 갖는다.

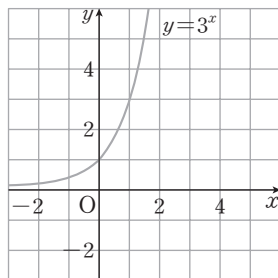
- $a > 1$ 일 때, $x_1 < x_2$ 이면
 $\log_a x_1 < \log_a x_2$
- $0 < a < 1$ 일 때, $x_1 < x_2$ 이면
 $\log_a x_1 > \log_a x_2$

- $y = \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

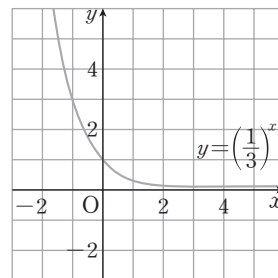
[참고] 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프와 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

문제 3 지수함수 $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 이용하여 다음 로그함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y = \log_3 x$



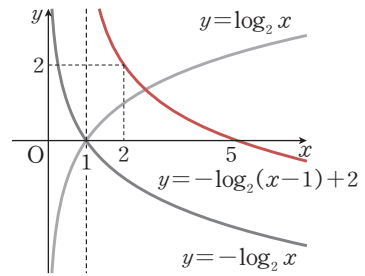
(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



▶ 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y = \log_2 x$ 즉, $y = -\log_2 x$

예제 3 함수 $y = -\log_2(x-1) + 2$ 의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

풀이 함수 $y = -\log_2(x-1) + 2$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y = -\log_2(x-1) + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $x=1$ 이다.

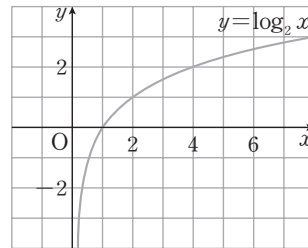
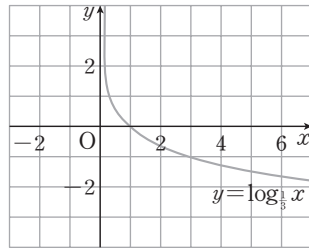


☞ 풀이 참조

문제 4 다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선을 구하시오.

(1) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 1$

(2) $y = -\log_2 \frac{1}{x+1} - 1$



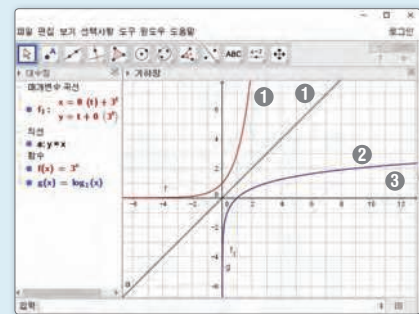
공학적
도구

지수함수와 로그함수의 그래프 사이의 관계

정보 처리

지수함수 $y=3^x$ 의 역함수의 그래프와 로그함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프가 같음을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 확인해 보자.

- 입력 창에 ' $y=3^x$ '와 ' $y=x$ '를 각각 입력하여 $y=3^x$ 와 $y=x$ 의 그래프를 그린다.
- 메뉴에서 '직선에 대하여 대칭'을 이용하여 $y=3^x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭인 그래프를 그린다.
- 입력 창에 ' $y=\log(3, x)$ '를 입력하여 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 그린다.
- ②와 ③의 그래프가 일치함을 확인한다.



● 두 수의 대소 비교

지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 두 수의 대소를 비교해 보자.

● 예제 4 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[8]{8}$

(2) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 100$, $2 \log_{\frac{1}{2}} 3$

① (1) 지수함수 $y=a^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때, $a > 1$ 이면 y 의 값은 증가하고, $0 < a < 1$ 이면 y 의 값은 감소한다.

② (2) 로그함수 $y=\log_a x$ 에서 x 의 값이 증가할 때, $a > 1$ 이면 y 의 값은 증가하고, $0 < a < 1$ 이면 y 의 값은 감소한다.

풀이 (1) $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[8]{8}=(2^3)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{3}{8}}$

지수함수 $y=2^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $\frac{1}{3} < \frac{3}{8}$ 이므로

$$2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{3}{8}}$$

따라서 $\sqrt[3]{2} < \sqrt[8]{8}$ 이다.

(2) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 100 = \log_{\frac{1}{2}} (10^2)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} 10$,

$$2 \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3^2 = \log_{\frac{1}{2}} 9$$

로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $10 > 9$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 10 < \log_{\frac{1}{2}} 9$$

따라서 $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 100 < 2 \log_{\frac{1}{2}} 3$ 이다.

☞ (1) $\sqrt[3]{2} < \sqrt[8]{8}$ (2) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 100 < 2 \log_{\frac{1}{2}} 3$

● 문제 5 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[5]{3}$

(2) $\sqrt[9]{0.5^{10}}$, $\sqrt[10]{0.5^9}$

● 문제 6 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $2 \log_3 \sqrt{15}$, $4 \log_3 2$

(2) $\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{5}} 64$, $3 \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}$

지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 제한된 범위에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

예제 5 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ 인 함수 $y=2^{x+2}-1$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

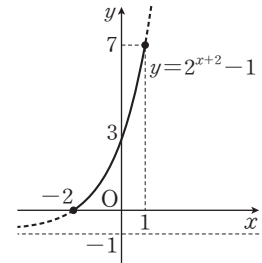
풀이 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2^{x+2}-1$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=2^{x+2}-1$ 은

$$x=-2\text{일 때, 최솟값 } 2^{-2+2}-1=0$$

$$x=1\text{일 때, 최댓값 } 2^{1+2}-1=7$$

을 갖는다.



답 최댓값: 7, 최솟값: 0

문제 7 정의역이 $\{x \mid 1 \leq x \leq 9\}$ 인 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x - 2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

생각
넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음은 경수, 명진, 선영이가 세 함수 $y=\log_2 x^2$, $y=2 \log_2 x$, $y=2 \log_2 |x|$ 에 대하여 각자의 생각을 말한 것이다.



활동 1 세 함수 $y=\log_2 x^2$, $y=2 \log_2 x$, $y=2 \log_2 |x|$ 의 그래프를 그려 보자.

활동 2 활동 1을 이용하여 경수, 명진, 선영이의 주장이 옳은지 확인해 보자.

02 지수함수와 로그함수의 활용

학습 목표

지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

준비하기

다음 방정식과 부등식을 푸시오.

(1) $x^2 - 4x + 3 = 0$

(2) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

다가 서기

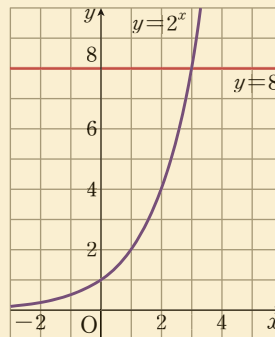
방향제가 기화하는 양은 지수함수로 나타낼 수 있고, 근력 운동을 할 때 근육의 증가량은 로그함수로 나타낼 수 있다고 한다.

이와 같이 우리 주변에는 지수함수와 로그함수로 나타내어지는 경우가 있는데, 이와 관련된 문제는 이들 함수의 성질을 이용하여 해결할 수 있다.



지수함수의 활용

생각 열기 오른쪽 그림은 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 이다.



- 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 의 교점의 개수를 구해 보자.
- 그래프를 이용하여 방정식 $2^x=8$ 을 만족시키는 x 의 값을 구해 보자.

위의 **생각 열기**에서 지수함수 $y=2^x$ 은 일대일함수이므로 방정식 $2^x=8$, 즉 $2^x=2^3$ 의 해는 $x=3$ 임을 알 수 있다.

일반적으로 지수에 미지수가 있는 방정식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$a > 0, a \neq 1 \text{ 일 때, } a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$$

예제 1 다음 방정식을 푸시오.

(1) $2^x = \frac{1}{32}$

(2) $\left(\frac{1}{27}\right)^x = 9^{x-5}$

풀이 (1) $\frac{1}{32} = 2^{-5}$ 이므로 주어진 방정식은 $2^x = 2^{-5}$

양변의 밑이 2로 같으므로 $x = -5$

(2) $\left(\frac{1}{27}\right)^x = (3^{-3})^x = 3^{-3x}$, $9^{x-5} = (3^2)^{x-5} = 3^{2x-10}$ 이므로 주어진

방정식은 $3^{-3x} = 3^{2x-10}$

양변의 밑이 3으로 같으므로 $-3x = 2x - 10$ 에서 $x = 2$

답 (1) $x = -5$ (2) $x = 2$

문제 1 다음 방정식을 푸시오.

(1) $3^x = 81$

(2) $4^{x+2} = 8^{x-2}$

(3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$

(4) $25^{3-x} = \left(\frac{1}{125}\right)^{2x-3}$

▶ 지수함수 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 0$)은

- (i) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
- (ii) $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

한편, 지수에 미지수가 있는 부등식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$\begin{array}{ll} a > 1 \text{ 일 때,} & a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2 \\ 0 < a < 1 \text{ 일 때,} & a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 > x_2 \end{array}$$

주의 지수에 미지수가 있는 부등식을 풀 때는 밑이 1보다 큰지 작은지에 따라 부등호의 방향이 달라짐에 유의한다.

예제 2 다음 부등식을 푸시오.

(1) $4^x < 8^{x-2}$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^x$

풀이 (1) $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, $8^{x-2} = (2^3)^{x-2} = 2^{3x-6}$ 이므로 주어진 부등식은 $2^{2x} < 2^{3x-6}$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로 $2x < 3x - 6$ 에서 $x > 6$

(2) $\left(\frac{1}{25}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ 이므로 주어진 부등식은 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$

양변의 밑이 $\frac{1}{5}$ 로 같고 1보다 작으므로 $x+2 \leq 2x$ 에서 $x \geq 2$

답 (1) $x > 6$ (2) $x \geq 2$

문제 2 다음 부등식을 푸시오.

(1) $32^{2x} \geq 128^{x-3}$

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x < \left(\frac{1}{9}\right)^{x-3}$

우리 주변에는 여러 가지 수량 사이의 관계를 지수함수로 표현할 수 있는 경우가 있다. 이와 관련된 문제를 해결해 보자.

예제 3 방사성 동위 원소 중 가장 안정적인 ^{14}C 는 5730년마다 그 양이 반으로 줄어든다고 한다. 어느 유적지의 벽화를 조사했더니 ^{14}C 가 62.5 g 남아 있었다. 처음 ^{14}C 의 양이 500 g이었다면 이 벽화는 몇 년 전의 것이라 할 수 있는지 말하시오.



반감기란 방사성 원소가 붕괴하여 그 양이 반으로 줄어드는 데 걸리는 시간을 뜻한다.

풀이 ^{14}C 의 반감기가 5730년이므로 이 벽화의 x 년 후에 남아 있는 ^{14}C 의 양은 처음 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$ 이 된다.

이 벽화의 처음 ^{14}C 의 양이 500 g이므로 x 년 후에 남아 있는 ^{14}C 의 양은

$$\left\{ 500 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5730}} \right\} \text{ g}$$

이고, 현재 남아 있는 ^{14}C 의 양이 62.5 g이므로

$$500 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5730}} = 62.5$$

$$\text{이 식을 정리하면} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5730}} = \frac{62.5}{5000}, \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5730}} = \left(\frac{1}{2} \right)^3$$

$$\text{양변의 밑이 } \frac{1}{2} \text{로 같으므로 } \frac{x}{5730} = 3 \text{에서}$$

$$x = 17190$$

따라서 17190년 전의 벽화라 할 수 있다.

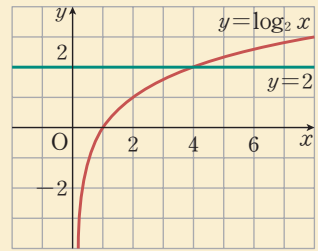
답 17190년

문제 3 어느 펀드 상품에 A 원을 투자할 때, t 년 후의 이익금은 $A\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{3}}$ 원이 된다고 한다. 처음 투자 금액이 90만 원이고 t 년 후의 이익금이 160만 원일 때, t 의 값을 구하시오.

문제 4 어떤 방향제는 개봉한 지 t 시간 후에 처음 양의 $\left(\frac{1}{50\sqrt{2}}\right)^t$ 만큼 기화되어 향기를 내는데, 기화되는 양이 처음 양의 $\frac{1}{128}$ 보다 적으면 사람이 더 이상 향기를 느끼지 못한다고 한다. 이 방향제의 향기가 지속되는 시간을 구하시오.

로그함수의 활용

생각 열기 오른쪽 그림은 로그함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 이다.



- 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점의 개수를 구해 보자.
- 그래프를 이용하여 방정식 $\log_2 x=2$ 를 만족시키는 x 의 값을 구해 보자.

위의 **생각 열기**에서 로그함수 $y=\log_2 x$ 는 일대일함수이므로 방정식 $\log_2 x=2$, 즉 $\log_2 x=\log_2 4$ 의 해는 $x=4$ 뿐임을 알 수 있다.

일반적으로 로그의 진수에 미지수가 있는 방정식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$a>0, a\neq 1 \text{이고 } x_1>0, x_2>0 \text{일 때,}$$

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \iff x_1 = x_2$$

예제 4 다음 방정식을 푸시오.

(1) $\log_2(3x-1)=\log_2(2x+3)$ (2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+2)=\log_3 5$

풀이 (1) 양변의 밑이 2로 같으므로 $3x-1=2x+3$ 에서

$$x=4 \quad \dots\dots ①$$

그런데 $3x-1, 2x+3$ 은 로그의 진수이므로 $3x-1>0, 2x+3>0$ 에서

$$x>\frac{1}{3} \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $x=4$

(2) 주어진 방정식을 변형하면 $\log_3(x-2)(x+2)=\log_3 5$

양변의 밑이 3으로 같으므로 $(x-2)(x+2)=5$ 에서 $x^2=9$

$$x=-3 \text{ 또는 } x=3 \quad \dots\dots ①$$

그런데 $x-2, x+2$ 는 로그의 진수이므로 $x-2>0, x+2>0$ 에서

$$x>2 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $x=3$

답 (1) $x=4$ (2) $x=3$

▶ 로그의 진수에 미지수가 있는 방정식을 풀 때는 로그의 진수가 양수임에 유의한다.

- ② 로그함수 $y = \log_a x$ 는
 (i) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 (ii) $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

■ 문제 5 다음 방정식을 푸시오.

(1) $\log_3 (x+1) + \log_3 (x+7) = 3$ (2) $\log_4 (3x+10) = \log_2 x$

한편, 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$x_1 > 0, x_2 > 0$ 에 대하여

$a > 1$ 일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 < x_2$

$0 < a < 1$ 일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 > x_2$

(주의) 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식을 풀 때는 밑이 1보다 큰지 작은지에 따라 부등호의 방향이 달라짐에 유의한다.

■ 예제 5 다음 부등식을 푸시오.

(1) $\log_2 (x-2) < 3$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} (3x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}} (4x+1)$

- ② 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식을 풀 때는 로그의 진수가 양수임에 유의한다.

풀이 (1) $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$ 이므로 $\log_2 (x-2) < \log_2 8$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로 $x-2 < 8$ 에서

$x < 10$ ①

그런데 $x-2$ 는 로그의 진수이므로 $x-2 > 0$ 에서

$x > 2$ ②

①, ②에서 $2 < x < 10$

(2) 양변의 밑이 $\frac{1}{3}$ 로 같고 1보다 작으므로 $3x-1 \leq 4x+1$ 에서

$x \geq -2$ ①

그런데 $3x-1, 4x+1$ 은 로그의 진수이므로 $3x-1 > 0, 4x+1 > 0$ 에서

$x > \frac{1}{3}$ ②

①, ②에서 $x > \frac{1}{3}$

답 (1) $2 < x < 10$ (2) $x > \frac{1}{3}$

■ 문제 6 다음 부등식을 푸시오.

(1) $\log_3 (x-1) < 2$ (2) $\log_{\frac{1}{2}} (2x+1) \geq \log_{\frac{1}{2}} (3x-2)$

우리 주변에는 여러 가지 수량 사이의 관계를 로그함수로 표현할 수 있는 경우가 있다. 이와 관련된 문제를 해결해 보자.

④ erg(에르그)는 에너지와 일의 양을 나타내는 단위로, 일을 뜻하는 그리스어 ergon에서 유래하였다.

예제 6 지진에 의해서 발생한 에너지의 양은 보통 리히터 규모로 나타내는데, 발생하는 에너지가 x erg(에르그)인 지진의 리히터 규모를 M 이라 하면

$$\log x = 11.8 + 1.5M$$

이 성립한다고 한다. 리히터 규모가 5인 지진의 에너지는 규모가 3인 지진의 에너지의 몇 배인지 구하시오.



풀이 리히터 규모가 3인 지진의 에너지를 x erg라 하면

$$\log x = 11.8 + 1.5 \times 3 = 16.3, \quad x = 10^{16.3}$$

리히터 규모가 5인 지진의 에너지를 y erg라 하면

$$\log y = 11.8 + 1.5 \times 5 = 19.3, \quad y = 10^{19.3}$$

이때

$$\frac{y}{x} = \frac{10^{19.3}}{10^{16.3}} = 10^{19.3-16.3} = 10^3 = 1000$$

이므로 규모가 5인 지진의 에너지는 규모가 3인 지진의 에너지의 1000배이다.

답 1000배

문제 7 처음 본 의미 없는 음절을 x 초 후까지 기억하는 학생의 비율을 $y\%$ 라 할 때,

$$y = 80 - 62 \log x$$

가 성립한다고 한다. 의미 없는 음절을 처음 본 200명의 학생 중에서 이것을 기억하는 학생이 36명 이하가 되는 것은 몇 초 후부터인지 구하시오.

생각
넓히기



문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

a^x 또는 $\log_a x$ 의 꼴이 반복되는 방정식의 해를 구해 보자.

활동 ① 방정식 $4^x - 3 \times 2^x - 4 = 0$ 을 다음 단계를 따라 풀어 보자.

- (1) $2^x = X$ ($X > 0$)로 놓고 주어진 방정식을 X 에 대한 방정식으로 나타내시오.
- (2) (1)의 방정식에서 X 의 값을 구하고, 이것을 이용하여 x 의 값을 구하시오.

활동 ② 방정식 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 8 = 0$ 을 풀어 보자.

실내 환기의 중요성

실내에는 눈에 보이지 않는 미세 먼지, 휘발성 유기 화합물 등의 유해 물질이 많이 있는데, 이러한 물질은 알레르기 비염이나 천식 등의 원인이 될 수 있다. 따라서 유해 물질이 실내에 쌓이지 않도록 환기를 통해 청결한 상태로 유지하는 것이 중요하다.

다음은 산소 농도에 관한 카드 뉴스이다.



공기 중 산소의 농도는 21 %입니다.

1



우리 몸의 모든 기관이나 조직들의 기능을 유지하기 위해 산소는 반드시 필요합니다.

2



공기 중에 산소 농도가 18 % 이하면 산소 결핍 상태, 16 % 이하면 산소 부족으로 인해 두통, 구토, 어지러움 등의 증상이 나타난다고 합니다.

3



사무실을 환기하지 않고 10분 간격으로 산소 농도를 측정하였더니, 바로 전에 측정한 농도의 1 %만큼 감소하는 것으로 나타났다고 합니다.

4

(출처: 안전 보건 공단, 2009)

탐 구 위의 카드 뉴스 ④를 보고, 다음에 답해 보자.

1 실내 환기가 되지 않는 어떤 사무실의 현재 산소 농도가 21 %이다. 이 사무실의 산소 농도를 10분 간격으로 측정할 때, n 번째 측정에서의 산소 농도를 $f(n)$ %라 하자. $f(n)$ 을 구하시오.

2 이 사무실의 산소 농도가 18 % 이하가 되는 경우는 몇 번째 측정부터인지 구하시오.
(단, $\log 6=0.7782$, $\log 7=0.8451$, $\log 9.9=0.9956$ 으로 계산한다.)

중단원 마무리하기

지수함수

- (1) 함수 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)을 a 를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.
- (2) 지수함수 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)의 성질
 - ① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
 - ② $a>1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 $0<a<1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 - ③ 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나고, x 축을 점근선으로 갖는다.

로그함수

- (1) 함수 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)를 a 를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.
- (2) 로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)의 성질
 - ① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
 - ② $a>1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 $0<a<1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 - ③ 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나고, y 축을 점근선으로 갖는다.

지수함수와 로그함수의 활용

- (1) 지수에 미지수가 있는 방정식 또는 부등식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.
 - ① $a>0, a\neq 1$ 일 때, $a^{x_1}=a^{x_2} \iff x_1=x_2$
 - ② $a>1$ 일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1<x_2$
 $0<a<1$ 일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1>x_2$
- (2) 로그의 진수에 미지수가 있는 방정식 또는 부등식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.
 $x_1>0, x_2>0$ 에 대하여
 - ① $a>0, a\neq 1$ 일 때,
 $\log_a x_1=\log_a x_2 \iff x_1=x_2$
 - ② $a>1$ 일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1<x_2$
 $0<a<1$ 일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2$

기본

01 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

- (1) $\sqrt[4]{3^3}, \sqrt[3]{3^4}$ (2) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- (3) $\log_4 25, \log_4 12$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{11}{5}, \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{2}$

02 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

- (1) 정의역이 $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$
- (2) 정의역이 $\{x | 3 \leq x \leq 9\}$ 인 함수 $y=\log_3 x - 1$

03 다음 방정식을 푸시오.

- (1) $2^{x-1}=128$
- (2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-3}$
- (3) $\log_2 (x+2)=-1$
- (4) $\log (x+1)+\log (x-1)=0$

04 다음 부등식을 푸시오.

- (1) $2^{x+2} \geq 32$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \frac{1}{81}$
- (3) $\log_2 (x+3) < 2$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 3$

- 05 집합 $A = \{(x, y) | y = a^x\}$ 에 대하여 $(m, n) \in A$ 일 때, 항상 A 의 원소인 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오. (단, $a > 0, a \neq 1$)

• 보기 •

㉠. $(m+1, an)$

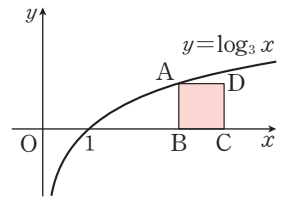
㉡. $(2m, n^2)$

㉢. $(m^2, 3n)$

㉣. $\left(-m, \frac{1}{n}\right)$

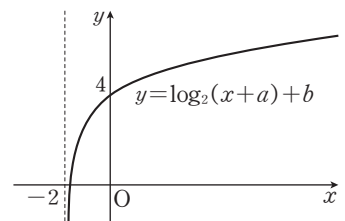
- 06 함수 $y = 2^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 함수 $y = 16 \times 2^{2x} + \frac{5}{2}$ 의 그래프가 되었다. 이때 p, q 의 값을 구하시오.

- 07 오른쪽 그림과 같이 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프 위의 점 A에 대하여 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 이때 점 D의 좌표를 구하시오.
(단, 두 점 B, C는 x 축 위의 점이다.)

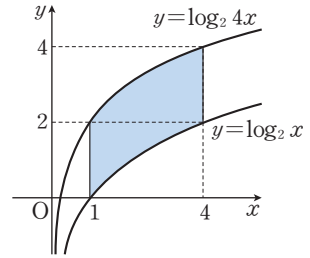


- 08 함수 $y = \log_a x + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x 좌표가 1, 2일 때, 상수 a, b 의 값을 구하시오. (단, $a > 0, a \neq 1$)

- 09 함수 $y = \log_2(x+a) + b$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b 의 값을 구하시오.



- 10 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 4x$ 의 그래프와 두 직선 $x=1$, $x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



- 11 다음 세 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt[4]{16}$, $(\sqrt[3]{4})^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(2) $3\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$, $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, $-2\log_{\frac{1}{2}} 4$

- 12 정의역이 $\{x|0 \leq x \leq 4\}$ 인 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=3^{x^2-6x+5}$

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+4x+4)$

- 13 x 에 대한 방정식 $|5^x-25|=k$ 가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

|서·술·형|

- 14 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2+2x\log_2 a+4\log_2 a-3>0$ 이 성립하도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.

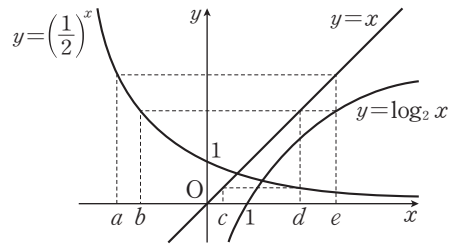


- 15 어느 공장에서 생산되는 보조 배터리의 초기 불량률은 12.8 %이었다. 매주 불량률을 절반으로 감소시킬 때, 보조 배터리의 불량률이 처음으로 0.1 % 이하가 되는 것은 몇 주 후인지 구하시오.

- 16 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}=2\sqrt{10}$ 이고, 직선 AB의 기울기는 3이다. 두 점 A, B의 x 좌표가 각각 a, b 일 때, 2^a+2^b 의 값을 구하시오. (단, $a < b$)

발 전

- 17 오른쪽 그림은 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 를 나타낸 것이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.
(단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



• 보기 •

ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^d = c$

ㄴ. $ce = 1$

ㄷ. $a + d = 0$

- 18 정의역이 $\{x | 1 \leq x \leq 100\}$ 인 함수 $y=2^{\log x} x^{\log 2} + 2 \times 2^{\log 100x}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

|서·술·형|

- 19 세라믹 재료 A에 대한 실험을 시작한 지 t_1 초 후, t_2 초 후의 측정 온도를 각각 T_1 °C, T_2 °C라 할 때, A의 열전도 계수 K 는 다음과 같다고 한다.

$$K = \frac{C(\log t_2 - \log t_1)}{T_2 - T_1} \quad (C \text{는 양수})$$

이 실험을 시작한 지 10초 후, 20초 후의 측정 온도가 각각 200 °C, 202 °C일 때, 측정 온도가 206 °C가 되는 때는 실험을 시작한 지 몇 초 후인지 구하시오.

(단, 열전도 계수는 일정하다.)

01 ● ● ●

-4의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 a , $\sqrt{16}$ 의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

02 ● ● ●

다음 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[7]{7}$ ② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}} = -2$
 ③ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[12]{2}$ ④ $\frac{\sqrt[3]{-25}}{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{-\frac{25}{2}}$
 ⑤ $\left(\sqrt[3]{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^6 = 5$

03 ● ● ●

$4^x=3$ 일 때, $\frac{8^x-8^{-x}}{2^x-2^{-x}}$ 의 값을 구하시오.

04 ● ● ●

두 양수 a, b 에 대하여

$$ab=5, a=25^{\frac{1}{x}}, b=5^{\frac{2}{y}}$$

일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값을 구하시오. (단, $xy \neq 0$)

05 ● ● ●

$x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3-6x-4$ 의 값은?

- ① 1 ② $2 \times 2^{\frac{1}{3}}$ ③ 3
 ④ $3 \times 2^{\frac{1}{3}}$ ⑤ 5

06 ● ● ●

두 실수 a, b 에 대하여 $81^a \times 27^b = 7$ 일 때, $4a+3b$ 의 값을 구하시오.

07 ● ● ●

모든 실수 x 에 대하여 $\log_3(x^2+ax+a+3)$ 이 정의되도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.

08 ● ● ●

$(\log_2 9 + \log_{\sqrt{3}} 2)^2 - (\log_2 9 - \log_{\sqrt{3}} 2)^2$ 의 값을 구하시오.

09 ...

1이 아닌 양수 x 에 대하여

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_5 x} = \frac{1}{\log_a x}$$

일 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

10 ...

$\log 3 = a$, $\log 5 = b$ 일 때, $\log_{15} 50$ 을 a , b 에 대한 식으로 나타내면?

- ① $\frac{1-b}{a-b}$ ② $\frac{1+b}{a-b}$ ③ $\frac{a-b}{a+b}$
 ④ $\frac{1-b}{a+b}$ ⑤ $\frac{1+b}{a+b}$

11 ...

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프 위의 서로 다른 세 점

$A(p, a)$, $B(-q, b)$, $C(-p-q, c)$

에 대하여 a , b , c 사이의 관계를 식으로 나타내시오.

12 ...

함수 $f(x) = 3^x$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

• 보기 •

ㄱ. $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

ㄴ. $f(x+y) = f(x)f(y)$

ㄷ. $f(3x) = \{f(x)\}^3$

13 ...

오른쪽 그림과 같이 두 함수

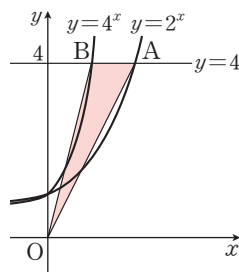
$y = 2^x$, $y = 4^x$ 의 그래프와 직

선 $y = 4$ 와의 교점을 각각 A,

B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓

이를 구하시오.

(단, O는 원점이다.)



14 ...

함수 $y = 9^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

• 보기 •

ㄱ. $y = 9^{-x}$

ㄴ. $y = 3^{2x-1}$

ㄷ. $y = 3^{3x+1}$

ㄹ. $y = 9^{x+2} - 1$

15 ...

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 2x + a}$ 의 최댓값이 16일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

16 ...

함수 $f(x) = \log_2 x$ 에 대하여 $f(b) - f(a) = 3$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하시오.

17 ...

다음 중 함수 $y = \log_3(3-x) + 2$ 에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

- ① 정의역은 $\{x | x < 3\}$ 이다.
- ② x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
- ③ 그래프의 점근선은 직선 $x=3$ 이다.
- ④ 그래프는 점 $(2, 2)$ 를 지난다.
- ⑤ 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동하면 겹쳐진다.

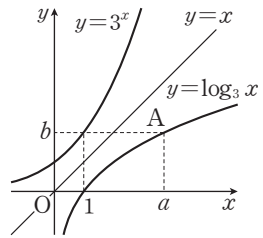
18 ...

다음 중에서 세 수 $A = -2\log_2 \frac{1}{9}$, $B = 4 + \log_2 5$, $C = 2 + 2\log_2 5$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$
- ② $A < C < B$
- ③ $B < A < C$
- ④ $C < A < B$
- ⑤ $C < B < A$

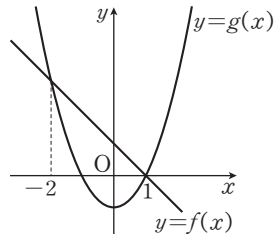
19 ...

오른쪽 그림은 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_3 x$ 의 그래프이다. $y=\log_3 x$ 의 그래프 위의 점 A의 좌표가 (a, b) 일 때, $\log_3 ab$ 의 값을 구하시오. (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



20 ...

직선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} < \left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)}$ 의 해를 구하시오.



21 ...

어느 기업에서 올해 기업의 부채가 자기 자본의 3배에 이르자, 내년부터 매년 부채를 전년도에 비해 10%씩 줄이고, 자기 자본은 20%씩 늘리는 계획을 세웠다. 이 계획대로 진행될 때, 이 기업의 자기 자본이 처음으로 부채보다 많아지는 해는 올해로부터 몇 년 후인지 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 로 계산한다.)

22 ...

$3^x = 4^y = 12^z$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ 의 값을 구하시오.

(단, $xyz \neq 0$)

23 ...

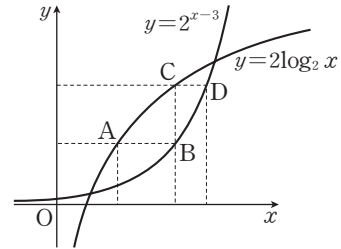
두 양수 a, b 에 대하여 $a^4 b^2 = 1$ 일 때, $\log_a a^3 b$ 의 값을 구하시오. (단, $a \neq 1$)

24 ...

다음 그림은 두 함수 $y = 2^{x-3}$, $y = 2\log_2 x$ 의 그래프이다.

$\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 2$ 일 때, 물음에 답하시오.

(단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



(1) 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 구하시오.

(2) 사각형 ABDC의 넓이를 구하시오.

25 ...

x 에 대한 이차방정식

$$(\log a + 3)x^2 - 2(\log a + 1)x + 1 = 0$$

이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.



정답을 맞힌 문항에 ○표하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02	거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해할 수 있다.	○ △ ×	11~16쪽
03 04 05 22	지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.	○ △ ×	17~22쪽
06 07 08 09 23	로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해할 수 있다.	○ △ ×	24~30쪽
10	상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	○ △ ×	32~34쪽
11 12 13 14 15	지수함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해할 수 있다.	○ △ ×	41~44쪽
16 17 18 19 24	로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해할 수 있다.	○ △ ×	44~48쪽
20 21 25	지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	49~54쪽

성취도 ○만족, △보통, ×미흡

에펠탑의 아름다움

파리의 상징인 에펠탑은 건축가 에펠(Eiffel, A. G., 1832~1923)에 의하여 프랑스 혁명 100주년을 기념하는 1889년에 완공되었다.

이 탑은 높이가 약 324 m이고 바닥을 이루는 정사각형의 한 변의 길이가 약 126 m에 이르는 거대한 철골 건축물로, 철골의 무게만 약 7300톤이나 된다.

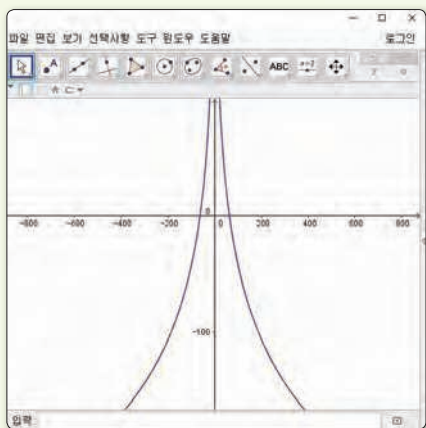
에펠은 이 탑을 세울 당시 탑이 너무 높아서 바람의 영향을 매우 크게 받을 것을 우려하여 완공된 뒤에도 직접 꼭대기에 올라가 확인을 했다고 전해진다. 또, 바람의 영향뿐만 아니라 거대한 철근의 무게를 이겨낼 수 있는 강도를 계산해야 했지만, 에펠은 어떤 계산이나 공식도 이용하지 않고 경험에만 의존하며 탑을 한 층 한 층 쌓아 나갔다고 한다.

에펠탑은 좌우 대칭의 우아한 곡선미를 자랑하고 있는데, 2004년 미국 콜로라도 대학의 기계공학과 교수인 와이드만(Weidman, P., 1941~)과 미시간 공과 대학의 수학과 교수인 피넬리스(Pinelis, I., 1952~)는 에펠탑의 측면을 이루는 곡선이 로그함수

$$y = -92 \log_e \frac{x}{63}$$

의 그래프와 같이 나타내어짐을 알았다. 여기서 로그의 밑 e 는 $e=2.7182\cdots$ 인 어떤 특별한 수를 나타낸다.

컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수 $y = -92 \log_e \frac{x}{63}$ 의 그래프를 그리고 다시 y 축에 대하여 대칭이동하면 다음 그림과 같다.



(출처: Banks, R. B., 『Towing Icebergs, Falling Dominoes, and Other Adventures in Applied Mathematics』)



전파의 세기와 지수, 로그

요즘에는 과거와 비교하면 훨씬 선명하고 뚜렷한 화질로 TV를 시청할 수 있다. 이러한 기술의 발달 뒤에는 방송 기술 전문가의 노력이 숨어 있다. 방송 기술 전문가는 조금 더 선명하고 뚜렷한 화질의 화면을 빠르고 효율적으로 전송하기 위하여 방송 시스템을 새롭게 설계하는 직업이다.

우리나라 TV 방송의 전송 방식은 디지털 TV 방식으로 방송국에서 제작한 프로그램을 디지털 신호로 바꾼 후 송신소를 통해 전파를 무선으로 전송하면 각 가정에서는 TV를 통해 수신하게 된다. 이때 송신소와 TV 사이의 거리가 멀수록 가정에 수신하는 전파의 세기가 약해지므로, 적절한 위치에 송신소를 설치하여 가정에서 TV를 시청하는 데 불편함이 없도록 해야 한다.



여기서 수신 전파의 세기를 나타내는 데 지수와 로그가 이용된다.

수신 전파의 세기를 P_R , 송신 전파의 세기를 P_T , 송신소와 TV 사이 거리를 d 라 할 때,

$$P_R = C \times P_T \times d^n \quad (C \text{는 상수})$$

이 성립하는데, 여기서 n 은 '경로 손실 지수(path loss exponent)'라고 한다. 또, 이 식의 양변에 상용로그를 취하면 n 을 P_R 와 P_T 에 대한 식으로 나타낼 수도 있다.

상수 C 의 값과 n 의 값은 실제 무선 환경을 측정하는 실험을 통하여 구하는데, n 의 값은 대략 -6 에서 -2 사이의 값으로 정해진다. 실제로,

- ① 막힘없이 탁 트인 공간에서 전파를 보낼 때의 n 의 값은 -2
- ② 일반적인 도시에서 전파를 보낼 때의 n 의 값은 -3
- ③ 전파가 직접 전송되면서 땅에 반사되어 전달될 때의 n 의 값은 -4

가 됨을 알아냈다.

이처럼 수학은 공식과 이론으로만 이루어진 막연한 것이 아니라 일상생활에서 접하는 다양한 물리적인 상황에 이용되고, 새로운 기술의 발달과 성능을 개선하는 데 쓰이는 많은 것들이 수학을 기초로 하고 있다.

(출처: Paulraj, A. 외, 'Introduction to Space-Time Wireless Communications,')



II 삼각함수

삼각비는 고대 이집트와 바빌로니아에서 피라미드의 건축이나 토지 측량, 천체 관측 등에 활용되었다.

6세기경 인도의 수학자들이 직각삼각형의 한 각에 대한 삼각비의 값을 함수로 생각하면서부터 삼각함수의 개념이 생겨났다고 한다.

이후 프랑스의 수학자 푸리에(Fourier, J. B. J., 1768~1830)가 열전도 문제를 연구하면서 삼각함수의 성질과 응용을 다루는 분야를 개척하였다.

피라미드의 건축에 삼각함수의 원리가 이용되었다.

1. 삼각함수

2. 삼각함수의 활용

이 단원에서는

일반각과 호도법, 삼각함수의 뜻과 그래프,

사인법칙과 코사인법칙을 알아본다.

1

삼각함수

“요즈음 삼각법 공부를 재미있어 하는 학생들을
상상하기 쉽지 않은데, 저는 참 재미있게 했습니다.”

(출처: Breitman, D., Byrd, D., 『This date in science:』
Clyde Tombaugh, discoverer of Pluto)

01
일반각과 호도법

02
삼각함수

03
삼각함수의 그래프



툼보(Tombaugh, C. W., 1906~1997)

미국의 천문학자

- 이 글은 아버지의 농장이 우박을 동반한 폭풍의 피해를 입어 대학 진학은 포기했지만 천문학자의 꿈은 포기하지 않았던 그가, 기하와 삼각법 등 천문학 공부에 필요한 수학 지식을 독학으로 공부했던 일을 회상하면서 한 말이다. 미국 애리조나주에 있는 로웰 천문대에 취직한 그는 1930년 2월 18일에 명왕성을 발견하였다.

01 일반각과 호도법

학습 목표

일반각과 호도법의 뜻을 안다.

준비하기

반지름의 길이가 4 cm이고 중심각의 크기가 60° 인 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하시오.

더 알아보기

피겨 스케이팅의 트리플 악셀과 태권도의 돌려차기, 금고의 다이얼 잠금장치 등과 같이 여러 바퀴를 회전하거나 회전 방향을 구분할 때는 0° 에서 360° 까지의 범위보다 좀 더 확장된 범위에서의 각의 크기가 필요하다.



일반각

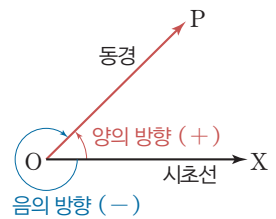
생각 열기 오른쪽 시계는 7시 정각을 가리키고 있다.

- 이 시계가 7시 10분을 가리키려면 분침을 어느 방향으로 몇 도만큼 회전시켜야 하는지 말해 보자.
- 이 시계가 6시 40분을 가리키려면 분침을 어느 방향으로 몇 도만큼 회전시켜야 하는지 말해 보자.



지금까지는 각의 크기를 0° 에서 360° 까지의 범위에서만 나타내었으나, 이제 각의 크기의 범위를 확장해 보자.

오른쪽 그림과 같이 평면 위의 두 반직선 OX 와 OP 에 의하여 $\angle XOP$ 가 정해질 때, $\angle XOP$ 의 크기는 $\overrightarrow{OP}$ 가 고정된 $\overrightarrow{OX}$ 의 위치에서 점 O 를 중심으로 $\overrightarrow{OP}$ 의 위치까지 회전한 양으로 정한다.



이때 $\overrightarrow{OX}$ 를 **시초선**, $\overrightarrow{OP}$ 를 **동경**이라고 한다.

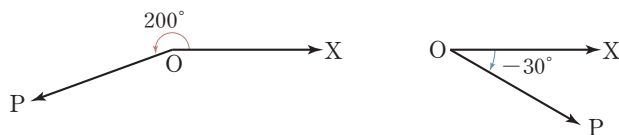
또, 동경 OP 가 점 O 를 중심으로 회전할 때, 시계바늘이 도는 방향과 반대인 방향을 양의 방향, 시계바늘이 도는 방향을 음의 방향이라고 한다.

각의 크기는 회전 방향이 양의 방향이면 양의 부호 $+$ 를, 음의 방향이면 음의 부호 $-$ 를 붙여서 나타낸다.

시초선(始初線)은 처음 시작하는 선, 동경(動徑)은 움직이는 선이라는 뜻이다.

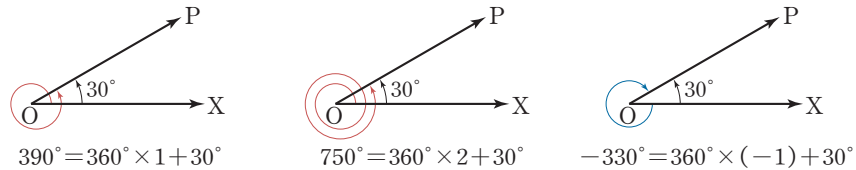
일반적으로 양의 부호 $+$ 는 생략한다.

예를 들어 시초선이 $\overrightarrow{OX}$ 일 때, 크기가 200° , -30° 인 각을 나타내는 동경 OP 의 위치를 그림으로 나타내면 각각 다음과 같다.



시초선 OX는 고정되어 있으므로 $\angle XOP$ 의 크기가 정해지면 동경 OP의 위치는 하나로 정해진다. 그런데 동경 OP의 위치가 정해져도 동경 OP가 양의 방향 또는 음의 방향으로 한 바퀴 이상 회전할 수 있으므로 $\angle XOP$ 의 크기는 하나로 정해지지 않는다.

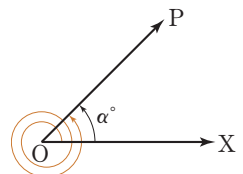
예를 들어 시초선 OX와 30° 의 위치에 있는 동경 OP가 나타내는 각의 크기는 다음과 같이 여러 가지이다.



일반적으로 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α° 라 하면 $\angle XOP$ 의 크기는

$$360^\circ \times n + \alpha^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이것을 동경 OP가 나타내는 **일반각**이라고 한다.

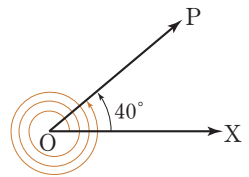


▶ 일반각으로 나타낼 때, α° 는 보통 $0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$ 또는 $-180^\circ < \alpha^\circ \leq 180^\circ$ 인 것을 택한다.

보기 $1120^\circ = 360^\circ \times 3 + 40^\circ$ 이므로 1120° 를 나타내는 동경 OP는 오른쪽 그림과 같고, 동경 OP가 나타내는 일반각은

$$360^\circ \times n + 40^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

이다.



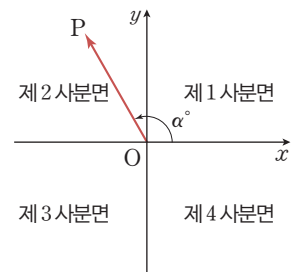
문제 1 다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ 의 꼴로 나타내시오.

(단, n 은 정수이고, $0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$ 이다.)

- (1) 20° (2) 610° (3) -290° (4) -1700°

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 원점 O에서 x 축의 양의 부분을 시초선으로 잡을 때, 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있는 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다.

예를 들어 $410^\circ = 360^\circ \times 1 + 50^\circ$ 이므로 410° 는 제1사분면의 각이다.



▶ 좌표평면에서 시초선은 보통 x 축의 양의 부분으로 정한다.

생각 토크

어느 사분면에도 속하지 않는 동경은 어디에 위치할까?

문제 2 크기가 다음과 같은 각은 어느 사분면의 각인지 말하시오.

- (1) 560° (2) 1180° (3) -25° (4) -310°

호도법

❖ 육십분법(六十分法)은 원의 둘레를 360등분 하여 각 호에 대한 중심각의 크기를 1° (°), 1° 의 $\frac{1}{60}$ 을 1분('), 1 분의 $\frac{1}{60}$ 을 1초(")로 정의 하여 각의 크기를 나타내는 방법이다.

❖ 라디안(radian)은 반지름을 뜻하는 radius와 각을 뜻하는 angle의 합성어이고, 호도법(弧度法)의 호도는 호의 중심각의 크기라는 뜻이다.

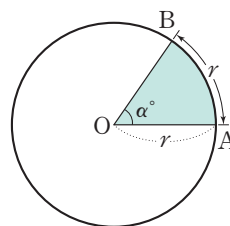
❖ 1라디안은 호의 길이가 반지름의 길이와 같은 부채꼴의 중심각의 크기로, 육십분법으로 나타내면 약 $57^\circ 17' 45''$ 이다.

지금까지는 각의 크기를 나타낼 때 60° , 150° , -240° 와 같이 도(°)를 단위로 하는 육십분법을 사용하였다.

이제 호의 길이와 중심각의 크기 사이의 관계를 이용하여 각의 크기를 나타내는 새로운 방법을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원 O에서 길이가 r 인 호 AB의 중심각의 크기를 α° 라 하면, 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$r : 2\pi r = \alpha^\circ : 360^\circ, \quad \text{즉} \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$$



이다. 여기서 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 는 반지름의 길이 r 에 관계없이 항상 일정하다.

이 일정한 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 를 1라디안이라 하며, 이것을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

호도법과 육십분법 사이에는 다음 관계가 성립한다.

호도법과 육십분법

$$1 \text{ 라디안} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 라디안}$$

[참고] 각의 크기를 호도법으로 나타낼 때는 단위인 '라디안'은 생략하고, 1 , $\frac{\pi}{4}$, 2π 와 같이 실수로 나타낸다.

[보기] ① $45^\circ = 45 \times 1^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} \text{ (라디안)} = \frac{\pi}{4}$

② $-\frac{5}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi \times 1 \text{ (라디안)} = -\frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -150^\circ$

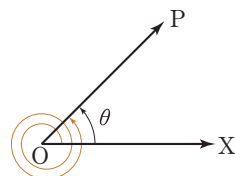
● **문제 3** 다음에서 육십분법으로 나타낸 각은 호도법으로, 호도법으로 나타낸 각은 육십분법으로 나타내시오.

- (1) 30° (2) -135° (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $-\frac{2}{3}\pi$

한편, $360^\circ = 2\pi$ 이므로 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 θ 라 하면 동경 OP가 나타내는 일반각은

$$2n\pi + \theta \quad (n \text{은 정수})$$

이다.



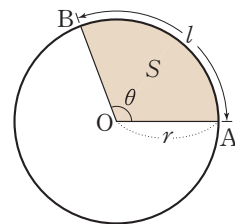
● **문제 4** 다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 $2n\pi + \theta$ 의 꼴로 나타내시오.
(단, n 은 정수이고, $0 \leq \theta < 2\pi$ 이다.)

- (1) 7π (2) $\frac{11}{2}\pi$ (3) $-\frac{5}{3}\pi$ (4) $-\frac{16}{5}\pi$

● 부채꼴의 호의 길이와 넓이

다음을 통해 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 호도법을 이용하여 나타내어 보자.

함께하기 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l 이라 하고, 부채꼴 OAB의 넓이를 S 라 하자.



활동 1 다음을 이용하여 l 을 r 와 θ 에 대한 식으로 나타내어 보자.

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$$

활동 2 다음을 이용하여 S 를 r 와 θ 에 대한 식으로 나타내어 보자.

$$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

활동 3 활동 1과 활동 2의 결과를 이용하여 S 를 r 와 l 에 대한 식으로 나타내어 보자.

▶ 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례한다.

▶ 부채꼴의 넓이는 중심각의 크기에 정비례한다.

앞의 활동에서 다음을 알 수 있다.

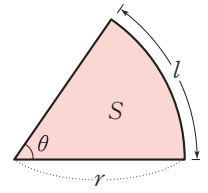
▶ 중심각의 크기 θ 의 단위는 라디안임에 유의한다.

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$l = r\theta$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$



예제 반지름의 길이가 3, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 인 부채꼴의 호의 길이 l 과 넓이 S 는

$$l = 3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \quad S = \frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi$$

문제 5 반지름의 길이가 6, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하시오.

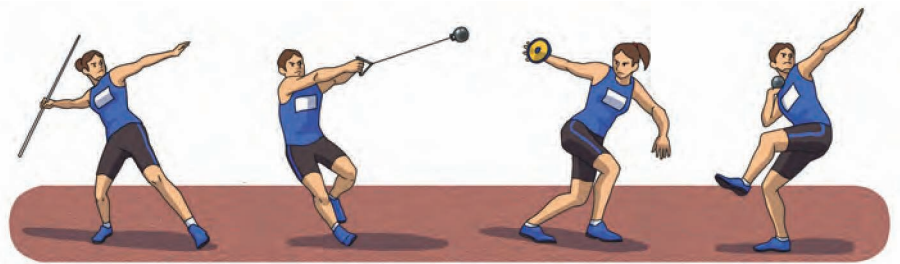
문제 6 호의 길이가 π , 넓이가 2π 인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 구하시오.

생각
넓히기

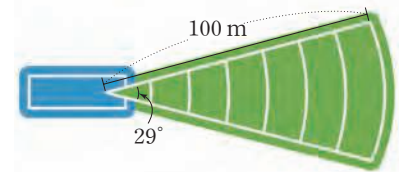


문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

올림픽 육상 경기 중에서 창던지기, 해머던지기, 원반던지기, 포환던지기 등은 필드에서 하는 경기이다.



활동 ▶ 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 100 m, 중심각의 크기가 29° 인 부채꼴 모양의 창던지기 경기장이 있다.



- (1) 29° 를 호도법으로 나타내어 보자.
- (2) 창던지기 경기장에서 부채꼴 모양의 넓이를 구해 보자.

02 삼각함수

학습 목표

삼각함수의 뜻을 안다.

준비하기

다음 삼각비의 값을 구하시오.

- (1) $\sin 30^\circ$
- (2) $\cos 45^\circ$
- (3) $\tan 60^\circ$

다가 서기

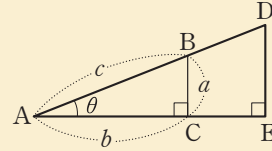
옛날부터 천문학에서 행성의 위치를 관찰하거나 공전 주기를 계산하기 위하여 삼각비의 개념을 활용하였다.

삼각비의 개념을 앞에서 배운 일반각으로 확장하면 새로운 함수를 생각할 수 있다.



삼각함수의 뜻

생각 열기 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$ 와 $\triangle ADE$ 는 모두 직각삼각형이고, $\angle A$ 가 공통이므로 서로 닮은 도형이다.



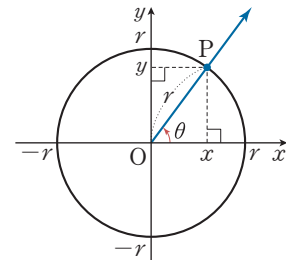
▶ $\angle A = \theta$ 라 할 때, 다음 표를 완성해 보자.

	$\triangle ABC$	$\triangle ADE$
① $\sin \theta$		
② $\cos \theta$		
③ $\tan \theta$		

위의 **생각 열기**에서 ①, ②, ③의 값은 각각 $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ 로 일정함을 알 수 있다.

중학교에서는 삼각비를 0° 에서 90° 까지의 범위에서만 다루었다. 이제 삼각비의 개념을 일반각의 경우로 확장해 보자.

오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원 O 위의 점 $P(x, y)$ 에 대하여 동경 OP 가 나타내는 일반각 중 하나의 크기를 θ 라 하자.



이때 다음 비의 값

$$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

는 r 의 값에 관계없이 θ 의 값에 따라 각각 하나씩 결정되므로, 실수 θ 와 위의 비의 값 사이의 대응 관계

$$\theta \longrightarrow \frac{y}{r}, \quad \theta \longrightarrow \frac{x}{r}, \quad \theta \longrightarrow \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

는 함수이다.

④ $\sin, \cos, \tan$ 는 각각 sine, cosine, tangent의 약자이다.

이들 함수를 차례대로 θ 의 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하며, 이것을 기호로 각각 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 와 같이 나타낸다. 이때

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

이다.

이와 같은 함수들을 θ 에 대한 삼각함수라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

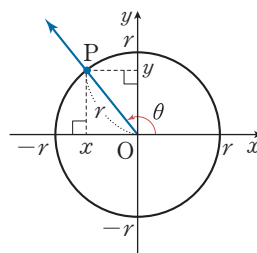
삼각함수

④ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$



예제 1 원점 O와 점 $P(3, -4)$ 를 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 의 값을 구하시오.

풀이 오른쪽 그림에서

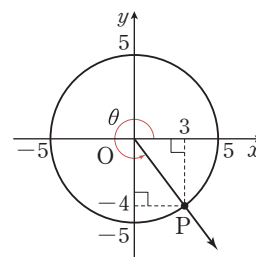
$$\overline{OP} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

이므로

$$\sin \theta = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

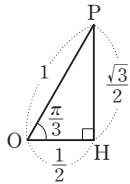


답 $\sin \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$

문제 1 원점 O와 점 $P(-\sqrt{3}, 1)$ 을 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 의 값을 구하시오.

▶ 삼각함수의 값은 원의 반지름의 길이 r 에 관계없이 일정하므로 $r=1$ 로 생각하면 편리하다.

▶ $\triangle OHP$ 는 다음 그림과 같다.



예제 2 $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 일 때, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 의 값을 구하시오.

풀이 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{4}{3}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\triangle OHP$ 에서 $\overline{OP}=1$ 이고 $\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

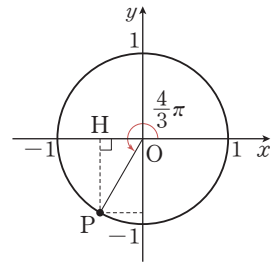
이때 점 P가 제3사분면 위의 점이므로

$$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}, \quad \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\text{답} \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}, \quad \tan \theta = \sqrt{3}$$



문제 2 각 θ 가 다음과 같을 때, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 의 값을 구하시오.

(1) $\frac{5}{6}\pi$

(2) $\frac{7}{4}\pi$

(3) 420°

수학 이야기

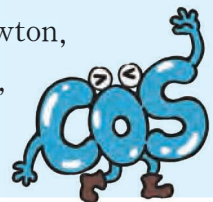


$\sin$, $\cos$, $\tan$ 기호의 어원

$\sin$, $\tan$ 기호는 1624년 영국의 수학자 건터(Gunter, E., 1581~1626)가 처음으로 사용하였다. 하지만 건터가 두 기호를 독창적으로 고안한 것은 아니다. 건터 이전에도 덴마크의 수학자 핑케(Fincke, T., 1561~1656)가 ‘sin.’, ‘tan.’이라는 거의 동일한 기호를 사용했기 때문이다.

한편, $\cos$ 기호는 1729년 스위스의 수학자 오일러(Euler, L., 1707~1783)가 처음 사용하였다. 오일러 역시 $\cos$ 기호를 독창적으로 만든 것은 아니며, 이전에 쓰이던 기호를 개량한 것이다. 1620년에 건터가 라틴어 complementum과 sinus를 합친 ‘co.sinus’를 제안했고, 1658년 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)이 cosinus로 수정하였다. 이 cosinus가 영어로 cosine으로 번역된 뒤, 오일러가 이를 축약해 cos이라는 기호를 사용하였다.

(출처: 『수학동아』, 2014)



삼각함수의 값의 부호

삼각함수의 값의 부호는 동경 위의 점의 x 좌표와 y 좌표에 의하여 결정되므로, 각 θ 의 동경이 위치한 사분면에 따라 정해진다.

다음을 통해 이를 확인해 보자.

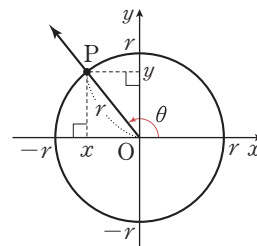
함께하기

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경 OP

에서 점 P의 좌표를 (x, y) , $\overline{OP}=r (r>0)$ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

이다.

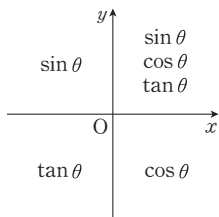


활동 1 점 P의 x 좌표, y 좌표의 부호에 따라 다음 표를 완성해 보자.

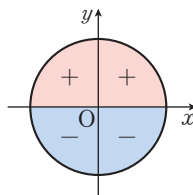
사분면 삼각함수	제1사분면 ($x>0, y>0$)	제2사분면 ($x<0, y>0$)	제3사분면 ($x<0, y<0$)	제4사분면 ($x>0, y<0$)
$\sin \theta$	+			-
$\cos \theta$			-	
$\tan \theta$		-		

활동 2 활동 1의 표를 이용하여 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 의 값이 양수인 사분면은 각각 어느 사분면인지 말해 보자.

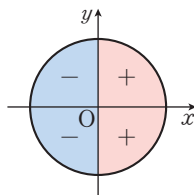
② 각 사분면에서 삼각함수의 값의 부호가 +인 것을 나타내면 다음과 같다.



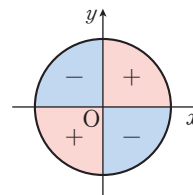
위의 활동에서 알 수 있듯이 각 θ 에 대한 삼각함수의 값의 부호는 θ 를 나타내는 동경이 위치한 사분면에 따라 다음과 같이 정해진다.



[$\sin \theta$ 의 값의 부호]



[$\cos \theta$ 의 값의 부호]



[$\tan \theta$ 의 값의 부호]

보기

① 100° 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin 100^\circ > 0, \quad \cos 100^\circ < 0, \quad \tan 100^\circ < 0$$

② $\frac{10}{3}\pi$ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \frac{10}{3}\pi < 0, \quad \cos \frac{10}{3}\pi < 0, \quad \tan \frac{10}{3}\pi > 0$$

● **문제 3** 각 θ 가 다음과 같을 때, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 의 값의 부호를 말하시오.

(1) 200°

(2) 430°

(3) $\frac{11}{6}\pi$

(4) $-\frac{4}{3}\pi$

● **문제 4** 다음을 만족시키는 θ 는 어느 사분면의 각인지 말하시오.

(1) $\sin \theta \cos \theta > 0$

(2) $\sin \theta \tan \theta < 0$

● 삼각함수 사이의 관계

삼각함수 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

▶ 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 단위 원이라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $P(x, y)$ 라 하면

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

이고, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)이므로

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

가 성립한다.

또, 점 $P(x, y)$ 는 단위원 위의 점이므로

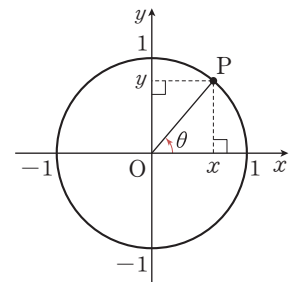
$$x^2 + y^2 = 1$$

이고 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ 이므로

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

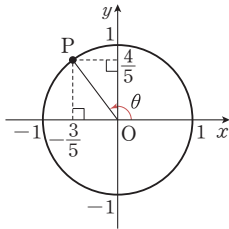


▶ $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$
 $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$
 $\tan^2 \theta = (\tan \theta)^2$

■ 삼각함수 사이의 관계

① $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

② $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$



예제 3 θ 가 제2사분면의 각이고 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 일 때, $\cos \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값을 구하시오.

풀이 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

그런데 θ 는 제2사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$

따라서 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ 이다.

한편, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로

$$\tan \theta = -\frac{4}{3}$$

답 $\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$

문제 5 θ 가 제4사분면의 각이고 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ 일 때, $\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값을 구하시오.

예제 4 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 일 때, $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구하시오.

풀이 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

에서 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$

답 $-\frac{4}{9}$

문제 6 θ 가 제1사분면의 각이고 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

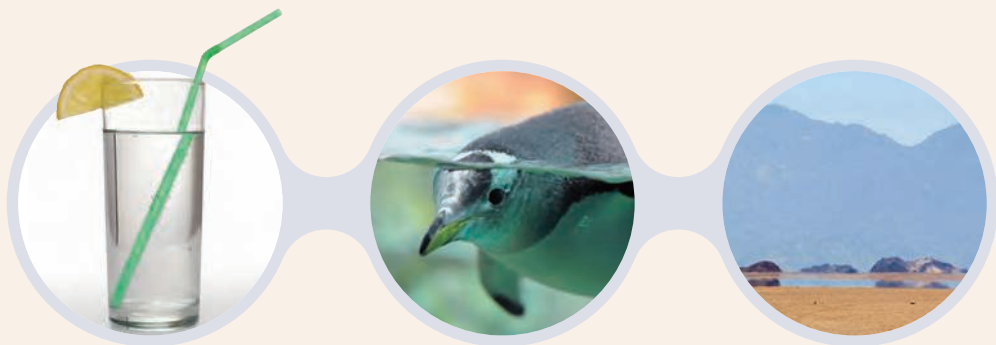
(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin \theta + \cos \theta$

입사각과 굴절각

“놓친 물고기가 더 커 보인다.”라는 말이 있다. 실제로, 물속에 있을 때는 크게 보였던 물체가 물 밖에서는 생각만큼 크지 않은 경우를 종종 보게 되는데, 이는 공기와 물의 굴절률이 다르기 때문이다.

빛의 굴절 현상 때문에 물이 들어 있는 컵에 빨대를 비스듬히 넣으면 빨대가 꺾인 것처럼 보이고, 물에 반쯤 잠긴 펭귄은 물 위보다 아래가 더 커 보인다. 사막의 신기루 또한 빛의 굴절 현상으로 일어난다.

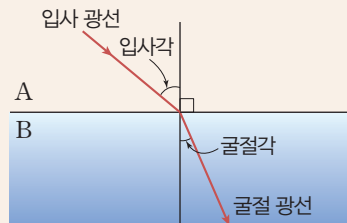


네덜란드의 수학자이자 천문학자인 스넬(Snell, W. R., 1580~1626)은 1621년에 빛이 서로 다른 두 물질을 지날 때 다음과 같은 법칙이 성립함을 발견했다.

빛이 A 물질에서 B 물질로 입사할 때 빛의 입사각을 θ_1 , 굴절각을 θ_2 라 하고, 두 물질 A, B의 굴절률을 각각 n_1, n_2 라 하면

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

가 성립한다. 이때 $\frac{n_2}{n_1}$ 는 상수이므로 $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$ 의 값 또한 각의 크기에 관계없이 일정하다.



(출처: 두산백과, 2016)

- 탐 구** 1 공기의 굴절률은 1, 물의 굴절률은 $\frac{4}{3}$ 이다. 빛이 공기에서 물로 입사하고 $\sin \theta_1 = \frac{2}{3}$ 일 때, $\sin \theta_2$ 의 값을 구해 보자.
- 2 빛이 공기에서 어떤 물질로 입사할 때의 입사각이 $\frac{\pi}{15}$, 굴절각이 $\frac{\pi}{30}$ 라 할 때, 공기에 대한 이 물질의 상대 굴절률 $\frac{n_2}{n_1}$ 의 값을 구해 보자. (단, $\sin \frac{\pi}{15} = 0.21$, $\sin \frac{\pi}{30} = 0.10$ 으로 계산한다.)

03 삼각함수의 그래프

학습 목표

사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

준비하기

다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin \frac{5}{3}\pi$

(2) $\cos \frac{4}{3}\pi$

(3) $\tan \frac{5}{4}\pi$

더가서기

시간의 변화에 따른 해수면의 높이나 심장 박동 수를 그래프로 나타내면 주기적으로 같은 모양이 나타난다. 삼각함수의 그래프도 이와 같이 주기적으로 같은 모양이 나타나는 성질을 갖고 있음을 알아보자.

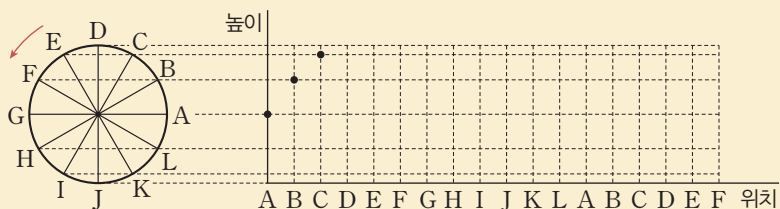


사인함수와 코사인함수의 그래프

생각 열기

놀이공원의 대관람차가 회전하면 곤돌라의 위치는 시시각각으로 변한다.

다음 그림과 같이 대관람차가 회전할 때 한 곤돌라의 위치를 A, B, C, ...로 나타내어, 곤돌라의 위치와 그 지점에서의 높이 사이의 관계를 알아보자.



- 위의 그림에서 각 지점에서의 곤돌라의 높이를 그래프 위의 점으로 나타내고, 이 점들을 곡선으로 연결해 보자.
- ①의 곡선은 어떤 모양인지 말해 보자.

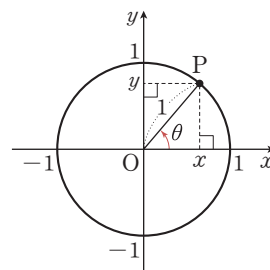
사인함수와 코사인함수의 그래프를 그려 보자.

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P(x , y)라 하면

$$\sin \theta = y,$$

$$\cos \theta = x$$

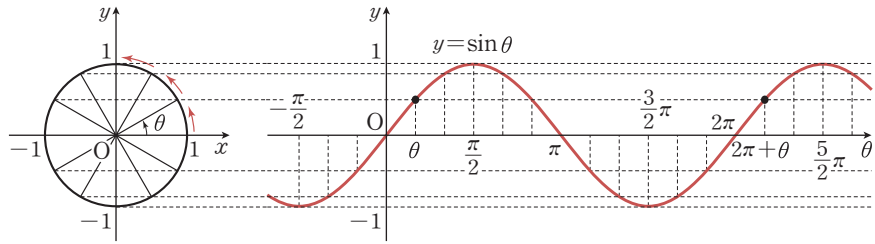
이므로 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 의 값은 각각 점 P의 y 좌표, x 좌표로 정해진다.



따라서 점 P가 단위원 위를 움직일 때, θ 의 값에 따른 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 의 값의 변화는 각각 점 P의 y 좌표, x 좌표의 변화와 같다.

이를 이용하면 사인함수 $y = \sin \theta$ 와 코사인함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프를 그릴 수 있다.

사인함수 $y=\sin\theta$ 의 그래프는 θ 의 값을 가로축에 나타내고 θ 에 대응하는 $\sin\theta$ 의 값을 세로축에 나타내어 다음과 같이 그릴 수 있다.

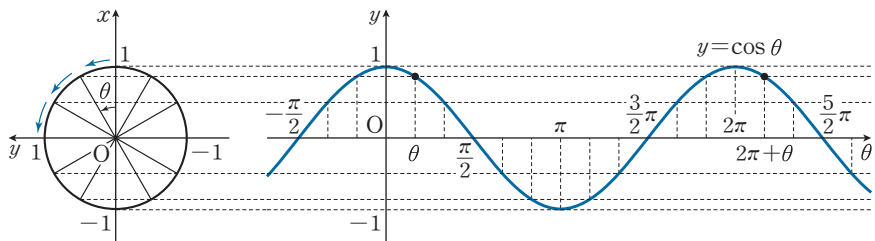


위의 그래프에서 사인함수 $y=\sin\theta$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y|-1\leq y\leq 1\}$ 임을 알 수 있다.

또, $y=\sin\theta$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 다음이 성립한다.

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

한편, 코사인함수 $y=\cos\theta$ 의 그래프는 θ 의 값을 가로축에 나타내고 θ 에 대응하는 $\cos\theta$ 의 값을 세로축에 나타내어 다음과 같이 그릴 수 있다.



위의 그래프에서 코사인함수 $y=\cos\theta$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y|-1\leq y\leq 1\}$ 임을 알 수 있다.

또, $y=\cos\theta$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 다음이 성립한다.

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

함수의 정의역의 원소는 보통 x 로 나타내므로 이제부터 사인함수 $y=\sin\theta$ 와 코사인함수 $y=\cos\theta$ 에서 θ 를 x 로 바꾸어

$$y=\sin x, \quad y=\cos x$$

로 쓰기로 하자.

한편, $y=\sin x$ 와 $y=\cos x$ 의 그래프는 2π 의 간격으로 같은 모양이 반복된다. 즉, 모든 실수 x 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x, \quad \cos(x+2n\pi)=\cos x \quad (n \text{은 정수})$$

▶ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면
 $f(-x)=-f(x)$

▶ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이면
 $f(-x)=f(x)$

생각 토크

$y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 의
최댓값과 최솟값은 각각 얼마일까?

▶ 함수 $y = 2f(x)$ 의 그래프는
함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축의
방향으로 2배만큼 늘린 것이다.

일반적으로 함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+p) = f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p 가 존재할 때 함수 $f(x)$ 를 **주기함수**라 하며, 이러한 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 **주기**라고 한다.

즉, $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 는 모두 주기가 2π 인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

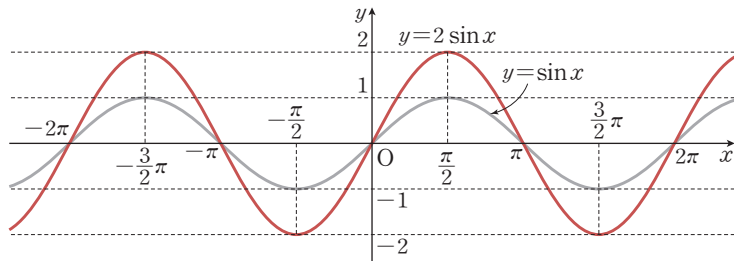
함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 의 성질

- ① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.
- ② $y = \sin x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,
 $y = \cos x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
- ③ 주기가 2π 인 주기함수이다.

예제 1 함수 $y = 2 \sin x$ 의 치역과 주기를 구하고, 그래프를 그리시오.

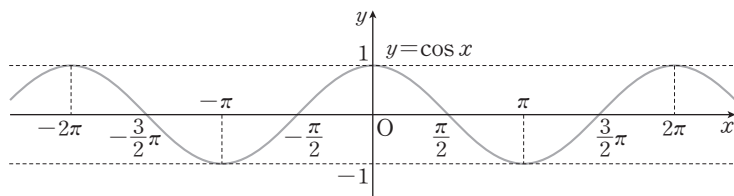
풀이 $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$ 이므로 치역은 $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$ 이다.

또, $2 \sin x = 2 \sin(x + 2\pi)$ 이므로 함수 $y = 2 \sin x$ 의 주기는 2π 이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



풀이 참조

문제 1 함수 $y = \frac{1}{2} \cos x$ 의 치역과 주기를 구하고, 그래프를 그리시오.



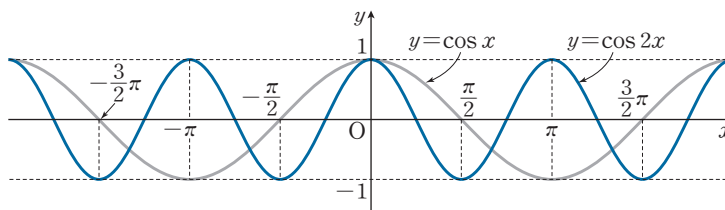
▶ 함수 $y = \sin ax$ 와 $y = \cos ax$ 의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|a|}$ 이다.

예제 2 함수 $y = \cos 2x$ 의 치역과 주기를 구하고, 그래프를 그리시오.

풀이 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로 치역은

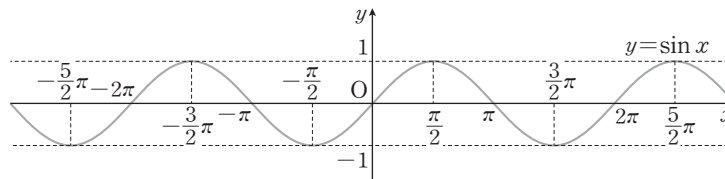
$$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

또, $\cos 2x = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2(x + \pi)$ 이므로 함수 $y = \cos 2x$ 의 주기는 π 이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



풀이 참조

문제 2 함수 $y = \sin \frac{x}{3}$ 의 치역과 주기를 구하고, 그래프를 그리시오.

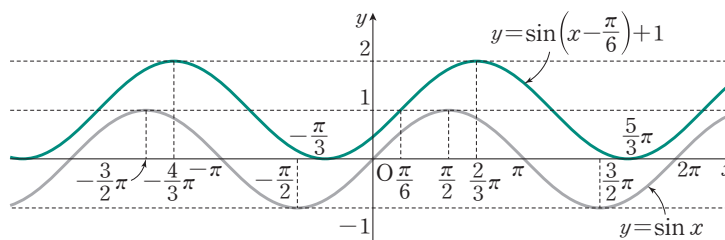


예제 3 함수 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 의 치역과 주기를 구하고, 그래프를 그리시오.

풀이 $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ 에서 $0 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq 2$ 이므로 치역은

$$\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$$

$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π 이고, 그래프는 다음 그림과 같다.

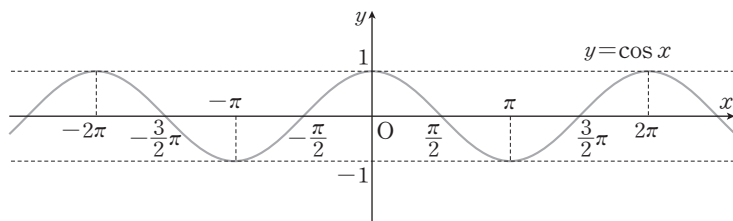


풀이 참조

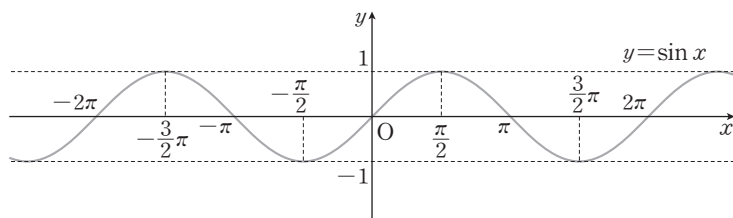
▶ 함수 $y = f(x - a) + b$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

문제 3 다음 함수의 치역과 주기를 구하고, 그래프를 그리시오.

(1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

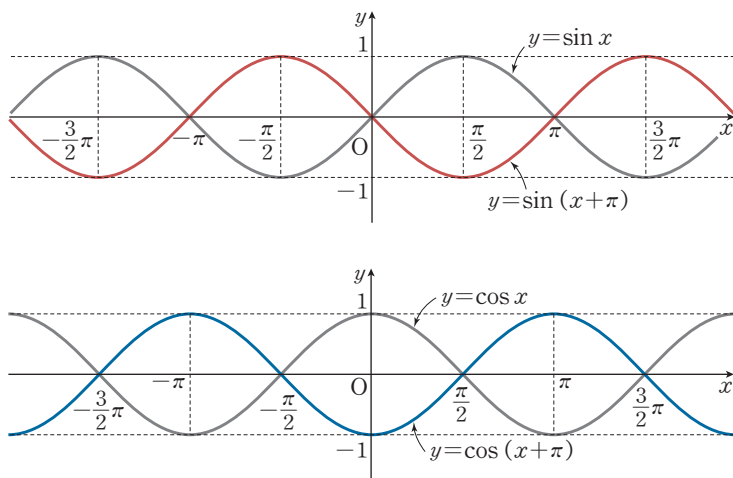


(2) $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2}$



사인함수와 코사인함수에는 어떤 성질이 있는지 그래프를 이용하여 알아보자.

함수 $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 의 그래프를 각각 x 축의 방향으로 $-\pi$ 만큼 평행이동한 함수 $y = \sin(x + \pi)$ 와 $y = \cos(x + \pi)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 모든 실수 x 에 대하여 $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$ 이고,
 $\sin(x + \pi) = \sin(\pi + x)$, $\cos(x + \pi) = \cos(\pi + x)$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

✔ 사인함수의 그래프를 이용하여 디자인한 스위스 베른의 미술관



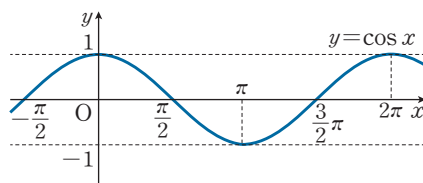
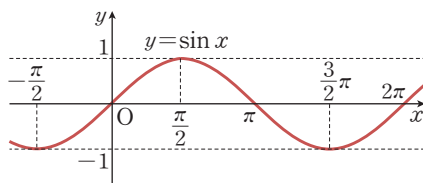
문제 4 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음이 성립함을 확인하시오.

(1) $\sin(\pi - x) = \sin x$

(2) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

이제 다음을 통해 함수 $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 의 그래프를 각각 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 함수의 그래프를 알아보자.

함께하기 다음 그림은 함수 $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 의 그래프이다.



활동 1 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 함수

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프를 그려 보고, $y = \cos x$ 의 그래프와 비교해 보자.

활동 2 함수 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 함수

$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프를 그려 보고, $y = -\sin x$ 의 그래프와 비교해 보자.

위의 활동에서 알 수 있듯이 모든 실수 x 에 대하여 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$,
 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

문제 5 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음이 성립함을 확인하시오.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

문제 6 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin \frac{5}{6}\pi$

(2) $\cos \frac{4}{3}\pi$

(3) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

(4) $\cos \frac{3}{4}\pi$

● 탄젠트함수의 그래프

탄젠트함수의 그래프를 그려 보자.

오른쪽 그림과 같이 각 θ 를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $P(x, y)$ 라 하자.

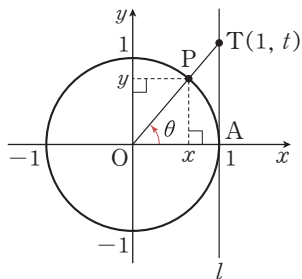
$\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)일 때, 단위원 위의 점 $A(1, 0)$ 에서의 접선 l 과 동경 OP 의 교점을 $T(1, t)$ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

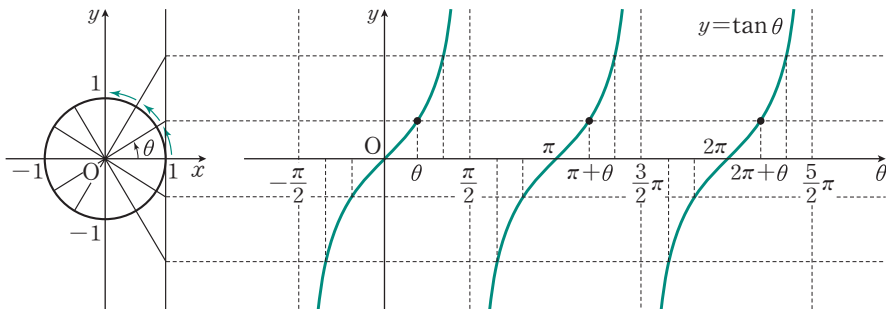
이므로 $\tan \theta$ 의 값은 점 T 의 y 좌표로 정해진다.

한편, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)일 때 각 θ 를 나타내는 동경 OP 는 y 축 위에 있다. 이때 점 P 의 x 좌표는 0이므로 $\tan \theta$ 의 값은 정의되지 않는다.

따라서 탄젠트함수 $y = \tan \theta$ 의 그래프는 θ 의 값을 가로축에 나타내고 θ 에 대응하는 $\tan \theta$ 의 값을 세로축에 나타내어 다음과 같이 그릴 수 있다.



④ 함수 $y = \tan \theta$ 는 θ 가 $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots$ 일 때 정의되지 않는다.



위의 그래프에서 탄젠트함수 $y = \tan \theta$ 의 정의역은 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합임을 알 수 있다.

또, 직선 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)는 $y = \tan \theta$ 의 그래프의 점근선이고, $y = \tan \theta$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 다음이 성립한다.

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

이제부터 탄젠트함수 $y = \tan \theta$ 에서도 θ 를 x 로 바꾸어

$$y = \tan x$$

로 쓰기로 하자.

④ 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다.

한편, $y=\tan x$ 의 그래프는 π 의 간격으로 같은 모양이 반복된다. 즉,
 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)인 모든 실수 x 에 대하여

$$\tan(x + m\pi) = \tan x \quad (m \text{은 정수})$$

이므로 $y=\tan x$ 는 주기가 π 인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

생각 독해

함수 $y=\tan x$ 는 최댓값과 최솟값을 가질까?

함수 $y=\tan x$ 의 성질

- 1 정의역은 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
- 2 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
- 3 주기가 π 인 주기함수이다.
- 4 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.

예제 4 함수 $y=\tan 2x$ 의 주기와 점근선을 구하고, 그래프를 그리시오.

▶ 함수 $y=\tan ax$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$ 이다.

풀이 $\tan 2x = \tan(2x + \pi) = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

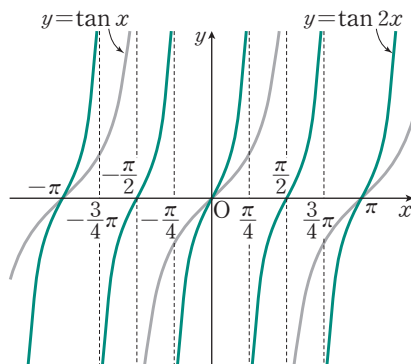
이므로 함수 $y=\tan 2x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

또, 점근선은 직선

$$x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4} \quad (n \text{은 정수})$$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

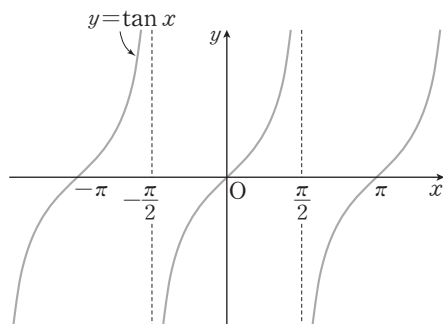
답 풀이 참조



문제 7 다음 함수의 주기와 점근선을 구하고, 그래프를 그리시오.

(1) $y=\tan \frac{x}{2}$

(2) $y=\tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$



지금까지 그래프를 통해 확인한 삼각함수의 성질을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수의 성질

① $-x$ 의 삼각함수

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x$$

② $\pi \pm x$ 의 삼각함수

$$\begin{aligned} \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \tan(\pi + x) &= \tan x, & \tan(\pi - x) &= -\tan x \end{aligned}$$

③ $\frac{\pi}{2} \pm x$ 의 삼각함수

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \end{aligned}$$

삼각함수표를 이용한 삼각함수의 값 구하기

지금까지 배운 삼각함수의 성질을 이용하면 일반각에 대한 삼각함수를 0° 에서 90° 까지의 각에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.

따라서 이 책의 부록에 있는 삼각함수표를 이용하면 일반각의 삼각함수의 값을 구할 수 있다.

보기 ① $\sin 92^\circ = \sin(90^\circ + 2^\circ) = \cos 2^\circ$

이고, 삼각함수표에서 $\cos 2^\circ = 0.9994$ 이므로
 $\sin 92^\circ = 0.9994$

② $\tan 308^\circ = \tan(360^\circ - 52^\circ) = \tan(-52^\circ) = -\tan 52^\circ$

이고, 삼각함수표에서 $\tan 52^\circ = 1.2799$ 이므로
 $\tan 308^\circ = -1.2799$

문제 8 삼각함수표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $\sin 755^\circ$

(2) $\cos 172^\circ$

(3) $\tan(-435^\circ)$

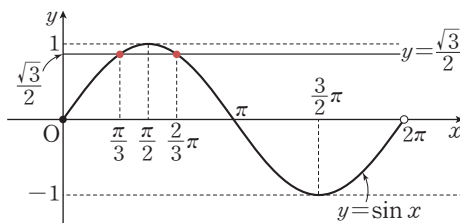
삼각함수가 포함된 방정식과 부등식

삼각함수의 각의 크기에 미지수가 있는 방정식과 부등식을 삼각함수의 그래프를 이용하여 풀어 보자.

예제 5 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 푸시오.

▶ 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

풀이 주어진 방정식의 해는 함수 $y = \sin x$ ($0 \leq x < 2\pi$)의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.
따라서 구하는 해는
$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi$$



답 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$

문제 9 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 다음 방정식을 푸시오.

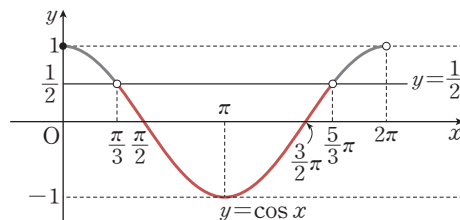
(1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

예제 6 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 부등식 $\cos x < \frac{1}{2}$ 을 푸시오.

풀이 주어진 부등식의 해는 $y = \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$)의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같다.
따라서 구하는 해는

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$



답 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

문제 10 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 다음 부등식을 푸시오.

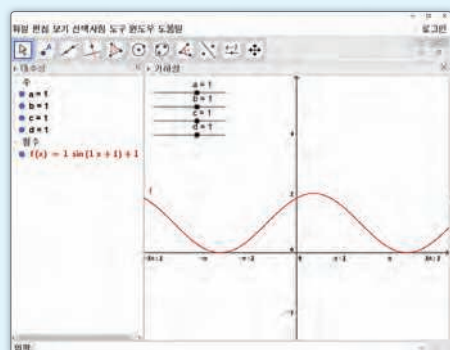
(1) $\sin x > \frac{1}{2}$

(2) $\tan x \leq -1$

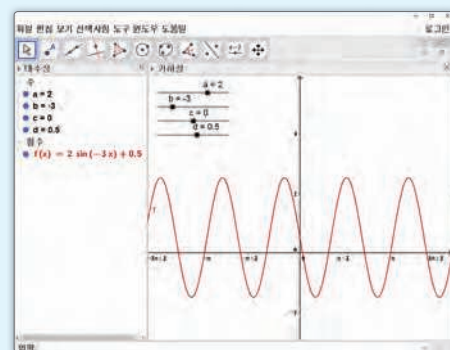
삼각함수의 그래프의 변화

컴퓨터 프로그램을 이용하면 삼각함수의 그래프의 변화를 쉽게 확인할 수 있다.
다음과 같은 방법으로 $y = a \sin(bx+c)+d$ 의 그래프의 변화를 관찰해 보자.

- 1 기하창에서 마우스 오른쪽 버튼을 눌러 x 축의 눈금 간격을 $\frac{\pi}{2}$ 로 설정한다.
- 2 입력 창에 ' $a \sin(bx+c)+d$ '를 입력하고 [Enter]를 누르면 슬라이더 만들기 창이 생기고, [그림 1]과 같이 함수 $f(x) = a \sin(bx+c)+d$ 의 그래프가 그려진다.
- 3 기하창의 슬라이더에서 a, b, c, d 의 값을 자유롭게 변화시키면 [그림 2]와 같이 함수 $f(x)$ 의 그래프의 변화를 관찰할 수 있다.



[그림 1]



[그림 2]

- 확인**
- 1 위에서 a, b, c, d 의 값이 달라짐에 따라 함수 $y = a \sin(bx+c)+d$ 의 그래프가 어떻게 변하는지 말해 보자.
 - 2 두 함수 $y = a \cos(bx+c)+d$ 와 $y = a \tan(bx+c)+d$ 에서 a, b, c, d 의 값이 달라짐에 따라 그 그래프가 어떻게 변할지 추측해 보자. 또, 추측한 내용을 컴퓨터 프로그램으로 확인해 보자.
 - 3 위의 방법으로 다음 함수의 주기와 최댓값, 최솟값을 구하고, 이를 발표해 보자.

(1) $y = 2 \sin(x+1) - 3$
(2) $y = -\cos(3x+2) + 5$
(3) $y = 4 \tan(-2x+1)$

중단원 마무리하기

호도법

(1) 호도법

$$1 \text{ 라디안} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 라디안}$$

(2) 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

삼각함수

(1) 반지름의 길이가 r 인 원 O 위의 점 $P(x, y)$ 에 대하여 동경 OP가 나타내는 일반각 중 하나의 크기를 θ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

(2) 삼각함수 사이의 관계

$$\textcircled{1} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \textcircled{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 의 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은

$$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\} \text{이다.}$$

② $y = \sin x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$y = \cos x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

③ 주기가 2π 인 주기함수이다.

(2) 함수 $y = \tan x$ 의 성질

① 정의역은 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)를 제외한 실수 전체의

집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 주기가 π 인 주기함수이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.

(3) 삼각함수의 성질 (단, 복부호 동순)

$$\textcircled{1} \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \\ \tan(-x) = -\tan x$$

$$\textcircled{2} \sin(\pi \pm x) = \mp \sin x, \quad \cos(\pi \pm x) = -\cos x, \\ \tan(\pi \pm x) = \pm \tan x$$

$$\textcircled{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$$

01 다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 구하고, 어느 사분면의 각인지 말하시오.

$$(1) 1040^\circ \quad (2) -\frac{35}{6}\pi$$

02 반지름의 길이가 12, 넓이가 60π 인 부채꼴의 호의 길이를 구하시오.

03 원점 O와 점 $P(-1, 1)$ 을 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때, 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

$$(1) \sin \theta \quad (2) \cos \theta \quad (3) \tan \theta$$

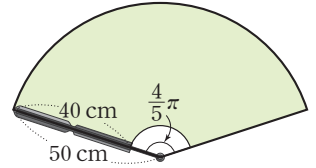
04 θ 가 제2사분면의 각이고 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$ 일 때, $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값을 구하시오.

05 다음 식을 간단히 하시오.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos(\pi - \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin \theta$$

06 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이고 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치할 때, 각 θ 의 크기를 구하시오.

07 오른쪽 그림과 같이 어느 자동차에 장착된 와이퍼를 작동하였더니, 길이가 50 cm인 와이퍼가 $\frac{4}{5}\pi$ 만큼 부채꼴 모양으로 회전하였다. 이 와이퍼에서 유리를 닦는 고무판의 길이가 40 cm일 때, 와이퍼의 고무판이 회전하면서 닦은 유리창의 넓이를 구하시오.



(단, 유리창은 한 평면 위에 있다.)

08 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

(1) $\sin 330^\circ$

(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $\tan \frac{4}{3}\pi$

09 다음 조건을 만족시키는 θ 는 어느 사분면의 각인지 말하시오.

(1) $\cos \theta > 0, \cos \theta \tan \theta < 0$

(2) $\sin \theta \cos \theta < 0, \sin \theta \tan \theta < 0$

10 θ 가 제3사분면의 각일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ 일 때, $\cos \theta$ 의 값

(2) $\tan \theta = \frac{2}{3}$ 일 때, $\sin \theta$ 의 값

- 11 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 일 때, $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.
 (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

- 12 다음 함수의 주기와 최댓값, 최솟값을 구하시오.

(1) $y = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

(2) $y = -2 \cos \frac{x}{4} + 1$

- 13 어느 건물에서 휠체어를 이용하는 사람들을 위해 경사로를 만들려고 한다. 경사로의 경사도가 $\frac{1}{19}$ 이 되도록 할 때, 삼각함수표를 이용하여 지면과 경사로가 이루는 각의 크기가 약 몇 도인지 구하시오.
 (단, 경사도는 수직 거리를 수평 거리로 나눈 값이다.)



- 14 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 다음 방정식을 푸시오.

(1) $2 \cos x - \cos^2 x = \sin^2 x$

(2) $\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x = 0$

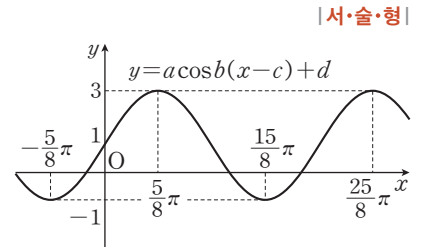
- 15 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때, 다음 부등식을 푸시오.

(1) $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$

(2) $-\sqrt{3} \leq \tan x \leq 1$

- 16 둘레의 길이가 16인 부채꼴 중에서 그 넓이가 최대인 부채꼴의 중심각의 크기를 호도법으로 나타내시오.

- 17 함수 $y = a \cos b(x - c) + d$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $abcd$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, $a > 0, b > 0, 0 < c < \pi$)



- 18 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax - a^2 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 일 때, 상수 a 의 값을 모두 구하시오.

- 19 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$ 의 값을 구하시오.

- 20 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 부등식 $\cos x < \sin x$ 를 푸시오.

2

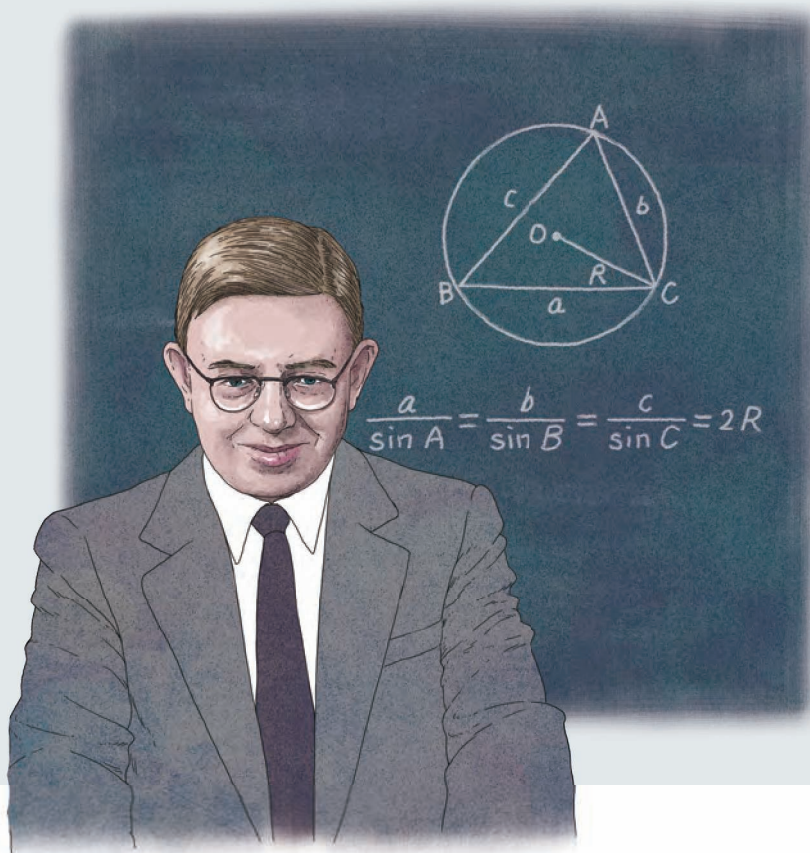
삼각함수의 활용

01
사인법칙

02
코사인법칙

“물리학을 배우기 전에 삼각법을 배우는 것은 매우 바람직하다. 이것은 삼각법의 상세한 내용이 모두 물리학에만 필요하기 때문인 것은 아니다.”

(출처: Klapper, P., 『College Teaching: Studies in methods of teaching in the college.』)



레몬(Lemon, H. B., 1885~1965)

미국의 물리학자

- 이 글은 20세기 초 미국 대학 교육에서 기초 학문 분야 교육의 방향을 제시하기 위한 것인데, 삼각법이 물리학을 공부하는 데 얼마나 중요하게 쓰이는지를 강조하는 내용이다.

01 사인법칙

학습 목표

사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

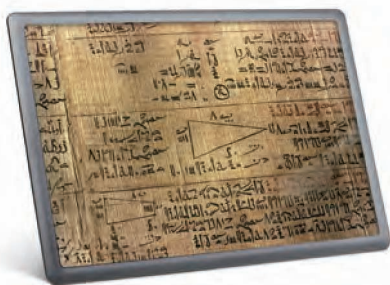
준비하기

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 120$ 이고 $\sin B = \frac{1}{3}$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이를 구하시오.

다가 서기

농업이 주산업이었던 고대 국가에서는 공평한 과세를 위하여 경작지의 넓이를 정확하게 계산하는 방법을 찾아야 했다.

정확한 측량 기술이 없었던 과거에는 다각형 모양의 경작지를 몇 개의 삼각형으로 나누고, 이들 삼각형의 넓이를 구하는 방법을 이용하여 비교적 정확하게 경작지의 넓이를 측량할 수 있었다.

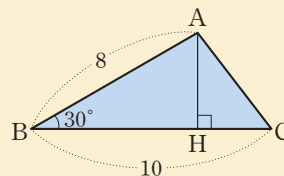


삼각형의 넓이

생각 열기 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = 8$,

$\overline{BC} = 10$, $\angle B = 30^\circ$ 인 $\triangle ABC$ 가 있다.

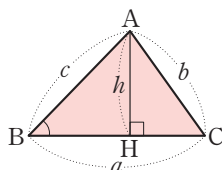
- ① 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{AH}$ 의 길이를 구해 보자.
- ② $\triangle ABC$ 의 넓이를 구해 보자.



삼각형의 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알면 그 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

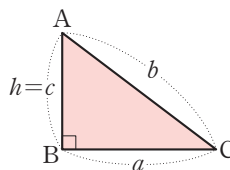
$\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A에서 대변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H, $\overline{AH} = h$ 라 하면, $\angle B$ 의 크기에 따라 다음과 같이 세 가지의 경우로 나누어진다.

(i) $B < 90^\circ$ 일 때



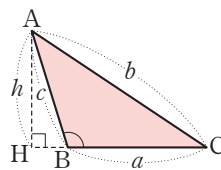
$$h = c \sin B$$

(ii) $B = 90^\circ$ 일 때



$$h = c = c \sin B$$

(iii) $B > 90^\circ$ 일 때



$$h = c \sin(\pi - B) = c \sin B$$

(i), (ii), (iii)에서 $\angle B$ 의 크기에 관계없이

$$h = c \sin B$$

이므로 $\triangle ABC$ 의 넓이를 S라 하면, 다음이 성립한다.

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac \sin B$$

같은 방법으로

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A$$

도 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각형의 넓이

$\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

보기 $a=4, b=6, C=60^\circ$ 인 $\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

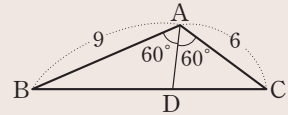
문제 1 다음 $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하시오.

(1) $b=10, c=10, A=135^\circ$

(2) $a=\sqrt{3}, c=8, B=150^\circ$

문제 2 삼각형의 두 변의 길이가 12 cm, 9 cm이고 넓이가 27 cm^2 일 때, 두 변 사이의 끼인각의 크기를 구하시오.

예제 1 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=9$, $\overline{AC}=6$, $\angle BAC=120^\circ$ 이다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하시오.



풀이 $\overline{AD}=x$ 라 하면 $\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ 이므로

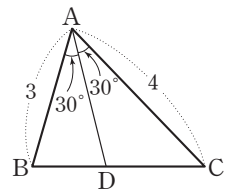
$$\frac{1}{2} \times 9x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 6x \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 9 \times 6 \times \sin 120^\circ$$

$$15x = 54, \quad x = \frac{18}{5}$$

답 $\frac{18}{5}$

▶ $\triangle ABC$
 $= \triangle ABD + \triangle ACD$

문제 3 오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$, $\angle BAD = \angle DAC = 30^\circ$ 일 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하시오.



● 사인법칙

삼각형의 세 변의 길이와 세 내각의 크기 사이의 관계를 알아보자.

$\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

이므로, 각 변을 $\frac{1}{2}abc$ 로 나누면

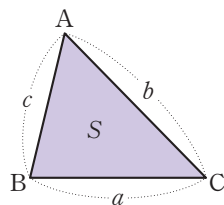
$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

이다. 이때 각 변의 역수를 취하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \dots\dots ①$$

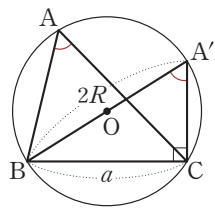
가 성립함을 알 수 있다.

이제 다음을 통해 ①과 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이 사이의 관계를 알아보자.



▶ 반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

함께하기 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 외접원의 중심을 O , 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하고, 직선 BO 와 외접원의 교점을 A' 이라 하면 $\triangle A'BC$ 는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



활동 ① $\sin A'$ 을 $2R$ 와 a 에 대한 식으로 나타내어 보자.

활동 ② $A = A'$ 인 이유를 말해 보자.

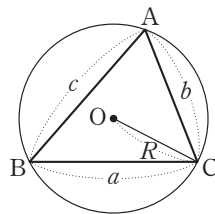
활동 ③ $2R$ 를 $\sin A$ 와 a 에 대한 식으로 나타내어 보자.

위의 활동에서 알 수 있듯이 $\triangle ABC$ 의 세 변의 길이와 세 내각의 크기 사이에는 다음 사인법칙이 성립한다.

■ 사인법칙

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이와 넓이 등을 구하는 여러 가지 문제를 해결해 보자.

예제 2 $\triangle ABC$ 에서 $a=4$, $A=45^\circ$, $B=60^\circ$ 일 때, 다음을 구하시오.

(1) b 의 값

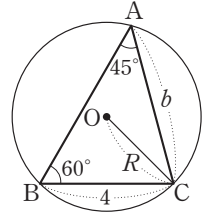
(2) 외접원의 반지름의 길이 R

풀이 (1) 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{4 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{6}$$

(2) 사인법칙에서 $2R = \frac{a}{\sin A}$ 이므로

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{4}{2 \sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}$$



답 (1) $2\sqrt{6}$ (2) $2\sqrt{2}$

문제 4 $\triangle ABC$ 에서 다음을 구하시오.

(1) $B=75^\circ$, $C=60^\circ$, $c=9$ 일 때, a 의 값

(2) $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $B=45^\circ$ 일 때, 예각 A 의 크기

(3) $A=45^\circ$, $B=75^\circ$, $c=3$ 일 때, 외접원의 반지름의 길이 R

▶ $\triangle ABC$ 에서
 $A+B+C=180^\circ$
이다.

예제 3 $\triangle ABC$ 에서 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ 이면 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

풀이 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에서

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

그런데 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ 이므로

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2, \quad \text{즉} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

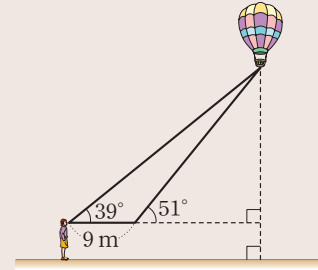
문제 5 다음을 만족시키는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 말하시오.

(1) $a \sin A = b \sin B$

(2) $a \sin A + b \sin B = c \sin C$



예제 4 오른쪽 그림과 같이 서영이가 한 지점에서 애드벌룬을 올려본각의 크기가 39° 이고, 이 지점에서 애드벌룬 쪽으로 9 m를 이동한 곳에서 애드벌룬을 올려본각의 크기가 51° 이다. 이때 애드벌룬의 높이는 몇 m인지 구하시오.
(단, 서영이의 눈높이는 1.6 m이고, $\sin 12^\circ = 0.21$, $\sin 39^\circ = 0.63$, $\sin 51^\circ = 0.78$ 로 계산한다.)



풀이 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\angle ACB = 12^\circ$ 이므로

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{9}{\sin 12^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 39^\circ}$$

$$\overline{BC} = \frac{9 \sin 39^\circ}{\sin 12^\circ} = 27$$

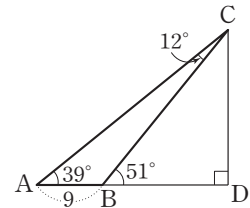
$\triangle CBD$ 에서 $\overline{CD} = \overline{BC} \sin 51^\circ$ 이므로

$$\overline{CD} = 27 \sin 51^\circ = 21.06$$

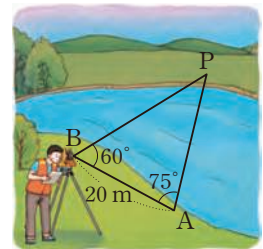
따라서 애드벌룬의 높이는

$$\overline{CD} + 1.6 = 21.06 + 1.6 = 22.66$$

답 22.66 m



문제 6 오른쪽 그림과 같이 A 지점과 강 건너편의 P 지점을 잇는 직선 다리를 건설하려고 한다. A 지점에서 20 m 떨어진 B 지점에서 $\angle PAB = 75^\circ$, $\angle PBA = 60^\circ$ 일 때, 다리의 길이 $\overline{AP}$ 를 구하시오.



생각
넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

가 성립한다.

활동 1 다음 단계에 따라 위의 내용을 확인해 보자.

- (1) 사인법칙을 이용하여 b 를 R 와 $\sin B$ 에 대한 식으로 나타내시오.
- (2) 사인법칙을 이용하여 c 를 R 와 $\sin C$ 에 대한 식으로 나타내시오.
- (3) (1)과 (2)를 이용하여 $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ 임을 확인하시오.

활동 2 위의 내용 이외에 삼각형 ABC의 넓이를 R를 이용하여 나타내는 방법을 찾아보자.

02 코사인법칙

학습 목표

코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

준비하기

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 세 변의 길이 a, b, c 사이의 관계를 말하시오.

다카서기

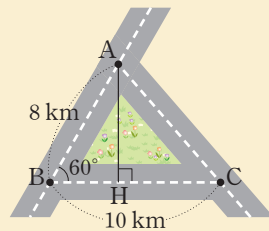
터널을 뚫는 작업을 할 때나 바다나 강을 가로지르는 다리를 건설할 때와 같이 두 지점 사이의 거리를 직접 측량하기 곤란한 경우가 있다. 이때 사인법칙뿐만 아니라 코사인법칙을 이용하여 이를 해결할 수도 있다.



코사인법칙

생각 열기

세 지점 A, B, C에 대하여 두 지점 A, B를 잇는 직선 도로의 길이는 8 km이고, 두 지점 B, C를 잇는 직선 도로의 길이는 10 km, $\angle ABC = 60^\circ$ 이다.



- 1 A 지점에서 직선 도로 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ 의 길이를 구해 보자.
- 2 1을 이용하여 $\overline{AC}$ 의 길이를 구해 보자.

위의 생각 열기에서

$$\overline{AH} = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \text{ (km)},$$

$$\overline{BH} = 8 \cos 60^\circ = 4 \text{ (km)},$$

$$\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH} = 10 - 4 = 6 \text{ (km)}$$

이다. 따라서 직각삼각형 ACH에서 피타고라스 정리를 이용하여 다음과 같이 $\overline{AC}$ 를 구할 수 있다.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 = (4\sqrt{3})^2 + 6^2 = 84$$

$$\text{즉, } \overline{AC} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \text{ (km)}$$

이제 $\triangle ABC$ 에서 $C < 90^\circ$, $C = 90^\circ$ 일 때,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

가 성립함을 위와 같은 방법으로 알아보자.

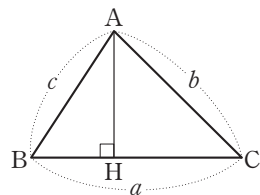
(i) $C < 90^\circ$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = b \sin C, \quad \overline{CH} = b \cos C,$$

$$\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{CH} = a - b \cos C$$

이다.



④ $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$

따라서 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= (a - b \cos C)^2 + (b \sin C)^2 \\ &= a^2 + b^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab \cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

가 성립한다.

(ii) $C = 90^\circ$ 일 때,

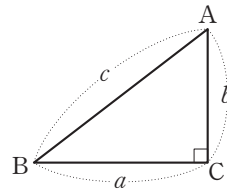
$\triangle ABC$ 는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고

$$\cos C = \cos 90^\circ = 0$$

이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

가 성립한다.

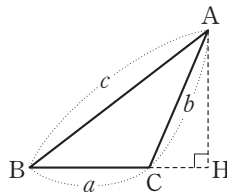


또, 다음을 통해 $\triangle ABC$ 에서 $C > 90^\circ$ 일 때도

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

가 성립하는지 알아보자.

함께하기 $C > 90^\circ$ 일 때, 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A에서 변 BC의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하자.



활동 ① $\overline{AH}$ 의 길이를 b 와 $\sin C$ 에 대한 식으로 나타내어 보자.

활동 ② $\overline{BH}$ 의 길이를 a , b 와 $\cos C$ 에 대한 식으로 나타내어 보자.

활동 ③ 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리를 이용하여

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

임을 확인해 보자.

(i), (ii)와 위의 활동에서 알 수 있듯이 $\triangle ABC$ 에서 C 의 크기에 관계없이

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

가 성립한다.

같은 방법으로

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

도 성립함을 알 수 있다.



▶ 레기오몬타누스
(Regiomontanus, 1436 ~ 1476)
독일의 수학자로서 사인법칙, 코사인법칙 등을 정리하여 삼각법을 체계화하였다.

이상으로부터 다음 **코사인법칙**이 성립한다.

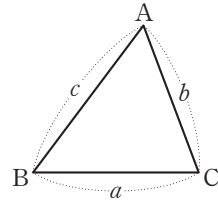
코사인법칙

△ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



참고 코사인법칙을 변형하여 다음과 같이 쓰기도 한다.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

즉, △ABC에서 세 변의 길이 a, b, c 를 알면 세 내각 A, B, C 의 크기를 구할 수 있다.

코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이와 넓이 등을 구하는 여러 가지 문제를 해결해 보자.

예제 1 △ABC에서 다음을 구하시오.

(1) $A = 60^\circ, b = 6, c = 4$ 일 때, a 의 값

(2) $a = 7, b = 5, c = 8$ 일 때, A 의 크기

풀이 (1) 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos 60^\circ = 28$$

$$\text{그런데 } a > 0 \text{ 이므로 } a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } 0^\circ < A < 180^\circ \text{ 이므로 } A = 60^\circ$$

답 (1) $2\sqrt{7}$ (2) 60°

문제 1 △ABC에서 다음을 구하시오.

(1) $C = 120^\circ, a = 6, b = 10$ 일 때, c 의 값

(2) $a = 4, b = \sqrt{10}, c = \sqrt{2}$ 일 때, B 의 크기

② 사인법칙에서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

임을 이용한다.



왜 $\sin A > 0$ 일까?

예제 2 $\triangle ABC$ 에서 $a \cos B = b \cos A$ 이면 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하시오.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이것을 $a \cos B = b \cos A$ 에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

이므로

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2, \quad a^2 = b^2$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 이므로 $a = b$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 $a = b$ 인 이등변삼각형

문제 2 다음을 만족시키는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 말하시오.

(1) $a \cos B - b \cos A = c$

(2) $\sin A = 2 \cos B \sin C$

예제 3 $\triangle ABC$ 에서 $a=5, b=6, c=7$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하시오.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{5}{7}$$

$\sin A > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \end{aligned}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

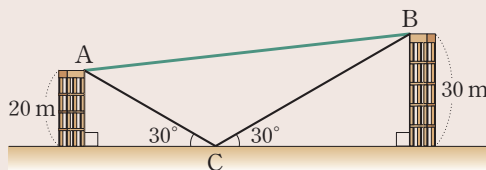
$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \frac{2\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}$$

답 $6\sqrt{6}$

문제 3 $\triangle ABC$ 에서 $a=8, b=13, c=7$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하시오.



예제 4 다음 그림과 같이 인명 구조 훈련을 위해 높이가 각각 20 m, 30 m인 두 빌딩 A, B의 옥상에 로프를 직선으로 연결하였다. C 지점에서 두 빌딩 A, B를 올려본각의 크기가 모두 30° 일 때, 로프의 길이 $\overline{AB}$ 를 구하시오.



풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$

라 하면

$$\triangle ADC \text{에서} \quad b = \frac{20}{\sin 30^\circ} = 40$$

$$\triangle BEC \text{에서} \quad a = \frac{30}{\sin 30^\circ} = 60$$

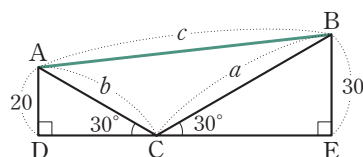
$$\triangle ACB \text{에서} \quad \angle ACB = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

$a=60$, $b=40$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$c^2 = 60^2 + 40^2 - 2 \times 60 \times 40 \times \cos 120^\circ = 7600$$

$$\text{그런데 } c > 0 \text{이므로} \quad c = \sqrt{7600} = 20\sqrt{19}$$

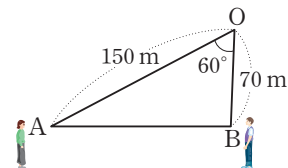
따라서 로프의 길이는 $\overline{AB} = 20\sqrt{19}$ (m)



답 $20\sqrt{19}$ m

$\cos 120^\circ$
 $= \cos (180^\circ - 60^\circ)$
 $= -\cos 60^\circ$
 $= -\frac{1}{2}$

문제 4 오른쪽 그림과 같이 두 지점 A, B에 효인이와 동근이가 각각 서 있다. $\overline{OA}=150$ m, $\overline{OB}=70$ m, $\angle AOB=60^\circ$ 일 때, 두 사람 사이의 거리 $\overline{AB}$ 를 구하시오.



문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

생각
넓히기

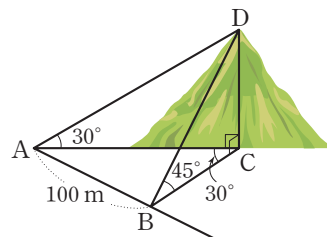


오른쪽 그림과 같이 100 m 떨어진 두 지점 A, B에서 산꼭대기 D를 올려본각의 크기는 각각 $\angle DAC=30^\circ$, $\angle DBC=45^\circ$ 이고, $\angle ACB=30^\circ$ 이다.

활동 1 $\overline{CD}=x$ m라 할 때, 사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 를 각각 x 에 대한 식으로 나타내어 보자.

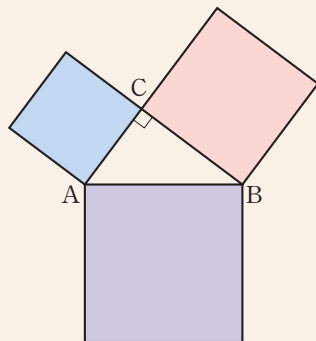
활동 2 $\triangle ABC$ 에서 활동 1과 코사인법칙을 이용하여 x 에 대한 방정식을 세워 보자.

활동 3 지면에서부터 산꼭대기까지의 높이 $\overline{CD}$ 를 구해 보자.



피타고라스 정리와 코사인법칙

고대 그리스의 수학자 피타고라스(Pythagoras, B.C. 569? ~ B.C. 475?)의 이름을 딴 피타고라스 정리는, 직각삼각형 ABC에서 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 나머지 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같음을 뜻한다.



그런데 피타고라스 정리는 앞에서 배운 코사인법칙의 특별한 경우가 된다.

왜냐하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

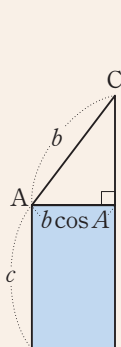
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

이고, 이때 C가 직각이면 $\cos C = 0$ 이므로

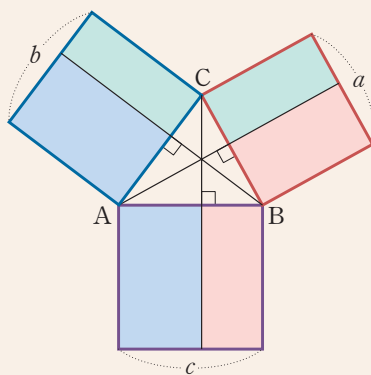
$$c^2 = a^2 + b^2$$

이 되기 때문이다.

탐 구 예각삼각형에서 코사인법칙이 성립함을 확인해 보자.



[그림 1]



[그림 2]

1 [그림 1]에서 직사각형 의 넓이가 $bc \cos A$ 임을 알 수 있다.

이를 이용하여 [그림 2]에서 두 직사각형 , 의 넓이가 각각 $ac \cos B$, $ab \cos C$ 임을 보이시오.

2 1과 다음을 이용하여 예각삼각형에서 코사인법칙이 성립함을 설명하시오.

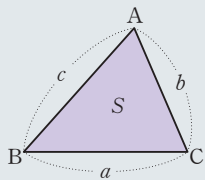
$$\square = \square + \square = (\square - \square) + (\square - \square) = \square + \square - 2 \times \square$$

중단원 마무리하기

삼각형의 넓이

△ABC의 넓이를 S 라 하면

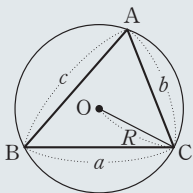
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ &= \frac{1}{2}ca \sin B \end{aligned}$$



사인법칙

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



코사인법칙

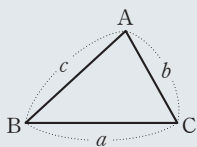
(1) 코사인법칙

△ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



(2) 코사인법칙의 변형

△ABC에서

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

기본

01 다음 △ABC의 넓이를 구하시오.

(1) $a=10, b=8, C=150^\circ$

(2) $b=6, c=9, A=135^\circ$

02 △ABC에서 $a=6 \sin A$ 일 때, 외접원의 반지름의 길이를 구하시오.

03 △ABC에서 $a=6, b=4, A=120^\circ$ 일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\sin B$

(2) 외접원의 반지름의 길이 R

04 △ABC에서 $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{3}ab$ 일 때, $\cos C$ 의 값을 구하시오.

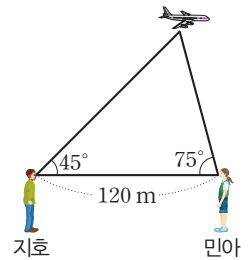
05 △ABC에서 $a=2\sqrt{7}, b=4, c=6$ 일 때, A 의 크기를 구하시오.

06 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=4$ 이고 $\sin(B+C)=\frac{1}{4}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하시오.

07 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 $\triangle ABC$ 에서 $A=105^\circ$ 이고,

$$4 \sin(A+B) \sin C = 1$$
 이 성립할 때, b 의 값을 구하시오.

08 오른쪽 그림과 같이 120 m만큼 떨어져 있는 지호와 민아가 하늘에 떠 있는 비행기를 올려본 각의 크기가 각각 45° , 75° 일 때, 비행기와 민아 사이의 거리를 구하시오.



09 $\triangle ABC$ 의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여

$$(a-b)^2 = c^2 - 3ab$$
 가 성립할 때, $\tan C$ 의 값을 구하시오.

10 $\triangle ABC$ 에서 $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$ 일 때, $\cos A$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

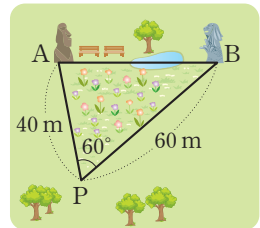
|서·술·형|

11 $\triangle ABC$ 에서 $a=3$, $b=5$, $c=7$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 구하시오.

12 다음을 만족시키는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 말하시오.
(단, R 는 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이이다.)

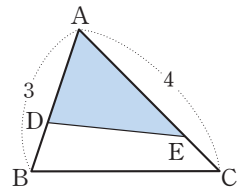
$$(1) a \sin A + b \sin B = \frac{c^2}{2R} \quad (2) \frac{b}{\cos C} = \frac{c}{\cos B}$$

13 오른쪽 그림과 같이 한 지점 P에서 두 조각상 A, B까지의 거리와 두 조각상 A, B를 바라본 각의 크기를 측정하였더니 $\overline{AP}=40$ m, $\overline{BP}=60$ m, $\angle APB=60^\circ$ 이었다. 두 조각상 A, B 사이의 거리를 구하시오.

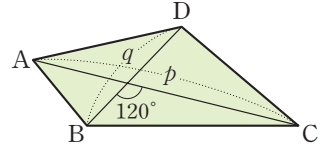


발 전

14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$ 인 $\triangle ABC$ 의 두 변 AB, AC 위에 각각 점 D, E가 있다. 선분 DE가 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분할 때, $\overline{AD} \times \overline{AE}$ 의 값을 구하시오.

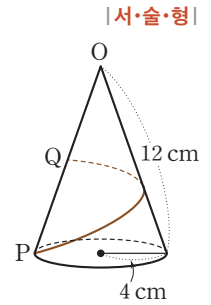


- 15 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 길이가 p, q 이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 120° 인 $\square ABCD$ 가 있다. 이 사각형의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이고, $p+q=6$ 일 때, p^2+q^2 의 값을 구하시오.

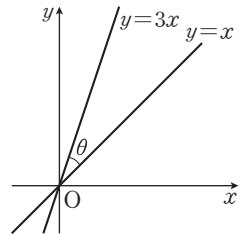


사고력+

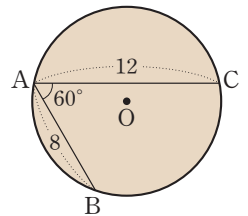
- 16 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4 cm이고 모선의 길이가 12 cm인 원뿔이 있다. 원뿔의 밑면인 원의 둘레 위의 점 P에서 모선 OP의 중점 Q까지 원뿔의 표면을 따라 실을 감을 때, 감은 실의 길이의 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



- 17 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=3x$ 와 $y=x$ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.



- 18 원 O 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=12$, $\angle A=60^\circ$ 일 때, 이 원의 넓이를 구하시오.



01 ...

다음 중에서 각을 나타내는 동경이 위치하는 사분면이 다른 하나는?

- ① 920° ② -520° ③ $-\frac{5}{6}\pi$
④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{4}\pi$

02 ...

중심각의 크기가 $\frac{4}{7}\pi$ 이고, 호의 길이가 4π 인 부채꼴의 넓이를 구하시오.

03 ..

원점 O와 점 P(1, -2)를 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구하시오.

04 ...

θ 가 제2사분면의 각일 때, $\frac{|\sin \theta|}{\sqrt{\cos^2 \theta}} + 2|\tan \theta|$ 를 간단히 하시오.

05

θ 가 제3사분면의 각이고 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 일 때,
 $\sin \theta + \cos \theta$ 의 값을 구하시오.

06 ...

$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 를 간단히 하시오.

07 ...

이차방정식 $2x^2 - x + a = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 일 때,
상수 a 의 값을 구하시오.

08

함수 $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

09 ●●●

$\sin \frac{5}{6}\pi + \cos \frac{11}{3}\pi$ 의 값을 구하시오.

10 ●●●

다음 식을 간단히 하시오.

$$\begin{aligned} & \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + 4 \cos^2(\pi + \theta) \\ & + 2 \sin^2(2\pi - \theta) + 3 \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \end{aligned}$$

11 ●●●

모든 실수 x 에 대하여 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

• 보기 •

ㄱ. $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$

ㄴ. $f(x) = 2 \cos \frac{x}{4} + 1$

ㄷ. $f(x) = 4 \tan 2x + 3$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 ●●●

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 의 모든 근의 합을 구하시오.

13 ●●●

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ 를 푸시오.

14 ●●●

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 두 부등식

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos x < \frac{1}{2}$$

을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하시오.

15 ●●●

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$x^2 - 4 \cos \theta x + 1 \geq 0$$

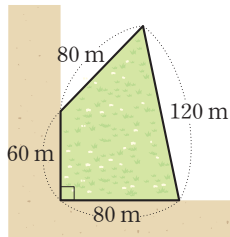
이 성립하도록 하는 θ 의 값의 범위가 $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 \leq \theta \leq \pi$)

16 ...

$\triangle ABC$ 에서 $a=8$, $b=3$, $\cos C=\frac{1}{3}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하시오.

17 ...

어느 휴양림에서는 오른쪽 그림과 같은 모양의 땅에 야영장을 조성하려고 한다. 이 야영장 부지의 넓이를 구하시오.



18 ...

$\triangle ABC$ 에서 $a=3\sqrt{2}$, $B=105^\circ$, $C=30^\circ$ 일 때, c 의 값을 구하시오.

19 ...

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이가 40이고 $A=60^\circ$, $b=4\sqrt{2}$ 일 때, C 의 크기를 구하시오.

20 ...

넓이가 $8\sqrt{2}$ 인 $\triangle ABC$ 에서

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{2} : 1 : \sqrt{3}$$

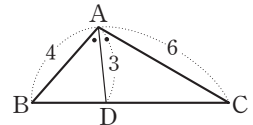
일 때, $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이를 구하시오.

21 ...

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 각 A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하자.

$$\overline{AB}=4, \overline{AC}=6, \overline{AD}=3$$

일 때, $\overline{BD}$ 의 길이를 구하시오.



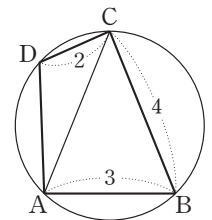
22 ...

오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는

$\square ABCD$ 에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=2$ 이고 $\triangle ABC$ 의 넓이가

$4\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하시오.

(단, B 는 예각이다.)



23번부터 25번까지 서술형입니다.

23 ...

함수 $f(x) = a \tan(bx + c) + d$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $abcd$ 의 값을 구하시오.
(단, $b > 0$)

(가) 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 주기함수이다.

(나) $f(x)$ 의 그래프는 $y = a \tan bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

(다) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 1$

24 ...

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $2 \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ 을 푸시오.

25 ...

오른쪽 그림과 같이

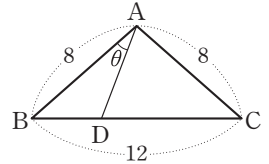
$\overline{AB} = \overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 12$ 인

이등변삼각형 ABC 에 대하여

변 BC 를 $1:2$ 로 내분하는

점을 D 라 하자.

$\angle BAD = \theta$ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.



정답을 맞힌 문항에 ○표하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02	일반각과 호도법의 뜻을 안다.	○ △ ×	69~ 73쪽
03 04 05 06 07 08	삼각함수의 뜻을 안다.	○ △ ×	74~ 79쪽
09 10 11 23	삼각함수의 그래프를 그릴 수 있고, 삼각함수의 성질을 안다.	○ △ ×	81~ 89쪽
12 13 14 15 24	삼각함수가 포함된 방정식과 부등식을 풀 수 있다.	○ △ ×	90쪽
16 17 18 19 20	사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	○ △ ×	97~101쪽
21 22 25	코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	○ △ ×	102~106쪽

성취도 ○만족, △보통, ×미흡

독도는 우리 땅!

1966년 일본의 어떤 학자는 대한민국의 영토인 울릉도에서 눈으로 독도를 볼 수 없다며 독도가 일본 영토라고 억지를 부렸다. 그러나 『세종실록지리지』에는 “두 섬이 서로 거리가 멀지 아니하여 날씨가 맑으면 바라볼 수 있다.”라고 기록되어 있다. 이에 우리나라의 한 사진 작가가 울릉도에서 바라본 독도의 일출 사진을 찍기로 결심하였다.

울릉도에서 독도까지의 거리가 약 92 km이고 독도의 폭이 480 m이므로, 울릉도에서 독도를 바라보았을 때의 태양의 지름의 길이를 800 m로 생각했다. 또, 울릉도에서 독도의 양 끝을 바라본 각의 크기를 θ_1 , 울릉도에서 태양의 양 끝을 바라본 각의 크기를 θ_2 라 하면

$$\tan \frac{\theta_1}{2} = \frac{240}{92000} = \frac{3}{1150}, \quad \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{400}{92000} = \frac{1}{230}$$

에서 θ_1 은 약 0.3° , θ_2 는 약 0.5° 임을 알아냈다.

이때 지구의 반지름의 길이를 $R=6400$ km, 수평선까지의 거리를 $x=92$ km, 울릉도에서 독도가 잘 보이는 높이를 h km라 하면 h 의 값을 $\frac{x^2}{2R}$ 으로 생각하여

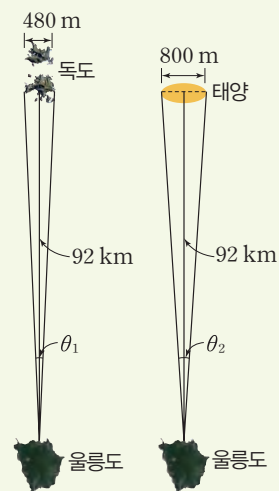
$$h = \frac{92^2}{2 \times 6400} = 0.66125$$

를 구했다.

그런데 실제로는 환경적인 다른 요인들을 고려하면 울릉도에서 독도의 사진을 찍기에 가장 좋은 높이는 약 640 m이었다고 한다.

이 사진 작가는 3년간의 노력 끝에 울릉도에서 바라본 독도의 일출 사진을 찍게 되었는데, 이처럼 삼각함수를 이용하여 『세종실록지리지』의 기록이 사실임을 증명할 수 있었다.

(출처: EBS MATH, 2015)



통신 표준과 삼각함수

통신 표준화 전문가는 디지털 데이터를 좀 더 빠르고 효율적으로 전자기파를 통해 무선으로 보내는 방식을 개발하고 표준을 정한다. 통신 표준 방식이 정해지면, 여기에 따라 만들어진 기기들 사이에는 자유롭게 통화와 데이터 전송이 가능하게 된다.



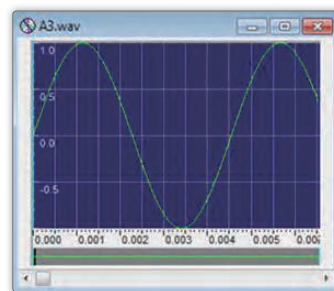
우리나라에서 사용하는 통신 표준인 LTE(Long - Term Evolution)는, 기본적으로 0과 1로 이루어진 디지털 비트(digital bit)를 무선 신호에 실어 공중으로 전송하면 수신기가 무선 신호에 포함된 디지털 정보를 추출하는 방식으로 통신 서비스를 제공한다. 이때 전파는 여러 개의 비트를 한꺼번에 전송하게 되는데, 이와 같은 방식을 OFDM(직교 주파수 분할 다중 방식, Orthogonal Frequency Division Multiplexing)이라고 한다.

OFDM의 원리를 간략하게 살펴보자.

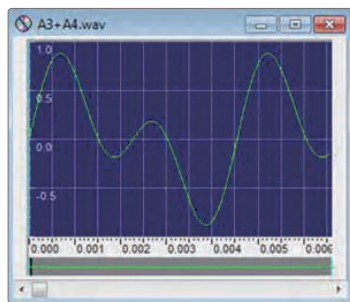
사인파는 파형을 사인함수의 그래프로 표시하는 파동을 말하는데, 데이터를 전송할 때 각 비트는 일정한 주파수를 갖는 사인파를 사용하되 0이면 아무것도 보내지 않고, 1이면 사인파를 보내게 된다.

첫 번째 비트를 보낼 때 사용한 사인파의 주파수를 f 라 하면, 두 번째 비트를 보낼 때는 2배인 $2f$ 의 주파수를 갖는 사인파를 사용하고, 세 번째 비트를 보낼 때는 3배인 $3f$ 의 주파수를 갖는 사인파를 사용한다. 이때 여러 비트를 각각의 주파수를 갖는 사인파로 동시에 보내는 것은, 마치 피아노 건반에서 여러 건반을 동시에 누르는 것과 같다.

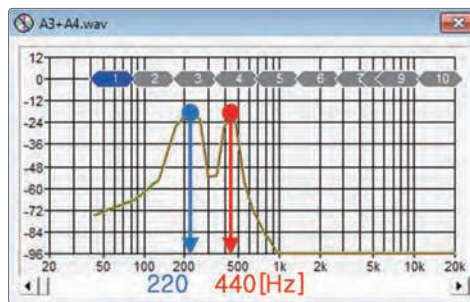
예를 들어 A3(3옥타브 '라')은 220 Hz의 주파수를 갖는 사인파로 [그림 1]과 같이 파형을 나타낼 수 있다. 한편, A4(4옥타브 '라')는 440 Hz의 주파수를 갖는 사인파로 나타낼 수 있다. 이때 두 비트 A3과 A4를 동시에 보내는 경우에는 피아노에서 두 건반을 동시에 누르는 것으로 생각할 수 있고 그 파형과 주파수는 각각 [그림 2]와 [그림 3]과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 1] A3(3옥타브 '라')의 사인파



[그림 2] A3 + A4의 파형



[그림 3] A3 + A4 (220 + 440 Hz)의 주파수 분석

(출처: 정보통신연구회, 『디지털 통신이론』)

III 수열

옛날 사람들은 우주의 구조와 자연의 법칙을 탐구하면서, 무질서한 것처럼 보이는 가운데서도 어떤 질서를 찾아낼 수 있음을 알게 되었고 이를 수열로 나타내었다. 수열에 대한 연구는 오래전부터 이루어졌는데, 고대 그리스의 피타고라스학파는 등차수열, 등비수열 등과 같은 수열에 대하여 연구를 많이 했다고 한다.

한편, 도미노가 차례로 쓰러지는 원리처럼 자연수와 관련된 성질을 증명하는 수학적 귀납법은 16세기에 들어와서 체계적으로 연구되었다고 한다.





자연에서도 규칙성이 있는 수열을 찾아볼 수 있다.

1. 등차수열과 등비수열
2. 수열의 합
3. 수학적 귀납법

이 단원에서는

수열의 뜻 및 등차수열과 등비수열의 뜻과 성질을 이해하고,
수열의 합을 구하는 방법과 수학적 귀납법을 알아본다.

1

등차수열과 등비수열

01

수열

02

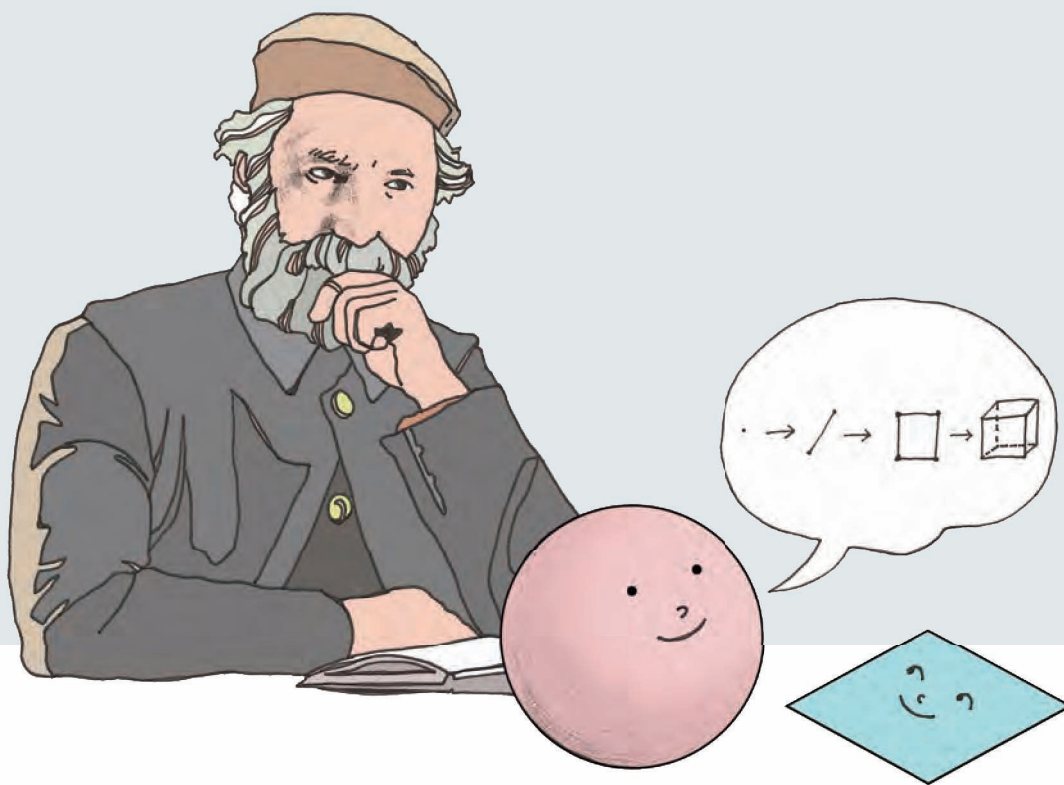
등차수열

03

등비수열

“ 1, 2, 4는 분명한 등비수열이니, 다음에 오는 수가 무엇인지 스스로 답할 수 있겠지? ”

(출처: Abbott, E. A., 『Flatland: A Romance of Many Dimensions』)



애벗 (Abbott, E. A., 1838~1926)

영국의 교육자이자 신학자

- 이 글은 1884년에 발표된 최초의 수학 공상 과학 소설인 『플랫랜드(Flatland)』에서, 3차원 세계에서 온 이방인인 ‘구’가 2차원 세계에 사는 주인공 ‘정사각형’에게 점의 개수로 차원이 결정되는 원리를 설명하는 장면이다. 0차원인 점은 점 1개로, 1차원인 선분은 점 2개로, 2차원인 정사각형은 점 4개로 결정되므로 3차원인 정육면체는 점 8개로 결정됨을 등비수열로 설명한 것이다.

01 수열

학습 목표

수열의 뜻을 안다.

준비하기

다음은 일정한 규칙에 따라 수를 나열한 것이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \square, \frac{1}{5}, \square, \frac{1}{7}$

(2) $1, \sqrt{2}, \square, 2, \square, \sqrt{6}$

다가서기

영국의 경제학자 맬서스(Malthus, T. R., 1766~1834)는 인구수가

2배, 4배, 8배, 16배, ...

로 증가할 때, 식량은

2배, 3배, 4배, 5배, ...

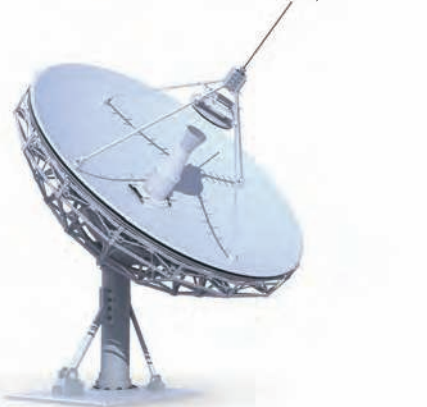
로 증가하여 식량 부족 문제가 발생할 것이라고 주장했다.

이와 같이 자연 현상이나 사회 현상을 수로 나열하여 나타내면

그 특성을 효과적으로

이해하는 데 도움이 된다.

(출처: 『Scientific American』, 2016)

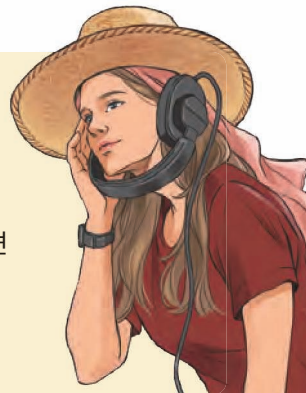


수열

생각 열기

미국의 천문학자 칼 세이건(Carl Sagan, 1934~1996)의 소설 『콘택트』는 주인공 엘리가 외계 생명체를 찾아 나서는 내용이다. 천문학자인 엘리는 어느 날 우주로부터 오는 신호를 수신하던 중 직녀성으로부터 온 신호가 소수로 나열됨을 발견한다.

▶ 20 이하의 소수를 작은 것부터 차례대로 나열해 보자.



소수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 다음과 같다.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

이와 같이 차례대로 나열된 수의 열을 **수열**이라 하며, 나열된 각 수를 그 수열의 **항**이라고 한다.

이때 각 항을 앞에서부터 차례대로 첫째항, 둘째항, 셋째항, ... 또는 제1항, 제2항, 제3항, ...이라고 한다.

일반적으로 수열을 나타낼 때 항에 번호를 붙여

$a_1, a_2, a_3, \dots$

과 같이 나타내고, 제 n 항 a_n 을 이 수열의 **일반항**이라고 한다.

또, 수열을 일반항 a_n 을 이용하여

$\{a_n\}$

과 같이 간단히 나타낸다. 이때 일반항 a_n 을 나타내는 식에서 n 에 자연수 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하여 각 항을 구할 수 있다.

보기

수열 $\{2n+3\}$ 의 일반항은 $a_n=2n+3$ 이므로

$$a_1=2 \times 1+3=5, \quad a_2=2 \times 2+3=7,$$

$$a_3=2 \times 3+3=9, \quad a_4=2 \times 4+3=11, \dots$$

따라서 수열 $\{2n+3\}$ 은 다음과 같다.

5, 7, 9, 11, ...

④ 일정한 규칙 없이 수를 나열한 것도 수열이지만, 여기서는 규칙이 있는 실수의 수열을 주로 다룬다.

문제 1 다음 수열의 첫째항부터 제4항까지를 구하시오.

- (1) $\{3n-2\}$ (2) $\{3^n-1\}$ (3) $\left\{\frac{n+3}{n+1}\right\}$

예제 1 다음 수열의 일반항 a_n 을 추측해 보시오.

- (1) 1, 4, 9, 16, ... (2) 9, 99, 999, 9999, ...

풀이 (1) $a_1=1=1^2, a_2=4=2^2, a_3=9=3^2, a_4=16=4^2, \dots$
따라서 $a_n=n^2$ 이다.

(2) $a_1=9=10^1-1, a_2=99=10^2-1, a_3=999=10^3-1, a_4=9999=10^4-1, \dots$
따라서 $a_n=10^n-1$ 이다.

답 (1) $a_n=n^2$ (2) $a_n=10^n-1$

문제 2 다음 수열의 일반항 a_n 을 추측해 보시오.

- (1) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \dots$ (2) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \dots$

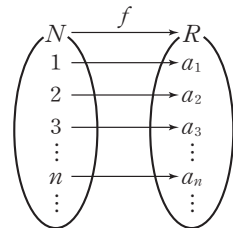
생각
넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

수열 $\{a_n\}$ 은 자연수 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 에 각 항 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 이 차례대로 대응하는 함수로 생각할 수 있다. 즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 정의역이 자연수 전체의 집합 N , 공역이 실수 전체의 집합 R 인 함수

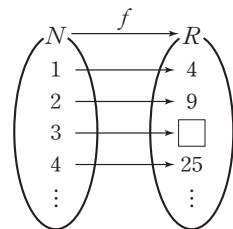
$$f: N \longrightarrow R$$

로 볼 수 있다. 이때 $f(n)=a_n$ 이다.



활동 ① 오른쪽 그림과 같이 정의된 함수 f 에서 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

활동 ② 함수 f 가 나타내는 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 추측해 보자.



02 등차수열

학습 목표

등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.

준비하기

짝수를 2부터 차례대로 나열할 때, 15번째 수를 구하시오.

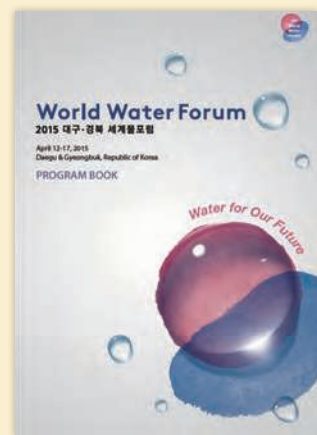
다가 서기

비엔날레는 ‘2년마다’를 뜻하는 이탈리아어로 국제 전람회를 일컫는다. 부산 비엔날레는 2002년 이후부터 2년마다 정기적으로 개최되고 있다. 이와 같이 우리 주변에는 일정한 간격을 두고 개최되는 행사를 찾아볼 수 있다. 수열 중에도 일정한 간격을 갖는 것이 있다.

등차수열의 뜻

생각 열기 세계 물 위원회에서는 전 세계의 물 문제 해결을 위한 공동 대응을 목적으로 3년마다 ‘세계 물 포럼’을 개최하고 있다.

- ① 제 1회 세계 물 포럼은 1997년 모로코의 마라케시에서 개최되었다. 2015년 우리나라의 대구·경북 지역에서 개최된 포럼은 제 몇 회인지 구해 보자.
- ② 제 10회 세계 물 포럼은 몇 년도에 개최되는지 구해 보자.



수열 3, 7, 11, 15, 19, ...는 다음과 같이 3부터 시작하여 차례대로 4를 더하여 만든 수열이다.

$$\begin{array}{ccccccc} 3, & 7, & 11, & 15, & 19, & \dots \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ & +4 & +4 & +4 & +4 & \end{array}$$

이와 같이 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 **등차수열**이라 하며, 그 일정한 수를 **공차**라고 한다.

일반적으로 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 제 n 항에 공차 d 를 더하면 제 $(n+1)$ 항이 되므로 다음이 성립한다.

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

④ 공차 d 는 차이를 뜻하는 difference의 첫 글자이다.

- 보기**
- ① 수열 2, 5, 8, 11, 14, ...는 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이다.
 - ② 첫째항이 3, 공차가 -2 인 등차수열은 3, 1, -1 , -3 , -5 , ...이다.

문제 1 다음 수열이 등차수열을 이룰 때, □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $-2, 3, \square, 13, 18, \dots$

(2) $1, \square, 0, -\frac{1}{2}, \square, \dots$



● 등차수열의 일반항

다음을 통해 등차수열의 일반항을 첫째항과 공차를 이용하여 나타내어 보자.

함께하기

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은 다음과 같다.

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d$$

$\vdots$

$$a_1 = a + 0d$$

$$a_2 = a + 1d$$

$$a_3 = a + 2d$$

$$a_4 = a + 3d$$

$\vdots$

활동 ▶ 위에서 규칙성을 찾아 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 a 와 n , d 에 대한 식으로 나타내어 보자.

위의 활동에서 다음을 알 수 있다.

■ 등차수열의 일반항

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1)d$$

예제 1 다음 등차수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

(1) 첫째항이 5, 공차가 7

(2) 20, 17, 14, 11, ...

풀이 (1) 첫째항이 5, 공차가 7인 등차수열의 일반항은

$$a_n = 5 + (n-1) \times 7 = 7n - 2$$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 20, 공차가 -3 인 등차수열이므로 일반항은

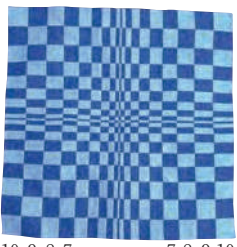
$$a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$$

$$\text{답} \quad (1) a_n = 7n - 2 \quad (2) a_n = -3n + 23$$

문제 2 다음 등차수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

(1) 첫째항이 -1 , 공차가 3

(2) 5, -1 , -7 , -13 , ...



10 9 8 7 ... 7 8 9 10

▶ 등차수열 $\{n\}$ 을 이용한
조각보 디자인

● **문제 3** 첫째항이 70, 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음에 답하시오.

- (1) 제 10 항을 구하시오.
- (2) -6 은 제 몇 항인지 구하시오.

● **예제 2** 제 3 항이 11, 제 9 항이 23인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 11, \quad a_9 = a + 8d = 23$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 7, d = 2$

따라서 첫째항이 7, 공차가 2이므로 일반항은

$$a_n = 7 + (n-1) \times 2 = 2n + 5$$

☞ $a_n = 2n + 5$

● **문제 4** $a_2 = 8, a_8 = 26$ 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

● **문제 5** 제 3 항이 81, 제 7 항이 73인 등차수열에 대하여 다음에 답하시오.

- (1) 일반항 a_n 을 구하시오.
- (2) 처음으로 음수가 되는 항은 제 몇 항인지 구하시오.

② 공차가 0이 아닌 등차수열의 일반항 a_n 은 n 에 대한 일차식이고, 역으로 일반항 a_n 이 n 에 대한 일차식인 수열은 등차수열이다.

● **예제 3** 수열 $\{4n-1\}$ 이 등차수열임을 보이시오.

증명 수열 $\{4n-1\}$ 의 각 항에서 바로 앞의 항을 뺀 차가 일정한 수임을 보이면 된다.

$$a_n = 4n - 1, \quad a_{n+1} = 4(n+1) - 1 = 4n + 3 \text{ 이므로}$$

$$a_{n+1} - a_n = (4n + 3) - (4n - 1) = 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 주어진 수열은 공차가 4인 등차수열이다.

● **문제 6** 일반항 a_n 이 n 에 대한 일차식 $pn+q$ 인 수열은 등차수열임을 보이시오.
(단, p, q 는 상수이다.)

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 **등차중항**이라고 한다.
이때 $b-a=c-b$ 이므로 다음을 알 수 있다.

▶ a 와 c 의 등차중항
 $b = \frac{a+c}{2}$
는 a 와 c 의 산술평균이다.

$$b = \frac{a+c}{2}$$

● **예제 4** 네 수 2, a , 10, b 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a 와 b 의 값을 구하시오.

풀이 네 수 2, a , 10, b 가 이 순서대로 등차수열을 이루면, a 는 2와 10의 등차중항이고
10은 a 와 b 의 등차중항이므로

$$a = \frac{2+10}{2} = 6, \quad 10 = \frac{a+b}{2}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=6, b=14$$

답 $a=6, b=14$

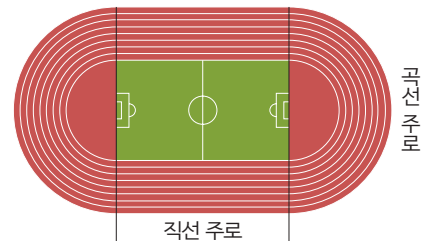
● **문제 7** 다음 수열이 등차수열이 되도록 x, y, z 의 값을 정하시오.

(1) $-2, x, 10, y, 22, \dots$

(2) $13, x, y, z, -7, \dots$

탐구 ● **문제 8** 오른쪽 그림과 같이 직선 주로와 반원 모양의 곡선 주로로 이루어진 육상 경기장이 있다. 이 주로의 폭은 일정하며, 각 주로의 경계선의 길이를 안쪽부터 차례대로 a_1 m, a_2 m, $\dots$, a_9 m라 할 때, $a_3=415.7$, $a_7=447.1$ 이다. 다음에 답하시오.

(단, $\pi=3.14$ 로 계산한다.)



- (1) a_5 를 구하시오.
- (2) a_1 을 구하시오.
- (3) 주로의 폭을 구하시오.

● 등차수열의 합

생각 열기

다음은 독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)의 일화이다.



1에서 100까지의 합을 다음과 같이 계산해 보자.

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① ①과 ②를 변끼리 더해 보자.

② ①을 이용하여 S 의 값을 구해 보자.

등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구해 보자.

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 제 n 항을 l 이라 할 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-d) + l \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이고, ①의 우변의 합을 순서를 거꾸로 하여 나타내면

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+d) + a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이다. ①과 ②를 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} 2S_n &= \underbrace{(a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l)}_{n\text{개}} \\ &= n(a+l) \end{aligned}$$

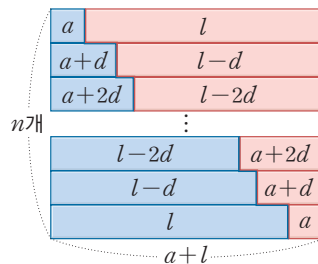
이므로 다음이 성립한다.

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

또, $l = a + (n-1)d$ 이므로 이것을 ③에 대입하여 정리하면

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

이다.



② 공차가 d 인 등차수열
 $\{a_n\}$ 에서 제 n 항이 l 이면
 $a_n = l$
 $a_{n-1} = l - d$
 $a_{n-2} = l - 2d$
 $\vdots$

이상을 정리하면 다음과 같다.

등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

① 첫째항이 a , 제 n 항이 l 일 때, $S_n = \frac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항이 a , 공차가 d 일 때, $S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$

보기 ① 첫째항이 5, 제 10 항이 35인 등차수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합 S_{10} 은

$$S_{10} = \frac{10(5+35)}{2} = 200$$

② 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제 12 항까지의 합 S_{12} 는

$$S_{12} = \frac{12\{2 \times 1 + (12-1) \times 3\}}{2} = 210$$

문제 9 다음을 구하시오.

(1) 첫째항이 -12 , 제 15 항이 112인 등차수열의 첫째항부터 제 15 항까지의 합

(2) 첫째항이 5, 공차가 -4 인 등차수열의 첫째항부터 제 20 항까지의 합

▶ 수열의 일반항을 구하여 첫째항부터 제 몇 항까지의 합인지 찾는다.

문제 10 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $10 + 14 + 18 + \cdots + 58$

(2) $34 + 28 + 22 + \cdots + (-50)$

예제 5 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수의 합을 구하시오.

풀이 주어진 조건을 만족시키는 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

$$2, 5, 8, \cdots, 98$$

이것은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

그런데 $3n - 1 = 98$ 에서 $n = 33$ 이므로 98은 제 33 항이다.

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 33 항까지의 합 S_{33} 이므로

$$S_{33} = \frac{33(2+98)}{2} = 1650$$

답 1650

● **문제 11** 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 4로 나누었을 때 나머지가 1인 수의 합을 구하시오.

● **예제 6** 첫째항부터 제6항까지의 합이 42, 첫째항부터 제10항까지의 합이 150인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 구하시오.

풀이 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_6 = \frac{6(2a+5d)}{2} = 42 \quad \dots\dots ①$$

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 150 \quad \dots\dots ②$$

$$①, ②에서 \quad 2a+5d=14, \quad 2a+9d=30$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면} \quad a=-3, \quad d=4$$

따라서 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-3) + (n-1) \times 4\}}{2} = 2n^2 - 5n$$

답 $S_n = 2n^2 - 5n$

● **문제 12** 첫째항부터 제5항까지의 합이 185, 첫째항부터 제10항까지의 합이 220인 등차수열에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n (2) S_n 이 최대가 되도록 하는 n 의 값

생각
넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$a_1 = S_1, \quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

이 성립한다.

$$\begin{array}{c} \overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}^{S_n} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{S_{n-1}} \end{array}$$

활동 ① $S_n = -3n^2 + 4n$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구해 보자.

활동 ② 활동 ①의 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 확인하고, 그 공차를 구해 보자.

활동 ③ $S_n = pn^2 + qn$ ($p \neq 0$)일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 확인해 보자.

(단, p, q 는 상수이다.)

④ 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 주어지면 일반항 a_n 을 구할 수 있다.

03 등비수열

학습 목표

등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.

준비하기

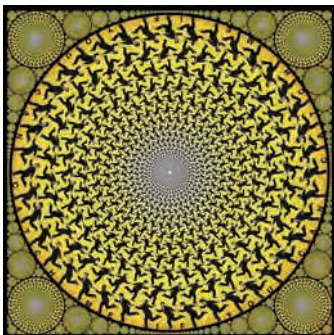
다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0$)

(1) $a^3 \times a^5$ (2) $a^7 \div a^4$

다가 보기

닮은꼴이 끝없이 반복되는 프랙털(fractal)과 같이, 일정한 비율로 크게 하거나 작게 하여 만드는 디자인이 있다.

수열 중에도 일정한 비율을 갖는 것이 있다.



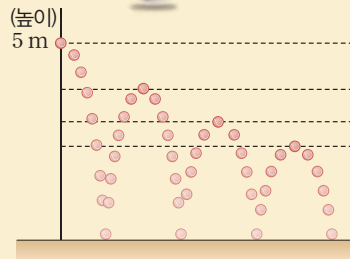
등비수열의 뜻

생각 열기 떨어뜨린 높이의 $\frac{4}{5}$ 만큼 다시 튀어 오르는 공이 있다.

- ① 이 공을 5 m의 높이에서 떨어뜨렸을 때, 첫 번째 튀어 오른 높이, 두 번째 튀어 오른 높이, ...를 각각 계산하여 수열을 만들어 보자.

(단, 단위는 m이다.)

- ② ①에서 만든 수열의 규칙을 말해 보자.



수열 1, 2, 4, 8, 16, ...은 다음과 같이 1부터 시작하여 차례대로 2를 곱하여 만든 수열이다.

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

이와 같이 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 **등비수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공비**라고 한다.

일반적으로 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 제 n 항에 공비 r 를 곱하면 제 $(n+1)$ 항이 되므로 다음이 성립한다.

④ 공비 r 는 비율을 뜻하는 ratio의 첫 글자이다.

$$a_{n+1} = ra_n \quad (r \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

- 보기** ① 수열 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, ...은 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.
② 첫째항이 1, 공비가 -3 인 등비수열은 1, -3 , 9, -27 , 81, ...이다.

문제 1 다음 수열이 등비수열을 이룰 때, □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) 1, -2 , □, -8 , 16, ...

(2) 3, □, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, □, ...

● 등비수열의 일반항

다음을 통해 등비수열의 일반항을 첫째항과 공비를 이용하여 나타내어 보자.

함께하기

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은 다음과 같다.

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 r = ar$$

$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2$$

$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3$$

$\vdots$

$$a_1 = ar^0$$

$$a_2 = ar^1$$

$$a_3 = ar^2$$

$$a_4 = ar^3$$

$\vdots$

활동 ▶ 위에서 규칙성을 찾아 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 a 와 n , r 에 대한 식으로 나타내어 보자.

위의 활동에서 다음을 알 수 있다.

■ 등비수열의 일반항

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = ar^{n-1}$$

생각 톡톡

수열 1, 1, 1, 1, ...은 등차수열일까, 등비수열일까?



32 16 8 ... 8 16 32

▶ 등비수열 $\{2^{n-1}\}$ 을 이용한 조각보 디자인

● 예제 1 다음 등비수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

(1) 첫째항이 2, 공비가 7

(2) 18, -6, 2, $-\frac{2}{3}$, ...

풀이 (1) 첫째항이 2, 공비가 7인 등비수열의 일반항은

$$a_n = 2 \times 7^{n-1}$$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 18, 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 18 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

답 (1) $a_n = 2 \times 7^{n-1}$ (2) $a_n = 18 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

● **문제 2** 다음 등비수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

(1) 첫째항이 -5 , 공비가 3

(2) $3, -12, 48, -192, \dots$

● **문제 3** 첫째항이 64 , 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 제 3 항을 구하시오.

(2) $\frac{1}{1024}$ 은 제 몇 항인지 구하시오.

● **예제 2** 제 2 항이 14 , 제 5 항이 112 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 14, \quad a_5 = ar^4 = 112$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 7, r = 2$

따라서 첫째항이 7 , 공비가 2 이므로 일반항은

$$a_n = 7 \times 2^{n-1}$$

답 $a_n = 7 \times 2^{n-1}$

● **문제 4** $a_3 = \frac{25}{2}, a_6 = -12500$ 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

● **문제 5** 제 2 항이 2 , 제 7 항이 64 인 등비수열에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 일반항 a_n 을 구하시오.

(2) 처음으로 3000 보다 커지는 항은 제 몇 항인지 구하시오.

0 이 아닌 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 **등비중항**이라고 한다. 이때 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ 이므로 다음을 알 수 있다.

$$b^2 = ac$$

▶ $ar^4 = ar \times r^3$ 이므로

$$r^3 = \frac{112}{14} = 8$$

그런데 r 는 실수이므로

$$r = 2$$

▶ $a > 0, c > 0$ 일 때,

a 와 c 의 등비중항

$$b = \sqrt{ac}$$

는 a 와 c 의 기하평균이다.

예제 3 네 수 4, a , 9, b 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a , b 의 값을 구하시오.

풀이 네 수 4, a , 9, b 가 이 순서대로 등비수열을 이루면, a 는 4와 9의 등비중항이고 9는 a 와 b 의 등비중항이므로

$$a^2 = 4 \times 9 = 36, \quad 9^2 = ab$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -6, b = -\frac{27}{2} \quad \text{또는} \quad a = 6, b = \frac{27}{2}$$

그런데 a , b 는 양수이므로 $a = 6, b = \frac{27}{2}$

답 $a = 6, b = \frac{27}{2}$

문제 6 다음 수열이 등비수열이 되도록 양수 x , y , z 의 값을 정하시오.

(1) 3, x , 12, y , 48, ...

(2) $\frac{1}{4}$, x , y , z , 196, ...

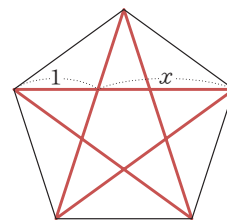
탐구

문제 7 오른쪽 그림과 같이 정오각형 안에 별이 그려진 모양은 고대 피타고라스학파의 상징으로 사용되었다.

정오각형의 한 대각선이 다른 대각선을 1 : x 로 나눌 때, 세 수

$$1, \quad x, \quad 1+x$$

가 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 한다. 양수 x 의 값을 구하시오.



주어진 그림에서 1 : x 를 황금비라고 한다.

수학 이야기

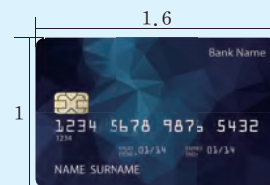


황금비



황금비란 (긴 길이) : (전체 길이) = (짧은 길이) : (긴 길이)를 만족시키는 선분의 분할에 대한 비로, 약 1 : 1.618이다.

황금비는 사람들이 가장 편안하고 아름답다고 느끼는 비율로 알려져 있으며, 우리 주변에서 황금비를 염두에 둔 1 : 1.6의 비를 쉽게 찾아볼 수 있다.



● 등비수열의 합

등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구해 보자.

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이고, ①의 양변에 공비 r 를 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이다. ①에서 ②를 변끼리 빼면

$$\begin{array}{r} S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ -) \quad rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = a - ar^n \end{array}$$

에서 $(1-r)S_n = a(1-r^n)$ 이므로 S_n 은 다음과 같다.

(i) $r \neq 1$ 일 때,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(ii) $r=1$ 일 때, ①에서

$$S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{개}} = na$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

■ 등비수열의 합

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

① $r \neq 1$ 일 때, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$ 일 때, $S_n = na$

【보기】 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 7 항까지의 합 S_7 은

$$S_7 = \frac{3(2^7-1)}{2-1} = 381$$

문제 8 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 5 항까지의 합을 구하시오.

② 공비가 문자 r 로 주어질 때는 $r \neq 1$ 인 경우와 $r=1$ 인 경우로 나누어 생각한다.

● **문제 9** $\frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^5} + \cdots + 1$ 의 값을 구하시오.

● **예제 4** 첫째항부터 제3항까지의 합이 26, 첫째항부터 제6항까지의 합이 728인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 구하시오.

● $r=1$ 일 때
 $S_3=3a=26$,
 $S_6=6a=728$
 을 동시에 만족시키는 a 가 존재하지 않으므로 $r \neq 1$ 이다.

풀이 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 26 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = 728 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②를 변형하면

$$\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 728, \quad \frac{a(r^3-1)}{r-1} \times (r^3+1) = 728$$

①을 위의 식에 대입하면 $26(r^3+1) = 728$

$$r^3 = 27$$

그런데 r 는 실수이므로 $r = 3$

$r = 3$ 을 ①에 대입하면

$$13a = 26, \quad a = 2$$

따라서 S_n 은

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1} = 3^n - 1$$

답 $S_n = 3^n - 1$

● **문제 10** 모든 항이 양수인 등비수열에 대하여 첫째항부터 제4항까지의 합이 45, 첫째항부터 제8항까지의 합이 765일 때, 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하시오.

탐구 ● **문제 11** 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_n = 3^{n+1} - 3$ 이다. 다음에 답하시오.

(1) $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하시오.

(2) (1)의 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열임을 확인하고, 그 공비를 구하시오.

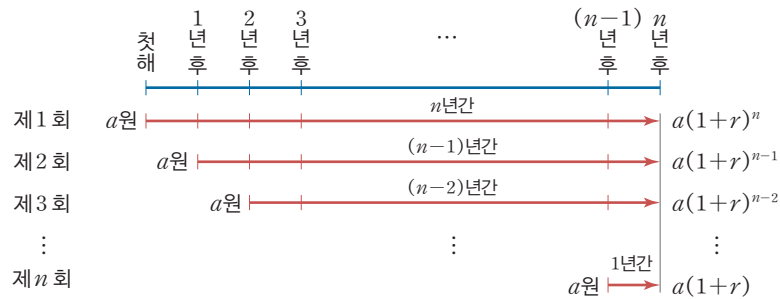
원리합계는 원금과 이자를 합한 금액이고, 복리법은 이자를 원금에 더하여 그 합계액을 다음 기간의 원금으로 하는 이자 계산 방법이다.



S_n 은 첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

예제 5 연이율이 r 이고 1년마다 복리로 매년 초에 일정한 금액 a 원을 n 년 동안 적립할 때, n 년 말까지 적립금의 원리합계를 구하시오.

풀이 매년 초에 a 원을 적립할 때, 매년 적립금의 n 년 말까지의 원리합계는 다음과 같다.



따라서 구하는 적립금의 원리합계를 S_n 원이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n \\ &= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \end{aligned}$$

답 $\frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$ 원

문제 12 연이율이 2%이고 1년마다 복리로 매년 초에 30만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년 말까지 적립금의 원리합계를 구하시오. (단, $1.02^{10} = 1.2$ 로 계산한다.)

생각 넓히기

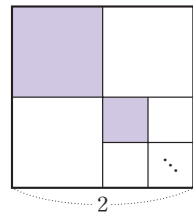


문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 모양의 종이가 있다.

첫 번째 시행에서 각 변의 중점을 이어서 만든 네 개의 정사각형 중에서 왼쪽 위의 정사각형을 색칠한다. 두 번째 시행에서 첫 번째 시행 후 남은 오른쪽 아래의 정사각형에서 같은 방법으로 정사각형을 색칠한다.

이와 같은 시행을 반복할 때, n 번째 시행에서 색칠하는 정사각형의 넓이를 a_n 이라 하자.



활동 ① 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열을 이루는지 확인해 보고, 등비수열을 이루면 공비를 구해 보자.

활동 ② 색칠한 정사각형의 넓이의 합이 처음으로 $\frac{85}{64}$ 보다 커지는 것은 몇 번째 시행인지 말해 보자.

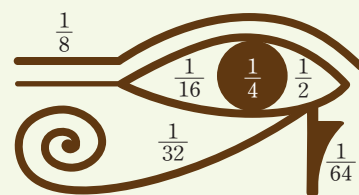
호루스의 눈과 등비수열의 합

이집트 신화에서 최고의 신으로 알려진 호루스(Horus)는 격렬한 싸움 끝에 삼촌 세트(Seth)를 물리치고 왕위에 오른다. 그러나 이 싸움 때문에 호루스의 한쪽 눈은 산산조각이 난다. 이를 불쌍히 여긴 지혜의 신 토트(Thoth)가 눈 조각들을 다시 모아 원래의 모습으로 되돌려 주었다고 한다.

이후 이집트에서는 호루스의 눈 전체를 1로 한 다음, 오른쪽 그림과 같이 눈의 각 조각에 분모가 2의 거듭제곱인 단위분수

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$$

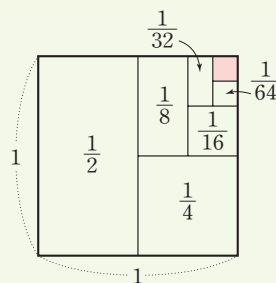
을 대응시켰다.



그런데 등비수열의 합을 이용하여 호루스의 눈의 각 조각에 대응하는 6개의 수의 합을 구하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} &= \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{63}{64} \end{aligned}$$

이므로 1이 되기에는 $\frac{1}{64}$ 이 부족하다.



그 이유는 무엇일까?

이집트인들은 부족한 $\frac{1}{64}$ 은 지혜의 신 토트가 채워 준다고 믿었기 때문이다.

(출처: 계영희, 『명화와 함께 떠나는 수학사 여행』)



중단원 마무리하기

수열

차례대로 나열된 수의 열을 수열이라 하며, 나열된 각 수를 그 수열의 항이라고 한다.

등차수열

(1) 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 등차수열이라 하며, 그 일정한 수를 공차라고 한다.

(2) 등차수열의 일반항

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1)d$$

(3) 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등차중항이라고 한다.

$$\Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

(4) 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

① 첫째항이 a , 제 n 항이 l 일 때,

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

② 첫째항이 a , 공차가 d 일 때,

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

등비수열

(1) 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하며, 그 일정한 수를 공비라고 한다.

(2) 등비수열의 일반항

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = ar^{n-1}$$

(3) 0이 아닌 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등비중항이라고 한다.

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

(4) 등비수열의 합

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\textcircled{1} r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$\textcircled{2} r = 1 \text{ 일 때, } S_n = na$$

01 다음 수열의 제 7 항을 추측해 보시오.

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$(2) 1, -2, 3, -4, \dots$$

02 다음 등차수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

$$(1) 7, 10, 13, 16, \dots$$

$$(2) \text{첫째항이 } -1, \text{ 공차가 } 2 \text{인 등차수열}$$

03 다음 등비수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

$$(1) 1, 5, 25, 125, \dots$$

$$(2) \text{첫째항이 } 2, \text{ 공비가 } -\frac{1}{6} \text{인 등비수열}$$

04 다음을 구하시오.

$$(1) \text{세 수 } 5, x, -3 \text{이 등차수열을 이룰 때, } x \text{의 값}$$

$$(2) \text{세 수 } 1, y, 16 \text{이 등비수열을 이룰 때, } y \text{의 값}$$

05 다음 수열의 첫째항부터 제 7 항까지의 합을 구하시오.

$$(1) \text{등차수열 } 2, -3, -8, -13, \dots$$

$$(2) \text{등비수열 } 128, 64, 32, 16, \dots$$

06 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족시킬 때, a_{20} 을 구하시오.

(1) $a_3=4, a_7=16$

(2) $a_2=3, a_{10}=-13$

07 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3+a_5=26, a_4-a_7=-12$ 일 때, 93은 제몇 항인지 구하시오.

08 11과 35 사이에 세 개의 수 a, b, c 를 넣어 11, $a, b, c, 35$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루도록 할 때, 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

09 첫째항이 9인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 제3항과 제5항은 절댓값이 같고 부호가 반대일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. |서·술·형|

10 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_5=40, S_{10}=155$ 일 때, a_{10} 을 구하시오.

11 어느 공연장의 관람석은 첫 번째 줄이 24석이고, 그다음 줄부터 3석씩 늘어나 20번째 줄까지 배치되어 있다. 이 공연장의 총관람석 수를 구하시오.

12 등비수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족시킬 때, a_9 를 구하시오.

(1) $a_2 = \sqrt{3}$, $a_5 = -9$

(2) $a_4 = 10$, $a_7 = 80$

13 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 + a_3 = 2$, $a_4 + a_5 + a_6 = 16$ 이 성립할 때,
 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하시오.

14 서로 다른 세 수 4, a , b 가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a , b , 4는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a , b 의 값을 구하시오.

15 등비수열을 이루는 세 실수의 합이 7이고 곱이 -27 일 때, 세 수를 구하시오.

16 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면
 $\frac{S_6}{S_3} = 126$ 이다. 이때 S_4 를 구하시오.

17 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = 9 \times 2^n + k$ 가 성립한다.
이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루도록 하는 상수 k 의 값을 구하시오.

18 두 집합

$$A = \{x \mid x = 3n - 1, n \text{은 자연수}\},$$

$$B = \{y \mid y = 5n - 2, n \text{은 자연수}\}$$

에 대하여 집합 $A \cap B$ 의 원소를 작은 것부터 차례대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이 처음으로 100보다 커지는 항은 제몇 항인지 구하시오.

- 19 첫째항이 30인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_5 = S_{11}$ 이다. 이때 S_n 의 최댓값을 구하시오.

- 20 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 각각 $kn^2 + n$, $n^2 + kn$ 인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $a_3 = b_5$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

|서·술·형|

- 21 물이 어떤 여과기를 한 번 통과할 때마다 유해 물질의 양이 20 %씩 줄어든다고 한다. 유해 물질 100 g이 포함된 물이 이 여과기를 n 번 통과하였더니 유해 물질의 양이 10 g 이하가 되었다. n 의 최솟값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.)



2

수열의 합

01
합의 기호 Σ

02
여러 가지 수열의 합

“ 수학에 사용되는 모든 기호는, 우리가 발견의 여정에서 사용하는 수단으로 이해할 수 있다. ”

(출처: Buchanan, S. M., 『Poetry and Mathematics』)



부캐넌(Buchanan, S. M., 1895~1968)

미국의 철학자

- 이 글은 1929년 부캐넌이 출간한 『시와 수학(Poetry and Mathematics)』에 나오는 것으로, 그는 기호를 사용하여 수학의 내용을 쉽게 표현할 수 있음을 말하고 있다.

01 합의 기호 Σ

학습 목표

Σ 의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

준비하기

다음 수열의 일반항 a_n 을 추측해 보시오.

$$1 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 5, 4 \times 6, \dots$$

다가 서기

그래픽 심벌은 언어, 국가, 민족에 관계없이 누구나 빠르고 쉽게 이해할 수 있도록 만든 기호이며, 수학에서 사용하는 ${}_nP_r$, ${}_nC_r$, $n!$ 도 수의 계산을 나타내는 기호이다.

수열의 합도 기호를 사용하여 간단히 나타낼 수 있다.



횡단보도

어린이 보호

보행자 전용 도로



자전거 전용 도로

회전 교차로

보행자 보행 금지

합의 기호 Σ

생각 열기

다음과 같은 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

- ① 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 추측해 보자.
- ② $1+3+5+\dots+81$ 은 이 수열의 첫째항부터 제몇 항까지의 합인지 말해 보자.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

은 합의 기호 Σ 를 사용하여 $\sum_{k=1}^n a_k$ 로 나타낼 수 있다. 즉,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

이다.

한편, $m \leq n$ 일 때 제 m 항부터 제 n 항까지의 합은 $\sum_{k=m}^n a_k$ 로 나타낸다.

참고 $\sum_{k=1}^n a_k$ 는 k 대신에 다른 문자를 사용하여 $\sum_{i=1}^n a_i$, $\sum_{j=1}^n a_j$, $\sum_{m=1}^n a_m$ 등으로 나타내기도 한다.

보기 ① $1+4+7+\dots+28 = \sum_{k=1}^{10} (3k-2)$

② $\sum_{i=4}^{13} 2^i = 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{13}$

문제 1 다음을 기호 Σ 를 사용하여 나타내시오.

(1) $2+4+6+\dots+20$

(2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$

기호 Σ 는 합을 뜻하는 Sum의 첫 글자 S에 해당하는 그리스 문자로, 'sigma'라고 읽는다.

문제 2 다음을 합의 꼴로 나타내시오.

$$(1) \sum_{k=3}^8 (4k+1)$$

$$(2) \sum_{j=1}^n j^3$$

문제 3 기호 Σ 를 사용하면 수열의 합을 다양한 방법으로 나타낼 수 있다. 다음에 답하시오.

(1) 다음 등식이 성립하도록 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

$$\sum_{k=1}^{10} (2k-3) = \sum_{k=3}^{\square} (\square)$$

(2) 등차수열 108, 112, 116, ..., 1004의 합을 기호 Σ 를 사용하여 다양한 방법으로 나타내고, 친구들과 비교하시오.

Σ 의 성질

다음은 통해 합의 기호 Σ 의 성질을 알아보자.

함께하기 다음은 두 수열의 합과 실수배에 대한 기호 Σ 의 성질을 알아보는 과정이다.

■ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (\square) \end{aligned}$$

■ 수열 $\{a_n\}$ 과 상수 c 에 대하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ca_k &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(\square) \end{aligned}$$

활동 1 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

활동 2 다음 식을 완성해 보자.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n \square + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n ca_k = \square \sum_{k=1}^n a_k$$

위의 활동에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$



$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k$
가 성립할까?

문제 4 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 과 상수 c 에 대하여 다음이 성립함을 보이시오.

$$(1) \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k \quad (2) \sum_{k=1}^n c = cn$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

Σ의 성질

$$\begin{aligned} ① \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k & ② \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k \\ ③ \sum_{k=1}^n c a_k &= c \sum_{k=1}^n a_k \text{ (단, } c \text{는 상수)} & ④ \sum_{k=1}^n c &= cn \text{ (단, } c \text{는 상수)} \end{aligned}$$

보기 ① $\sum_{k=1}^n (3a_k - 2b_k) = \sum_{k=1}^n 3a_k - \sum_{k=1}^n 2b_k = 3 \sum_{k=1}^n a_k - 2 \sum_{k=1}^n b_k$
② $\sum_{k=1}^{100} 3 = 3 \times 100 = 300$

문제 5 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 30$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 20$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

$$(1) \sum_{k=1}^{10} (4a_k - 3b_k) \quad (2) \sum_{k=1}^{10} 3(a_k + b_k - 1)$$

생각
넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

다음과 같은 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$$9, 98, 997, 9996, 99995, \dots, 9999999990, \dots$$

활동 ① 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 추측해 보자.

활동 ② 9999999990은 수열 $\{a_n\}$ 의 제몇 항인지 말해 보자.

활동 ③ 등차수열 및 등비수열의 합과 기호 Σ의 성질을 이용하여 다음 식의 값을 구해 보자.

$$9 + 98 + 997 + 9996 + 99995 + \dots + 9999999990$$

02 여러 가지 수열의 합

학습 목표

여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.

준비하기

다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b 의 값을 정하시오.

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

다가서기

고대 그리스인들은 만물을 수라 생각하여 자연과 우주의 현상을 수로 설명하고자 노력하였으며, 여러 가지 수의 개념을 발전시켰다.

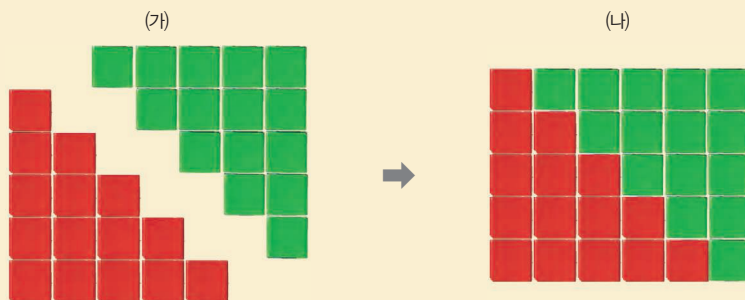
또한, 1부터 n 까지의 자연수의 합, 자연수의 제곱의 합, 자연수의 세제곱의 합을 구하는 방법을 이미 알고 있었다.



여러 가지 수열의 합

생각 열기

다음은 (가)의 빨간색 블록과 초록색 블록을 (나)와 같이 맞춘 것이다.



▶ 위의 그림으로부터 $1+2+3+4+5 = \frac{5 \times 6}{2}$ 이 성립함을 말해 보자.

자연수의 거듭제곱의 합을 구해 보자.

1부터 n 까지의 자연수의 합은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1+2+3+\cdots+n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

이제 1부터 n 까지의 자연수의 제곱의 합 $\sum_{k=1}^n k^2$ 을 구해 보자.

항등식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ 에 $k=1, 2, 3, \dots, n$ 을 차례대로 대입하면 다음과 같다.

$$k=1\text{일 때, } 2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$k=2\text{일 때, } 3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$k=3\text{일 때, } 4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

$$\vdots$$

$$k=n\text{일 때, } (n+1)^3 - n^3 = 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$$

$$\begin{aligned} &\text{④ } (k+1)^3 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

앞의 식에서

$$\begin{array}{r} 2^3 - 1^3 \\ 3^3 - 2^3 \\ 4^3 - 3^3 \\ \vdots \\ +) \frac{(n+1)^3 - n^3}{(n+1)^3 - 1^3} \end{array}$$

이 n 개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 1^3 &= 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + 1 \times n \\ &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^n k^2 &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 1부터 n 까지의 자연수의 제곱의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

탐구

문제 1 다음은 1부터 n 까지의 자연수의 세제곱의 합 $\sum_{k=1}^n k^3$ 을 항등식

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

을 이용하여 구하는 과정의 일부이다. 물음에 답하시오.

$$\begin{array}{ll} k=1\text{일 때,} & 2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1 \\ k=2\text{일 때,} & 3^4 - 2^4 = 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1 \\ k=3\text{일 때,} & 4^4 - 3^4 = 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ k=n\text{일 때,} & (n+1)^4 - n^4 = 4 \times n^3 + 6 \times n^2 + 4 \times n + 1 \end{array}$$

(1) 위의 n 개의 등식을 변끼리 더하여 정리하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 보이시오.

이상을 정리하면 다음과 같다.

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

예제 1 ① $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 = \sum_{k=1}^9 k^2 = \frac{9(9+1)(2 \times 9 + 1)}{6} = \frac{9 \times 10 \times 19}{6} = 285$

② $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = \sum_{k=1}^{10} k^3 = \left\{ \frac{10(10+1)}{2} \right\}^2 = \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 = 3025$

문제 2 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 13^2$

(2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 15^3$

여러 가지 수열의 합을 구해 보자.

예제 1 다음 합을 구하시오.

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$$

▶ 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

풀이 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1)$

$$= \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

문제 3 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2$

(2) $\sum_{k=1}^8 k(k+1)(k-1)$

문제 4 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 15 \times 17$

(2) $2^3 + 5^3 + 8^3 + \dots + 17^3$

$$\begin{aligned} & \gg \frac{1}{AB} \\ &= \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \\ & \quad (\text{단, } A \neq B) \end{aligned}$$

예제 2 다음 합을 구하시오.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

풀이

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

답 $\frac{n}{n+1}$

문제 5 다음 합을 구하시오.

$\gg$ (2) 분모를 유리화한다.

$$\begin{aligned} (1) & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ (2) & \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

생각
넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

일반적으로 수열 $\{a_n\}$ 의 제 m 항부터 제 n 항까지의 합, 즉 $\sum_{k=m}^n a_k$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

(단, $1 < m \leq n$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &= a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \end{aligned}$$

활동 ① 위의 방법을 이용하여 $4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + 13^2$ 의 값을 구해 보자.

활동 ② $\sum_{k=1}^{10} (k+3)^2$, $\sum_{k=2}^{11} (k+2)^2$, $\sum_{k=5}^{14} (k-1)^2$ 을 합의 꼴로 나타내고 이를 비교해 보자.

활동 ③ $10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 25^3$ 의 값을 여러 가지 방법으로 구해 보자.

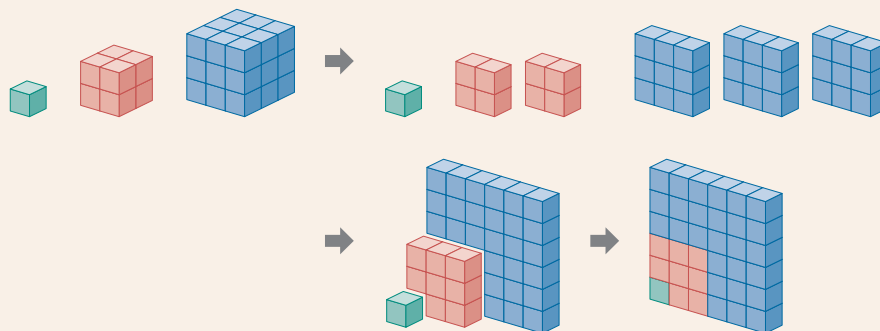
그림으로 이해하는 자연수의 거듭제곱의 합

그림을 이용하면 자연수의 거듭제곱의 합을 쉽고 재밌게 이해할 수 있다.

다음 그림은

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

이 성립함을 보이고 있다.

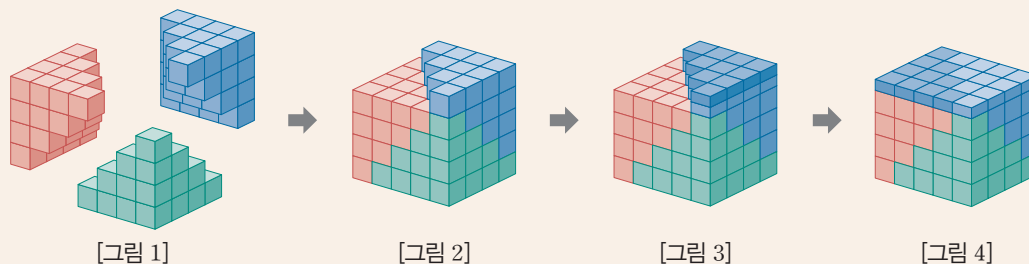


이와 같은 원리를 이용하면 자연수 n 에 대하여

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

이 성립함을 그림을 이용하여 확인할 수 있다.

탐 구 1 다음 그림은 $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 4(4 + 1)\left(4 + \frac{1}{2}\right)$ 이 성립함을 보이고 있다. 이 등식이 성립하는 원리를 설명해 보자.



2 1의 원리를 이용하여

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이 성립함을 설명해 보자.

중단원 마무리하기

● 합의 기호 Σ

- (1) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 기호 Σ 를 사용하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

와 같이 나타낸다.

- (2) 수열 $\{a_n\}$ 의 제 m 항부터 제 n 항까지의 합은 $\sum_{k=m}^n a_k$ 로 나타낸다. (단, $m \leq n$)

● Σ 의 성질

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^n c = cn \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

● 여러 가지 수열의 합

- (1) 자연수의 거듭제곱의 합

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right) \quad (\text{단, } a \neq b)$$

01 다음을 기호 Σ 를 사용하여 나타내시오.

$$(1) 3 + 6 + 9 + \cdots + 27$$

$$(2) 5 + 7 + 9 + \cdots + 63$$

$$(3) \frac{1}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \frac{3}{4 \times 5} + \cdots + \frac{10}{11 \times 12}$$

02 $\sum_{k=1}^{15} a_k = 25$, $\sum_{k=1}^{15} b_k = 12$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

$$(1) \sum_{k=1}^{15} (b_k - a_k)$$

$$(2) \sum_{k=1}^{15} (2a_k + 3b_k - 1)$$

03 다음 식의 값을 구하시오.

$$(1) \sum_{k=1}^{10} (2k - 5)$$

$$(2) \sum_{k=1}^{13} (3k + 5) + \sum_{k=1}^{13} (k - 2)$$

$$(3) \sum_{k=1}^8 (k + 2)(k - 2)$$

$$(4) \sum_{k=1}^5 (k^3 + 3k)$$

04 $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 의 값을 구하시오.

05 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 10$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3)^2$ 의 값을 구하시오.

06 다음 식의 값을 구하시오.

$$(1) \sum_{k=1}^{30} (k+3)^2 - \sum_{k=1}^{30} k(k+6)$$

$$(2) \sum_{k=1}^5 \frac{k^3}{k+1} + \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k+1}$$

$$(3) \sum_{m=1}^{20} \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 2 \right) \right\}$$

$$(4) \sum_{k=1}^9 (1-k^2) + \sum_{k=1}^{10} (1+k^2)$$

|서·술·형|

07 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = 2n^2$$

이 성립할 때, $\sum_{k=11}^{30} a_k$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

08 다음 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구하시오.

$$(1) \frac{1}{1 \times 4}, \frac{1}{4 \times 7}, \frac{1}{7 \times 10}, \frac{1}{10 \times 13}, \dots, \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$(2) 1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \frac{1}{1+2+3+4}, \dots, \frac{1}{1+2+3+4+\dots+n}$$

09 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$$

10 $\sum_{k=1}^{30} \log_5 \{\log_{k+1}(k+2)\}$ 의 값을 구하시오.

11 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{99} a_k = 16, a_{100} = \frac{1}{11}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{99} k(a_k - a_{k+1})$ 의 값을 구하시오.

12 등식

$$1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) + \cdots + (n-1) \times 2 + n \times 1 \\ = \frac{n(n+a)(n+b)}{6}$$

가 성립할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

|서·술·형|

사고력+

13 다음과 같이 자연수를 나열할 때, n 행에 나열되는 수들의 합을 a_n 이라 하자. 이때

$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오.

1행				1	
2행			2	4	
3행			3	6	9
4행		4	8	12	16
5행	5	10	15	20	25
⋮			⋮		

3

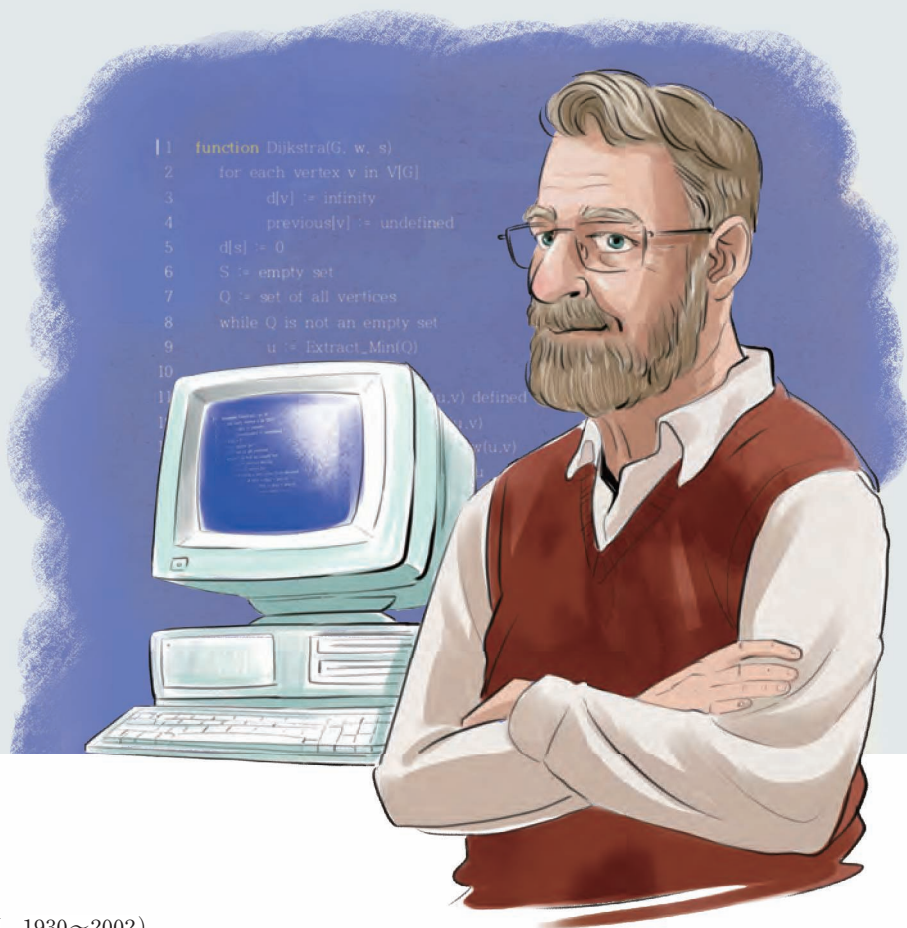
수학적 귀납법

01 수열의 귀납적 정의

02 수학적 귀납법

“ 잘만 적용한다면, 수학적 귀납법은 매우 간결하고 효과적으로, 즉 아름답게 증명하도록 우리를 이끌어 준다. ”

(출처: Dijkstra, E. W., 『Acta Informatica 13』)



데이크스트라(Dijkstra, E. W., 1930~2002)

네덜란드의 컴퓨터 과학자

- 이 글은 프로그래밍 언어 분야에서 큰 공헌을 세운 데이크스트라가 1978년에 제출한 논문에서 쓴 것이다. 그는 과학적 추론을 할 때 수학적 귀납법이 편리하고 유용함을 설명하면서 이것이 컴퓨터 알고리즘을 간결하게 하는 데 효과적임을 강조하고 있다.

01 수열의 귀납적 정의

학습 목표

수열의 귀납적 정의를 이해한다.

준비하기

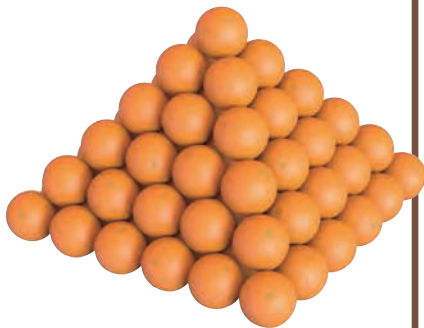
다음에 답하십시오.

- (1) 등차수열 11, 8, 5, 2, ...의 공차를 구하십시오.
- (2) 등비수열 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ 의 공비를 구하십시오.

다가서기

과일 가게에 가면 동그란 과일들을 피라미드 모양으로 쌓아 올린 것을 쉽게 볼 수 있다. 이때 각 층에 놓인 과일의 개수 사이에서 일정한 규칙을 찾으면 일일이 세지 않고도 각 층에 놓인 개수를 알 수 있다.

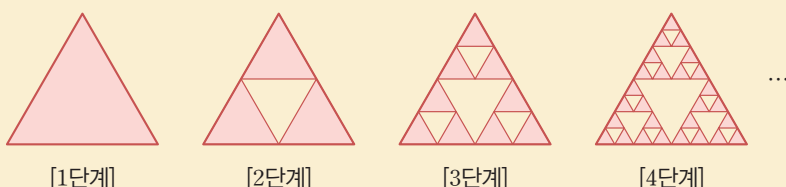
수열 중에는 이웃하는 항들 사이의 관계로부터 그 규칙성을 알 수 있는 것이 있다.



수열의 귀납적 정의

생각 열기

정삼각형 모양의 종이가 있다. 다음 그림과 같이 각 변의 중점을 이어서 만든 삼각형 중에서 한가운데 정삼각형을 오려 내고, 또다시 남아 있는 정삼각형 모양의 종이에서도 같은 방법으로 각각의 한가운데 정삼각형을 오려 낼 때, n 단계에서 남아 있는 정삼각형의 개수를 a_n 이라 하자.



① 다음 표를 완성해 보자.

단계 (n)	1	2	3	4	5	...
정삼각형의 개수 (a_n)	1	3				...

② a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계를 추측해 보자.

위의 생각 열기에서

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

임을 알 수 있다.

이때 관계식 $a_{n+1} = 3a_n$ 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하면

$$a_2 = 3a_1 = 3 \times 1 = 3$$

$$a_3 = 3a_2 = 3 \times 3 = 9$$

$$a_4 = 3a_3 = 3 \times 9 = 27$$

⋮

과 같이 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항이 정해짐을 알 수 있다.

수열은 일반항으로 정의하기도 하지만 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하기도 하는데, 이와 같이 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

수열 $\{a_n\}$ 을

❶ 첫째항 a_1

❷ 두 항 a_n, a_{n+1} ($n=1, 2, 3, \dots$) 사이의 관계식

과 같이 귀납적으로 정의할 수 있다. 이때 ❷의 관계식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 대입하면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항을 구할 수 있다.

● **문제 1** $a_1=2, a_{n+1}=a_n+3n$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 를 구하시오.
(단, $n=1, 2, 3, \dots$)

일반적으로 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 귀납적 정의는

$$a_1=a, a_{n+1}=a_n+d \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이다. 또, 첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열의 귀납적 정의는

$$a_1=a, a_{n+1}=ra_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이다.

● **문제 2** 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{31} 을 구하시오.

(1) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+3 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(2) $a_1=2, a_{n+1}=5a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

● **예제 1** 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 을 구하시오.

$$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

풀이 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 관계식 $a_{n+1}=2a_n+1$ 에 차례대로 대입하면

$$a_2=2a_1+1=2+1$$

$$a_3=2a_2+1=2(2+1)+1=2^2+2+1$$

$$a_4=2a_3+1=2(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$$

$\vdots$

$$a_{10}=2a_9+1=2^9+2^8+\dots+2+1=\frac{2^{10}-1}{2-1}=1023$$

답 1023

● **문제 3** $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 을 구하시오.
(단, $n=1, 2, 3, \dots$)

실생활에서 수열의 귀납적 정의 찾아보기

명절 때 만난 친척들이나 모임에 참석한 사람들과 서로 악수하며 반갑게 인사를 나누는데, 악수하는 횟수는 사람 수가 많지 않아도 계산하는 것이 쉽지 않다. 이때 수열의 귀납적 정의를 이용하면 계산을 쉽게 할 수 있다.

어느 부부 동반 모임에 참석한 사람들은 서로 악수를 할 때 다음 규칙을 따른다고 한다.

- (가) 부부끼리는 악수하지 않는다.
- (나) 부부가 아닌 사람끼리는 반드시 악수한다.

n 쌍의 부부가 모인 모임에서 이루어진 악수의 총횟수를 a_n 이라 하자.

- (1) a_1 과 a_2 를 구해 보자.
- (2) n 쌍의 부부가 악수한 후 다른 한 쌍의 부부가 더 왔을 때 악수를 몇 번 더 하게 되는지 알아보고, a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구해 보자.



풀이 (1) 부부끼리는 악수하지 않으므로 $a_1=0$

두 쌍의 부부가 악수하는 횟수는 $a_2=4$

- (2) n 쌍의 부부가 악수한 횟수는 a_n 이고, 나중에 온 $(n+1)$ 번째 부부 2명은 먼저 와 있던 n 쌍의 부부 $2n$ 명과 각각 한 번씩 악수하게 되므로

$$a_{n+1} = a_n + 2 \times 2n = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

답 (1) $a_1=0, a_2=4$ (2) $a_{n+1}=a_n+4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

탐 구

어느 여행 동호회 모임에 참석한 회원이 모두 한 번씩 악수하였다. 이때 n 명의 회원이 모인 모임에서 이루어진 악수의 총횟수를 a_n 이라 하자.

- (1) n 명이 악수한 후 한 명의 회원이 더 왔을 때, a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구해 보자.
- (2) (1)의 결과를 이용하여 a_{10} 을 구해 보자.

02 수학적 귀납법

학습 목표

수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

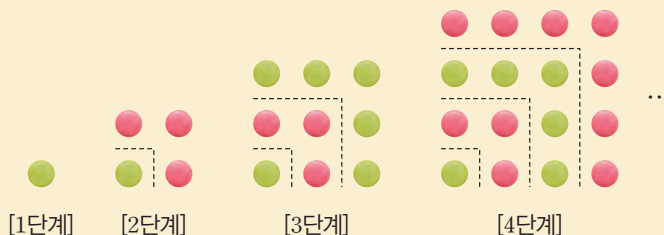
준비하기

다항식 $(1+a)^3$ 을 전개하시오.

수학적 귀납법

생각 열기

다음 그림은 각 단계별로 원판의 개수를 늘려 정사각형 모양으로 배열한 것이다.



① 위의 그림을 보고 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$1 = \square^2$$

$$1 + 3 = \square^2$$

$$1 + 3 + 5 = \square^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = \square^2$$

⋮

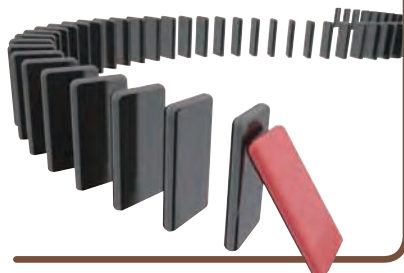
② ①을 이용하여 다음 등식에서 $\square$ 안에 알맞은 것을 추측해 보자.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = \square^2$$

다가 서기

도미노를 일정한 간격으로 세워 놓고 가장 앞에 있는 도미노를 쓰러뜨리면 나머지 도미노도 차례대로 쓰러지게 된다.

이러한 원리는 자연수와 관련된 명제의 증명에 유용하다.



위의 생각 열기에서

$$1 = 1^2, \quad 1 + 3 = 2^2, \quad 1 + 3 + 5 = 3^2, \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2, \quad \cdots$$

이므로 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 성립할 것으로 추측할 수 있다.

하지만 몇 개의 자연수에 대하여 ①이 성립한다고 해서 ①이 ‘모든 자연수 n 에 대하여 성립한다’고 할 수는 없다. 그렇다고 무수히 많은 자연수 하나하나에 대하여 ①이 성립하는 것을 일일이 확인하는 것도 불가능하다.

다음은 통해 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립함을 증명해 보자.

함께하기

다음은 등식

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변})=\square, (\text{우변})=\square$$

따라서 $n=1$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} &1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) \\ &= \{1+3+5+\cdots+(2k-1)\}+(2k+1) \\ &= \square+(2k+1) \\ &= \square \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.



● 페아노 (Peano, G., 1858 ~ 1932)

이탈리아의 수학자로 수학적 귀납법의 이론적 근거를 제시하였다.

위의 활동에서 (i), (ii)가 성립하므로 (i)에 의하여 $n=1$ 일 때 ①이 성립하고, (ii)에 의하여 다음을 알 수 있다.

$n=1$ 일 때 ①이 성립하므로 $n=2$ 일 때도 ①이 성립한다.

$n=2$ 일 때 ①이 성립하므로 $n=3$ 일 때도 ①이 성립한다.

$n=3$ 일 때 ①이 성립하므로 $n=4$ 일 때도 ①이 성립한다.

⋮

따라서 (i), (ii)가 성립하면 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립함을 알 수 있다.

자연수에 대한 어떤 명제가 참임을 증명하는 이와 같은 방법을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

수학적 귀납법

자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

예제 1 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \dots\dots ①$$

$n=1$ 일 때 성립함을
확인한다.



$n=k$ 일 때 성립한
다고 가정한다.



$n=k+1$ 일 때 성립
함을 보인다.

증명 (i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1^2 = 1, \quad (\text{우변}) = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k+1}{6} \{k(2k+1) + 6(k+1)\} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

문제 1 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$(1) 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(2) \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

한편, 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 m ($m \geq 2$ 인 자연수) 이상인 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=m$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq m$)일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

예제 2 $h > 0$ 일 때, $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$(1+h)^n > 1+nh \quad \dots\dots ①$$

증명 (i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2, \quad (\text{우변}) = 1+2h$$

이때 $h^2 > 0$ 이므로, $n=2$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 ①이 성립한다고 가정하면 $(1+h)^k > 1+kh$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} &= (1+h)(1+h)^k \\ &> (1+h)(1+kh) = 1+(k+1)h+kh^2 \\ &> 1+(k+1)h \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

② $k \geq 2, h^2 > 0$ 이므로
 $1+(k+1)h+kh^2$
 $> 1+(k+1)h$

문제 2 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}$$

생각
넓히기



문제 해결 | 추론 | 창의융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립하는지 알아보려고 한다.

활동 ① 다음 표를 완성해 보자.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
2^n								
n^2								

활동 ② $n \geq m$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 항상 성립하도록 하는 자연수 m 의 최솟값 m_0 을 추측해 보자.

활동 ③ $n \geq m_0$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명해 보자.

하노이의 탑과 수학적 귀납법

프랑스의 수학자 뤼카(Lucas, E., 1842~1891)는 1883년에 ‘하노이의 탑(Tower of Hanoi)’이라고 이름을 붙인 퍼즐을 소개했는데, 그 내용은 다음과 같다.

인도의 한 사원에는 세 개의 다이아몬드 기둥이 있다. 그중 한 개의 기둥에는 황금으로 만든 원판 64개가 끼워져 있다. 원판은 아래부터 크기가 큰 것에서 작은 것까지 차례대로 쌓여 있는데, 다음과 같은 규칙으로 원판을 옮겨 64개의 원판이 모두 다른 한 기둥으로 옮겨지는 최소 이동 횟수를 구하시오.

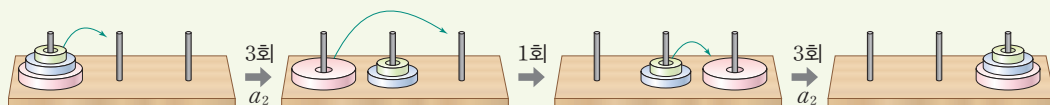
[규칙 1] 원판은 한 번에 한 개씩만 옮길 수 있다.

[규칙 2] 큰 원판이 작은 원판 위에 놓일 수 없다.

n 개의 원판을 모두 다른 한 기둥으로 옮기는 데 필요한 원판의 최소 이동 횟수를 a_n 이라 하면, 다음 그림에서 $a_1=1$, $a_2=2a_1+1=3$ 임을 알 수 있다.



같은 방법으로 다음 그림에서 $a_3=2a_2+1=7$ 임을 알 수 있다.



즉, $a_{n+1}=2a_n+1$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n=2^n-1 \quad \dots\dots ①$$

임을 수학적 귀납법으로 다음과 같이 확인할 수 있다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) $=a_1=1$, (우변) $=2^1-1=1$ 이므로 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면 $a_k=2^k-1$

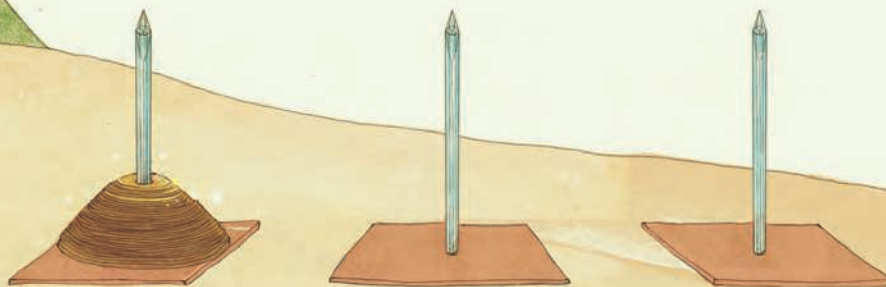
$n=k+1$ 일 때

$$a_{k+1}=2a_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

(출처: 앙드레 주에트, 『수의 비밀』)



중단원 마무리하기

● 수열의 귀납적 정의

- (1) 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

→ { 첫째항 a_1
두 항 a_n, a_{n+1} ($n=1, 2, 3, \dots$) 사이의 관계식

- (2) 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

- ① 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 귀납적 정의는

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- ② 첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열의 귀납적 정의는

$$a_1 = a, a_{n+1} = ra_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

● 수학적 귀납법

- (1) 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면,
 $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

- (2) 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 m ($m \geq 2$ 인 자연수) 이상인 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=m$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq m$)일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

기 본

- 01 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 를 구하시오.
(단, $n=1, 2, 3, \dots$)

(1) $a_1=2, a_{n+1}-a_n=5$

(2) $a_1=54, a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n$

(3) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+n+2$

(4) $a_1=0, a_{n+1}=a_n^2+1$

- 02 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$2+4+6+\dots+2n=n(n+1) \quad \dots\dots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(가)~(라)에 알맞은 것을 구하시오.

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \boxed{\text{가}}, (\text{우변}) = \boxed{\text{나}}$$

따라서 $n=1$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n = \boxed{\text{다}}$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$2+4+6+\dots+2k=k(k+1)$$

$n=k+1$ 일 때

$$2+4+6+\dots+2k+(2k+2)$$

$$= \boxed{\text{라}} + 2(k+1)$$

$$= (k+1)(k+2)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

03 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1=50, a_{n+1}-a_n=-3 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의될 때, $a_k=11$ 을 만족시키는 상수 k 의 값을 구하시오.

- 04 물 120 L가 들어 있는 어느 수족관에 매일 전날의 물의 $\frac{1}{3}$ 을 퍼내고 30 L의 물을 새로 넣는다. n 일 후 수족관에 남아 있는 물의 양을 a_n L라 할 때, a_1 을 구하고, a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 찾으시오.



- 05 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=100$ 이고

$$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+16 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이 성립할 때, a_{30} 을 구하시오. (단, $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$)

|서·술·형|

- 06 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

07 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{(n+3)!}{8} > 2^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가)~(라)에 알맞은 것을 구하시오.

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{4!}{8} = 3, \quad (\text{우변}) = \boxed{\text{가}}$$

따라서 $n=1$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\frac{(k+3)!}{8} > 2^k$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} \frac{(k+4)!}{8} &= (\boxed{\text{나}}) \times \frac{(k+3)!}{8} \\ &> (\boxed{\text{다}}) \times 2^k = k \times 2^k + 2^{k+2} \\ &> 2^{k+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=\boxed{\text{라}}$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

발 전

사고력+

08 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=1$, $a_{n+1}=9^n a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)으로 정의될 때, $\log_3 a_{10}$ 의 값을 구하시오.

|서·술·형|

09 다음을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

(1) 모든 자연수 n 에 대하여 $4^n - 1$ 은 3의 배수이다.

(2) $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ 이다.

01 ● ● ●

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{10}=16$, $a_{25}=91$ 일 때 a_5-a_3 의 값을 구하시오.

02 ● ● ●

제4항이 7, 제11항이 21인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은?

- ① 355 ② 370 ③ 385
④ 400 ⑤ 415

03 ● ● ●

첫째항이 31, 공차가 -5 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, S_n 의 최댓값을 구하시오.

04 ● ● ●

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1a_3a_8=27$ 일 때, a_4 를 구하시오.

05 ● ● ●

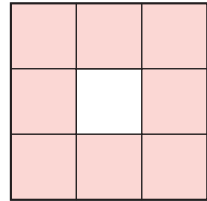
등비수열

$$2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_8, 32$$

에 대하여 $3\log_2 a_3$ 의 값을 구하시오.

06 ● ● ●

한 변의 길이가 3인 정사각형이 있다. 첫 번째 시행에서 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 9등분 하여 가운데 정사각형을 제거한다. 두 번째 시행에서는 남은 8개의 정사각형을 각각 9등분 하여 가운데 정사각형을 제거한다. 이와 같은 시행을 계속할 때, 12번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는?



- ① $\frac{8^{10}}{9^{10}}$ ② $\frac{8^{12}}{9^{11}}$ ③ $\frac{8^{12}}{9^{13}}$
④ $\frac{1}{9^{11}}$ ⑤ $\frac{1}{9^{12}}$

07 ● ● ●

세 수 $a, 5, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, 4, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.

08 ...

공비가 2, 제 n 항이 400인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 750일 때, n 의 값을 구하시오.

09 ...

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1=10$, $a_{20}=30$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{19} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{20} a_{k-1}$ 의 값을 구하시오.

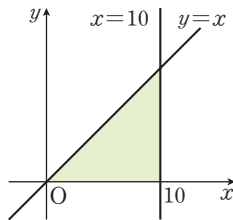
10 ...

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n + a_{n+1} = n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오.

11 ...

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x$ 와 $x=10$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분에 속한 점 중에서 x , y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수는?

(단, 경계선은 포함한다.)



- ① 30 ② 37 ③ 45
④ 55 ⑤ 66

12 ...

수열

$$1, \sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}-\sqrt{n-1}, \dots$$

의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$\sum_{k=1}^n S_k^4 = \frac{28(2n+1)}{3} \text{이다. } n \text{의 값은?}$$

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

13 ...

다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \dots + \frac{1}{20^2-1}$$

14 ...

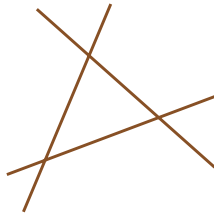
수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1=1, na_{n+1}=2(n+1)a_n \text{ (} n=1, 2, 3, \dots \text{)}$$

으로 정의될 때, a_6 을 구하시오.

15 ...

평면 위의 어느 두 직선도 평행하지 않고, 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않도록 n 개의 직선을 그을 때, 이 n 개의 직선으로 나누어지는 영역의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 오른쪽 그림에서 $a_3=7$ 이다. 이때 a_7 을 구하시오.



16 ...

다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $3^{2n}-1$ 이 8의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때 $3^2-1=8$ 은 8의 배수이다.

따라서 $n=1$ 일 때 $3^{2n}-1$ 은 8의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때 $3^{2k}-1$ 이 8의 배수라 가정하면

$$3^{2k}-1=8m \quad (m \text{은 자연수})$$

$$\text{이므로} \quad 3^{2k}=8m+1$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)}-1 &= \boxed{(가)} \times 3^{2k}-1 \\ &= \boxed{(나)} (9m+1) \end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 $3^{2n}-1$ 은 8의 배수이다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $3^{2n}-1$ 은 8의 배수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수의 합은?

- ① 11 ② 17 ③ 22
④ 27 ⑤ 36

17 ...

다음은 a, b 가 양수일 때, 2 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$(a+b)^n > a^n + b^n \quad \dots\dots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (가), (나)에 알맞은 것을 구하시오.

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변})=(a+b)^2, \quad (\text{우변})=a^2+b^2$$

이때 a, b 가 양수이므로

$$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab \boxed{(가)} 0$$

따라서 $n=2$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$(a+b)^k > a^k + b^k$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b) \\ &> (a^k+b^k)(a+b) \end{aligned}$$

이때 a, b 가 양수이므로

$$\begin{aligned} (a^k+b^k)(a+b) &= (a^{k+1}+b^{k+1}) \\ &= \boxed{(나)} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{즉,} \quad (a+b)^{k+1} > a^{k+1} + b^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 a, b 가 양수일 때, 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

18번부터 21번까지 서술형입니다.

18 ...

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열일 때,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{12}} + \sqrt{a_{13}}}$$

의 값을 구하시오.

19 ...

등비수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 8,$$

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20} = 24$$

일 때, $a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{30}$ 의 값을 구하시오.

20 ...

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 3k = 0$ 의 두 근을 α_k, β_k

라 할 때, $\sum_{k=3}^8 (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ 의 값을 구하시오.

(단, k 는 자연수이다.)

21 ...

수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

로 정의될 때, 다음에 답하시오.

(1) a_2, a_3, a_4 를 구하고, 일반항 a_n 을 추측해 보시오.

(2) (1)에서 추측한 일반항이 옳음을 수학적 귀납법으로 증명하시오.



정답을 맞힌 문항에 ○표하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02 03 07 18	등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.	○ △ ×	123~129쪽
04 05 06 07 08 19	등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.	○ △ ×	130~136쪽
09 10	□의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	○ △ ×	143~145쪽
11 12 13 20	여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.	○ △ ×	146~149쪽
14 15	수열의 귀납적 정의를 이해한다.	○ △ ×	156~157쪽
16 17 21	수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.	○ △ ×	158~161쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

수열의 숨은 규칙 찾기

영국의 수학자 콘웨이(Conway, J. H., 1937~)는 1986년에 발표한 논문에서 ‘본대로 읽는 수열(look-and-say sequence)’이라고 이름을 붙인 다음과 같은 수열을 소개하였다.

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ...

이 수열의 첫째항은 $a_1=1$ 이다. 그리고 a_n ($n \geq 2$)은 a_{n-1} 의 숫자의 종류와 개수에 따라 다음과 같이 정해진다.

$a_1=1$ 에서 1개의 1이 있으므로 (영어로 ‘one 1’이므로) $a_2=11$

$a_2=11$ 에서 2개의 1이 있으므로 (영어로 ‘two 1s’이므로) $a_3=21$

$a_3=21$ 에서 1개의 2, 1개의 1이 있으므로 (영어로 ‘one 2 one 1’이므로) $a_4=1211$

$a_4=1211$ 에서 1개의 1, 1개의 2, 2개의 1이 있으므로 (영어로 ‘one 1 one 2 two 1s’이므로)

$a_5=111221$

그런데 이러한 규칙을 갖는 수열의 일반항 a_n 을 구하기는 어렵다.

한편, 다음은 일명 ‘콘웨이의 1만 달러짜리 수열’이라고 불리는 것으로, 미국의 인지 과학자 호프스 테터(Hofstadter, D. R., 1945~)가 처음 발견했고 콘웨이가 많은 특성을 밝혀냈다.

1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, ...

이 수열의 규칙을 찾아보면 다음과 같다.

$a_1=1, a_2=1$ 로 정한다.

수열 ‘1, 1’에서 $a_2=1$ 이므로, a_3 은 앞에서 첫 번째 항 1과 뒤에서 첫 번째 항 1을 더한다.

→ $a_3=a_1+a_2=1+1=2$

수열 ‘1, 1, 2’에서 $a_3=2$ 이므로, a_4 는 앞에서 두 번째 항 1과 뒤에서 두 번째 항 1을 더한다.

→ $a_4=a_2+a_3=1+1=2$

수열 ‘1, 1, 2, 2’에서 $a_4=2$ 이므로, a_5 는 앞에서 두 번째 항 1과 뒤에서 두 번째 항 2를 더한다.

→ $a_5=a_2+a_4=1+2=3$

수열 ‘1, 1, 2, 2, 3’에서 $a_5=3$ 이므로, a_6 은 앞에서 세 번째 항 2와 뒤에서 세 번째 항 2를 더한다.

→ $a_6=a_3+a_5=2+2=4$

이상에서 $n \geq 3$ 일 때 $a_{n-1}=k$ 이면 수열의 일반항 a_n 은 제 k 항과 제 $n-k$ 항의 합으로 정해진다. 즉,

$$a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}} \quad (n \geq 3)$$

의 규칙을 찾을 수 있다.

(출처: 임백준, 『뉴욕의 프로그래머』)

1, 11, 21, 1211, ...

1, 1, 2, 2, 3, ...



자산관리와 등비수열의 합

자산관리사는 성장률과 물가 등의 거시 경제 전망은 물론 주가와 금리 등의 금융 시장 전반의 변수 등을 감안해 사람들이 가진 자산을 투자할 수 있도록 적절한 포트폴리오를 만들어 주는 일을 한다. 이렇게 만든 포트폴리오 모델과 개인의 성향을 고려해 최적의 투자 프로그램을 계획하는 역할을 하게 된다.

처음 통장을 만들고, 차곡차곡 저금하게 되면 ‘내가 원하는 금액이 언젠가 모이겠지.’하고 막연한 생각을 하게 된다. 하지만 자산관리는 다양한 목적을 위해 구체적으로 계획하는 것이 좋다. 즉, 결혼에 필요한 자금, 자녀 양육에 필요한 자금, 노후에 필요한 자금 등을 계획하고, 계획에 맞게 저금을 하는 것이 좋다.

예를 들어 10년 동안 일정한 금액을 투자하여 1억을 모으고자 하는 직장인이 매년 투자하는 금액을 계산할 때 등비수열이 사용된다.

이 직장인이 매년 투자하는 금액을 A 원, 연 수익률을 5% 로 가정하면

투자를 시작한 첫해의 A 원의 10년 후의 금액은	$A \times 1.05^{10}$ 원
투자를 시작한 2년 차의 A 원의 9년 후의 금액은	$A \times 1.05^9$ 원
투자를 시작한 3년 차의 A 원의 8년 후의 금액은	$A \times 1.05^8$ 원
⋮	
투자를 시작한 10년 차의 A 원의 1년 후의 금액은	$A \times 1.05$ 원

이 되므로

$$A \times 1.05^{10} + A \times 1.05^9 + A \times 1.05^8 + \cdots + A \times 1.05 = 10^8$$

이라는 등식을 세워서 매년 투자하는 금액을 정할 수 있다. 그 외에도, 매년 수령하는 연금의 액수, 연금을 일시금으로 받을 때의 금액 등도 등비수열의 합을 이용하여 계산할 수 있다.

이처럼 수학은 자신의 자산을 관리하고 계산할 때뿐만 아니라, 다양한 금융 상품을 개발할 때도 유용하게 쓰인다.

(출처: 매일경제 경제용어사전, 2016)



I 지수함수와 로그함수

1 지수와 로그

01 거듭제곱과 거듭제곱근

11~16쪽

준비하기 1 (1) $-0.7, 0.7$ (2) $-2, 2$

2 (1) 4 (2) 3

생각 열기 ① 2^{10} ② 10, 10, 10, 20

문제 1 (1) a^3b^7 (2) a^6b^3 (3) $\frac{a^7}{b^3}$

문제 2 (1) -2 (2) $-\sqrt{7}, \sqrt{7}$

함께하기 ① 직선 $y=a$ 와 두 함수 $y=x^2, y=x^4$ 의 그래프의 교점의 개수는

$a>0$ 일 때 2

$a=0$ 일 때 1

$a<0$ 일 때 0

또, 직선 $y=a$ 와 두 함수 $y=x^3, y=x^5$ 의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

② 예시 함수 $y=x^n$ 의 그래프에서 n 이 짝수일 때는 a 의 값에 따라 교점의 개수가 달라지지만, n 이 홀수일 때는 a 의 값에 관계없이 교점의 개수가 1이다.

문제 3 (1) 2 (2) 3 (3) -2 (4) $-\frac{1}{2}$

문제 4 $\sqrt[3]{16}m$

생각 토크 다르다.

문제 5 (1) 지수법칙에 의하여

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

이때 $\sqrt[n]{a}>0, \sqrt[n]{b}>0$ 에서 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}>0$ 이다.

따라서 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 는 $\frac{a}{b}$ 의 양의 n 제곱근이므로

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

(2) 지수법칙에 의하여

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

이때 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}>0$ 에서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ 는 a 의 양의 mn 제곱근이므로

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

문제 6 (1) 5 (2) 4 (3) 7 (4) 2

문제 7 (1) $-3\sqrt[3]{2}$ (2) $6\sqrt[4]{2}$ (3) $3\sqrt[4]{3}$ (4) $10\sqrt[3]{11}$

문제 8 $(-6)^4=6^4$ 이고, $\sqrt[n]{a}$ 에서 n 이 홀수이면 $\sqrt[n]{a}$ 의 부호는 a 의 부호와 일치하므로

$$\sqrt[4]{(-6)^4} + \sqrt[3]{-2^6} = \sqrt[4]{6^4} - 2^2 = 6 - 4 = 2$$

생각 넓히기 ① $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$ 이기 때문이다. ② 4번

02 지수의 확장

17~22쪽

준비하기 (1) 5 (2) 4 (3) 10 (4) 6

생각 열기 ① 10^6 배 ② 6, 3

문제 1 (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{16}{9}$ (4) $-\frac{1}{27}$

함께하기 $p+q, p+q, q, pq, pq$

문제 2 $m=-p, n=-q$ (p, q 는 양의 정수)라 하자.

$$\begin{aligned} (1) a^m \div a^n &= a^{-p} \div a^{-q} = \frac{1}{a^p} \div \frac{1}{a^q} = \frac{a^q}{a^p} \\ &= a^q \times a^{-p} = a^{q-p} \\ &= a^{-n+m} = a^{m-n} \end{aligned}$$

이것은 지수가 0일 때도 성립한다.

$$\begin{aligned} (2) (ab)^n &= (ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q b^q} \\ &= \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} = a^{-q} b^{-q} \\ &= a^n b^n \end{aligned}$$

이것은 지수가 0일 때도 성립한다.

문제 3 (1) 27 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{a^6}{b^4}$ (4) $\frac{a^9}{b}$

문제 4 (1) 8 (2) $\frac{1}{25}$ (3) 27 (4) $\frac{1}{4}$

함께하기 $mq, np, mq+np, mq+np, nq, mp, \frac{mp}{nq}$

문제 5 $r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q}$ (m, n, p, q 는 정수, $n \geq 2, q \geq 2$)

라 하자.

$$(1) a^r \div a^s = a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \div a^{\frac{np}{nq}} = \frac{nq \sqrt[nq]{a^{mq}}}{nq \sqrt[nq]{a^{np}}}$$

$$= nq \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

$$= a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{r-s}$$

$$(2) (ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m}$$

$$= \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$$

$$= a^r b^r$$

문제 6 (1) $\frac{1}{5}$ (2) 3 (3) 2 (4) $\frac{b}{a}$

문제 7 (1) b (2) $a-b$

문제 8 (1) 9 (2) a^3 (3) 25 (4) $\frac{1}{ab^2}$

생각 넓히기 소민, 지수가 유리수일 때의 지수법칙은 밑이 양수인 경우에만 성립하므로 $(-2)^6$ 을 먼저 계산한 후 그 값에 $\frac{1}{2}$ 제곱을 해야 한다.

03 로그

24~30쪽

준비하기 (1) 3 (2) $-\frac{3}{2}$

생각 열기 $2^x = 10$

문제 1 (1) $4 = \log_{\sqrt{3}} 9$ (2) $-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$

(3) $\frac{1}{3} = \log_8 2$

문제 2 (1) $2^0 = 1$ (2) $4^2 = 16$ (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$

문제 3 (1) 3 (2) -4 (3) -3 (4) $\frac{3}{2}$

문제 4 (1) $\frac{1}{64}$ (2) 25

문제 5 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 2

문제 6 (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$

문제 7 (1) $2b+2$ (2) $a-b-1$ (3) $a+\frac{b}{2}-1$

생각 열기 ① $\frac{3}{2}$

② $\frac{\log_2 64}{\log_2 16} = \frac{\log_4 64}{\log_4 16} = \frac{3}{2}$

이것은 ①의 결과와 같다.

문제 8 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 6

문제 9 (1) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$

(2) $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c a)$
 $= \frac{\log_a b}{\log_a a} \times \frac{\log_a c}{\log_a b} \times \frac{\log_a a}{\log_a c} = 1$

문제 10 (1) $\frac{a+b}{2a}$ (2) $\frac{a+2b}{1-a}$

생각 넓히기 ① $\log_c b, \log_c b, \log_c a, \log_b a, \log_b a$

② 81

탐구 & 융합

31쪽

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

04 상용로그

32~34쪽

준비하기 (1) 2 (2) -3

생각 열기 ① 6, 10^{-7} , 8, 10^{-9} ② 10^5 배

문제 1 (1) 3 (2) -4 (3) $\frac{5}{4}$ (4) $\frac{3}{2}$

문제 2 (1) 0.5717 (2) 0.7846

문제 3 (1) 1.7292 (2) -1.0214

문제 4 100광년

생각 넓히기 ① $(A \times 0.95^n) \text{ lx}$ ② 598.4 lx

탐구 & 융합

35쪽

탐구 ①

소리 유형	$I \text{ W/m}^2$	$\frac{I}{10^{-12}}$	$D \text{ dB}$
속삭이는 대화	10^{-10}	10^2	20
냉장고 또는 청소기 소리	10^{-8}	10^4	40
물건을 떨어뜨리는 소리	$10^{-6.5}$	$10^{5.5}$	55
망치질 소리	10^{-6}	10^6	60
전화벨 소리	10^{-5}	10^7	70
스피커 음악 소리	$10^{-3.5}$	$10^{8.5}$	85

주간	속삭이는 대화, 냉장고 또는 청소기 소리, 물건을 떨어뜨리는 소리
야간	속삭이는 대화, 냉장고 또는 청소기 소리

- 3 예시 실내용 슬리퍼를 착용한다. 소음 방지용 매트를 설치한다.

I -1 중단원 마무리하기

36~39쪽

01 (1) -5 (2) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

02 (1) 6 (2) 5 (3) 2 (4) 2

03 (1) 2 (2) 8 (3) 81 (4) 576

04 (1) 25 (2) 8 (3) $\frac{1}{10000}$ (4) $-\frac{2}{3}$

05 (1) -2 (2) 3 (3) 1 (4) -1

06 (1) $4\sqrt[3]{2}$ (2) $9\sqrt[3]{3}$ (3) -15 (4) $\frac{1}{2}$

07 $-1, -2, -3, -6$

08 (1) 7 (2) 18

09 49

10 2

11 해결과정 세 수를 정리하면

$$A = 3^{\log_3 27 - \log_3 18} = 3^{\log_3 \frac{27}{18}} = 3^{\log_3 \frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$B = \log_5 25 - \log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^2 - \log_5 \frac{1}{5^3} \\ = 2 - (-3) = 5 \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$C = \log_2 \{ \log_4 (\log_8 64) \} = \log_2 (\log_4 2) \\ = \log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad \blacktriangleright 30\%$$

답구하기 따라서 $C < A < B$ 이므로 가장 큰 수는 B이다. ▶ 10%

12 1

13 (1) $2a+b$ (2) $3b-a$ (3) $\frac{3a+2b}{a+b}$ (4) $\frac{2b-4a}{b}$

14 (1) 5.73 (2) 5730

15 (1) 2,6749 (2) 0.0473

16 $4^{\frac{1}{a}} = 1000$ 에서 $4 = 1000^a$ ①

$25^{\frac{1}{b}} = 1000$ 에서 $25 = 1000^b$ ②

① × ②를 하면

$$100 = 1000^a \times 1000^b = 1000^{a+b}$$

즉, $10^2 = 10^{3(a+b)}$ 이므로

$$3(a+b) = 2, \quad a+b = \frac{2}{3}$$

$$17 \quad \frac{2}{1-a^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{8}}} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{1+a} \\ = \frac{4}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{1+a} \\ = \frac{8}{1-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{1+a} \\ = \frac{16}{1-a} + \frac{16}{1+a} = \frac{32}{1-a^2} \\ = \frac{32}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 64$$

18 $3^a = k^c$ 에서 $3 = k^{\frac{c}{a}}$ ①

$5^b = k^c$ 에서 $5 = k^{\frac{c}{b}}$ ②

① × ②를 하면

$$15 = k^{\frac{c}{a}} k^{\frac{c}{b}} = k^{\frac{bc+ca}{ab}}$$

이때 $ab = bc + ca$ 이므로

$$\frac{bc+ca}{ab} = \frac{ab}{ab} = 1$$

따라서 $k = 15$ 이다.

19 해결과정 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 2, \quad \log_2 a \times \log_2 b = -7$$

▶ 40%

답구하기 $\log_a b + \log_b a = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ = \frac{(\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ = \frac{2^2 - 2 \times (-7)}{-7} \\ = -\frac{18}{7} \quad \blacktriangleright 60\%$

20 $10 \log \frac{63}{200} = 10 \log 0.315$

상용로그표에서 $\log 3.15 = 0.4983$ 이므로

$$\begin{aligned} 10 \log 0.315 &= 10 \log (3.15 \times 10^{-1}) \\ &= 10 (\log 3.15 + \log 10^{-1}) \\ &= 10 (0.4983 - 1) \\ &= -5.017 \end{aligned}$$

따라서 구하는 벽의 전파 감쇠비는 -5.017 dB이다.

2 지수함수와 로그함수

01 지수함수와 로그함수

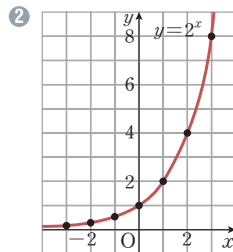
41~48쪽

준비하기 1 $y = (x-2)^2 + 1$ 2 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

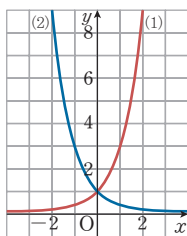
생각 열기 ① 4, 8, 16, 32, 64

② $y = 2^x$

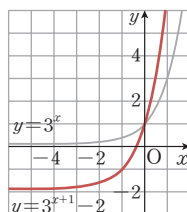
함께하기 ① $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$



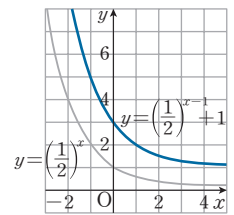
문제 1



문제 2 (1) 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $y = -2$ 이다.

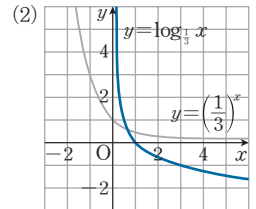
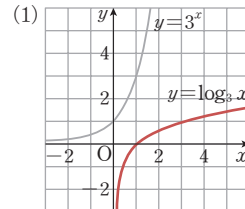


(2) 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $y = 1$ 이다.



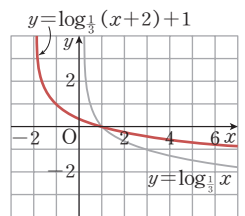
생각특통 지수함수와 로그함수는 서로 역함수 관계에 있으므로 지수함수의 정의역이 로그함수의 치역이고, 지수함수의 치역이 로그함수의 정의역이다.

문제 3

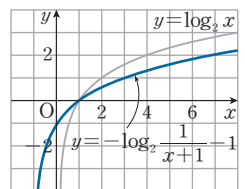


문제 4

(1) 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $x = -2$ 이다.



(2) 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $x = -1$ 이다.



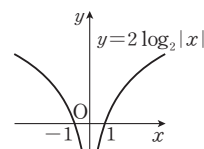
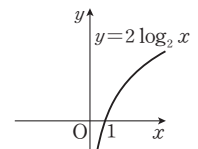
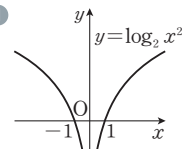
문제 5 (1) $\sqrt[4]{9} > \sqrt[5]{3}$ (2) $\sqrt[9]{0.5^{10}} < \sqrt[10]{0.5^9}$

문제 6 (1) $2 \log_3 \sqrt{15} < 4 \log_3 2$

(2) $\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{5}} 64 > 3 \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}$

문제 7 최댓값: -2 , 최솟값: -4

생각 넓히기 ①



② 명진이의 주장만 옳다.

준비하기 (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $-3 \leq x \leq 5$

생각 열기 ① 1 ② 3

문제 1 (1) $x=4$ (2) $x=10$ (3) $x=4$ (4) $x=\frac{3}{4}$

문제 2 (1) $x \geq -7$ (2) $x < 4$

문제 3 6

문제 4 350시간

생각 열기 ① 1 ② 4

문제 5 (1) $x=2$ (2) $x=5$

문제 6 (1) $1 < x < 10$ (2) $x \geq 3$

문제 7 10초

생각 넓히기 ① (1) $X^2 - 3X - 4 = 0$ (2) $X=4, x=2$
② $x = \frac{1}{4}$ 또는 $x=16$

탐구 & 융합

55쪽

탐구 ① $f(n) = 21 \times 0.99^n$ ② 16번째

I -2 중단원 마무리하기

56~59쪽

01 (1) $\sqrt[4]{3^3} < \sqrt[3]{3^4}$ (2) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$
(3) $\log_4 25 > \log_4 12$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{11}{5} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{2}$

02 (1) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{16}$ (2) 최댓값: 1, 최솟값: 0

03 (1) $x=8$ (2) $x=-3$ 또는 $x=1$
(3) $x=-\frac{3}{2}$ (4) $x=\sqrt{2}$

04 (1) $x \geq 3$ (2) $x < 2$
(3) $-3 < x < 1$ (4) $0 < x \leq \frac{1}{8}$

05 $\neg, \cup, \cap$ 06 $p=-2, q=\frac{5}{2}$

07 (4, 1) 08 $a=2, b=1$

09 $a=2, b=3$ 10 6

11 (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt[4]{16} < (\sqrt[3]{4})^2$
(2) $2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} < -2 \log_{\frac{1}{2}} 4 < 3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$

12 (1) 최댓값: 243, 최솟값: $\frac{1}{81}$
(2) 최댓값: -2 , 최솟값: -3

13 **해결 과정** 방정식 $|5^x - 25| = k$ 에서
 $5^x - 25 = -k$ 또는 $5^x - 25 = k$
 $5^x = 25 - k$ 또는 $5^x = 25 + k$ ▶ 40 %
이때 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로
 $25 - k > 0, 25 + k > 0, k > 0$ ▶ 40 %
답 구하기 $0 < k < 25$ ▶ 20 %

14 $2 < a < 8$ 15 7주

16 10

17 $\neg. \left(\frac{1}{2}\right)^d = c$
 $\cup. \neg$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^d = 2^{-d} = c$
또, $\log_2 e = d$ 이므로 $e = 2^d$
따라서 $ce = 2^{-d} \times 2^d = 2^0 = 1$
 $\cap. \left(\frac{1}{2}\right)^a = 2^{-a} = e$
 $\cup$ 에서 $e = 2^d$ 이므로 $2^{-a} = 2^d$
즉, $-a = d$ 이므로 $a + d = 0$
이상에서 $\neg, \cup, \cap$ 모두 옳다.

18 **해결 과정** 주어진 함수를 변형하면
 $y = 2^{\log x} x^{\log 2} + 2 \times 2^{\log 100x}$
 $= (2^{\log x})^2 + 2 \times 2^{2 + \log x}$
 $= (2^{\log x})^2 + 8 \times 2^{\log x} \dots\dots ①$ ▶ 40 %
이때 $2^{\log x} = X$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 100$ 이므로
 $1 \leq X \leq 4$ ▶ 20 %

답 구하기 ①에서
 $y = X^2 + 8X = (X+4)^2 - 16$
이므로 주어진 함수는 $X=1$ 일 때 최솟값 9, $X=4$ 일 때 최댓값 48을 갖는다. ▶ 40 %

19 실험을 시작한 지 10초 후에 200°C , 20초 후에 202°C 이므로
 $K = \frac{C(\log 20 - \log 10)}{202 - 200} = \frac{C \log 2}{2} \dots\dots ①$

또, 실험을 시작한 지 10초 후에 200 °C, x 초 후에 206 °C이므로

$$K = \frac{C(\log x - \log 10)}{206 - 200} = \frac{C(\log x - 1)}{6} \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $\frac{\log 2}{2} = \frac{\log x - 1}{6}$

$$\log x - 1 = 3 \log 2$$

$$\log x = 1 + 3 \log 2 = \log 80$$

$$x = 80$$

따라서 206 °C가 되는 것은 80초 후이다.

I 대단원 평가하기

60~63쪽

01 3

02 ②

03 $\frac{13}{3}$

04 $\frac{1}{2}$

05 $x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned} x^3 &= \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \\ &= 2 + 2^{-1} + 3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right) \\ &= 3x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

즉, $x^3 - 3x = \frac{5}{2}$ 이므로

$$2x^3 - 6x - 4 = 2(x^3 - 3x) - 4 = 2 \times \frac{5}{2} - 4 = 1$$

따라서 구하는 값은 ①이다.

06 $\log_3 7$

07 $-2 < a < 6$

08 16

09 30

10 ⑤

11 $b = ac$

12 ㄱ, ㄴ, ㄷ

13 2

14 ㄱ, ㄴ, ㄹ

15 -3

16 8

17 ⑤

18 ③

19 4

20 $-2 < x < 1$

21 올해 기업의 자기 자본을 A 원이라 하면 n 년 후의 부채는

$$3A \left(1 - \frac{10}{100}\right)^n = 3A \times 0.9^n \text{ (원)}$$

n 년 후의 자기 자본은

$$A \left(1 + \frac{20}{100}\right)^n = A \times 1.2^n \text{ (원)}$$

이때 자기 자본이 부채보다 많아지려면

$$3A \times 0.9^n < A \times 1.2^n, \quad 3 \times 0.9^n < 1.2^n$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3 + n \log 0.9 < n \log 1.2$$

$$n(\log 1.2 - \log 0.9) > \log 3$$

$$n \log \frac{4}{3} > \log 3$$

$$n(2 \log 2 - \log 3) > \log 3$$

$$n > \frac{\log 3}{2 \log 2 - \log 3}$$

이때 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 이므로

$$n > \frac{0.4771}{2 \times 0.3010 - 0.4771} = \frac{0.4771}{0.1249} = 3. \times \times \times$$

따라서 자기 자본이 처음으로 부채보다 많아지는 해는 올해로부터 4년 후이다.

22 **해결 과정** $3^x = 4^y = 12^z = k (k > 0)$ 라 하면

$$3^x = k \text{에서} \quad 3 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots ①$$

$$4^y = k \text{에서} \quad 4 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots ②$$

$$12^z = k \text{에서} \quad 12 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots ③$$

▶ 30 %

답 구하기 ① $\times$ ② $\div$ ③을 하면

$$k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} = 3 \times 4 \div 12 = 1$$

▶ 40 %

이므로 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$

▶ 30 %

23 **해결 과정** $a^4 b^2 = 1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^4 b^2 = \log_a 1, \quad \log_a a^4 + \log_a b^2 = 0$$

$$4 + 2 \log_a b = 0$$

$$\log_a b = -2$$

▶ 60 %

답 구하기 $\log_a a^3 b = \log_a a^3 + \log_a b$

$$= 3 + \log_a b$$

$$= 3 - 2$$

$$= 1$$

▶ 40 %

- 24 (1) 점 A의 x 좌표를 a 라 하면 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2$ 이므로
 $A(a, 2\log_2 a)$, $B(a+2, 2\log_2 a)$
 $C(a+2, 2\log_2(a+2))$ ▶ 20 %
 이때 점 C는 함수 $y=2\log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2\log_2 a + 2 = 2\log_2(a+2)$$

$$\log_2 4a^2 = \log_2(a+2)^2$$

$$4a^2 = a^2 + 4a + 4$$

$$3a^2 - 4a - 4 = 0$$

$$(3a+2)(a-2) = 0$$

$$a = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$a = 2$$
 ▶ 20 %

따라서 두 점 A, B의 x 좌표는 각각 2, 4이다. ▶ 10 %

(2) A(2, 2), B(4, 2), C(4, 4), D(5, 4)이므로

$$\square ABCD = \triangle ABC + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1$$

$$= 2 + 1$$

$$= 3$$
 ▶ 50 %

- 25 **문제 이해** 주어진 이차방정식에서

$$\log a + 3 \neq 0$$

$$a \neq \frac{1}{1000} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

해결 과정 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\log a + 1)^2 - (\log a + 3) \geq 0$$

$$(\log a)^2 + \log a - 2 \geq 0$$
 ▶ 40 %

$\log a = X$ 라 하면

$$X^2 + X - 2 \geq 0$$

$$(X+2)(X-1) \geq 0$$

$$X \leq -2 \text{ 또는 } X \geq 1$$
 ▶ 30 %

즉, $\log a \leq -2$ 또는 $\log a \geq 1$ 이므로

$$a \leq \frac{1}{100} \text{ 또는 } a \geq 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편, 진수의 조건에서

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 구하기 ①, ②, ③에서

$$0 < a < \frac{1}{1000} \text{ 또는 } \frac{1}{1000} < a \leq \frac{1}{100}$$

$$\text{또는 } a \geq 10$$
 ▶ 30 %

II 삼각함수

1 삼각함수

01 일반각과 호도법

69~73쪽

준비하기 호의 길이: $\frac{4}{3}\pi$ cm, 넓이: $\frac{8}{3}\pi$ cm²

생각 열기 ① 시곗바늘이 도는 방향으로 60°만큼 회전시켜야 한다.

② 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 120°만큼 회전시켜야 한다.

문제 1 (1) $360^\circ \times n + 20^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 250^\circ$
 (3) $360^\circ \times n + 70^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 100^\circ$

생각특독 좌표축 위에 있다.

문제 2 (1) 제 3 사분면 (2) 제 2 사분면
 (3) 제 4 사분면 (4) 제 1 사분면

문제 3 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $-\frac{3}{4}\pi$ (3) 90° (4) -120°

문제 4 (1) $2n\pi + \pi$ (2) $2n\pi + \frac{3}{2}\pi$
 (3) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (4) $2n\pi + \frac{4}{5}\pi$

함께하기 ① $l = r\theta$ ② $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ ③ $S = \frac{1}{2}rl$

문제 5 호의 길이: 2π , 넓이: 6π

문제 6 반지름의 길이: 4, 중심각의 크기: $\frac{\pi}{4}$

생각 넓히기 (1) $\frac{29}{180}\pi$ (2) $\frac{7250}{9}\pi$ m²

02 삼각함수

74~79쪽

준비하기 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

생각 열기

	$\triangle ABC$	$\triangle ADE$
① $\sin \theta$	$\frac{a}{c}$	$\frac{a}{c}$
② $\cos \theta$	$\frac{b}{c}$	$\frac{b}{c}$
③ $\tan \theta$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$

문제 1 $\sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

문제 2 (1) $\sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}, \cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 (2) $\sin \frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \frac{7}{4}\pi = -1$
 (3) $\sin 420^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 420^\circ = \frac{1}{2}, \tan 420^\circ = \sqrt{3}$

함께하기

①

사분면 삼각함수	제1사 분면	제2사 분면	제3사 분면	제4사 분면
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-

② $\sin \theta$: 제1사분면, 제2사분면
 $\cos \theta$: 제1사분면, 제4사분면
 $\tan \theta$: 제1사분면, 제3사분면

문제 3 (1) $\sin 200^\circ < 0, \cos 200^\circ < 0, \tan 200^\circ > 0$
 (2) $\sin 430^\circ > 0, \cos 430^\circ > 0, \tan 430^\circ > 0$
 (3) $\sin \frac{11}{6}\pi < 0, \cos \frac{11}{6}\pi > 0, \tan \frac{11}{6}\pi < 0$
 (4) $\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) > 0, \cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) < 0, \tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) < 0$

문제 4 (1) 제1사분면 또는 제3사분면
 (2) 제2사분면 또는 제3사분면

문제 5 $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = -2\sqrt{2}$

문제 6 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

탐구 & 융합

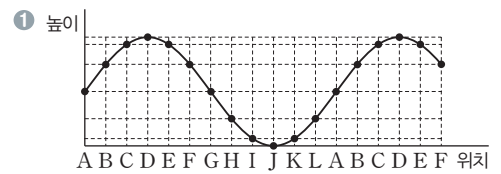
탐구 ① $\frac{1}{2}$ ② 2.1

03 삼각함수의 그래프

81~90쪽

준비하기 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1

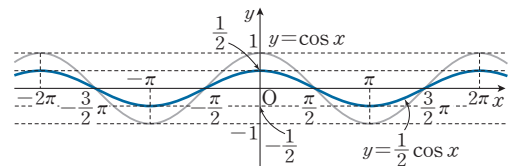
생각 열기



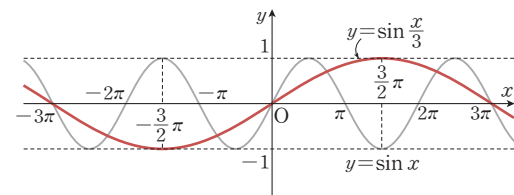
② 예시 매끄러운 곡선 모양, 일정한 규칙이 있는 모양, 파동 모양

생각특통 $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 모두 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

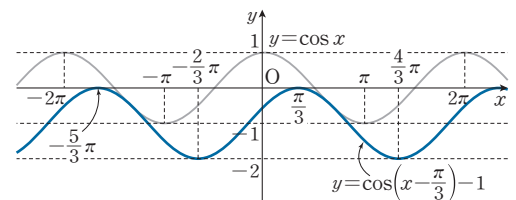
문제 1 치역: $\left\{y \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$, 주기: 2π



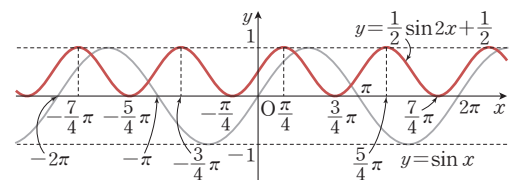
문제 2 치역: $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$, 주기: 6π



문제 3 (1) 치역: $\{y \mid -2 \leq y \leq 0\}$, 주기: 2π

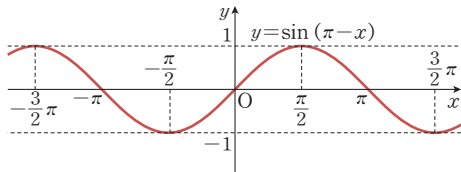


(2) 치역: $\{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$, 주기: π



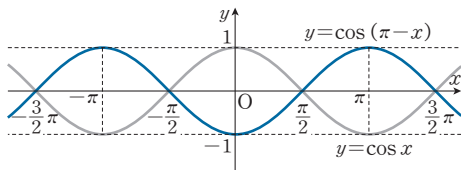
문제4 (1) $y = \sin(\pi - x) = \sin\{-(x - \pi)\}$ 이므로
 $y = \sin(\pi - x)$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프
 를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로
 π 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y = \sin(\pi - x)$ 의 그래프와 $y = \sin x$ 의
 그래프가 일치하므로 모든 실수 x 에 대하여
 $\sin(\pi - x) = \sin x$ 가 성립한다.

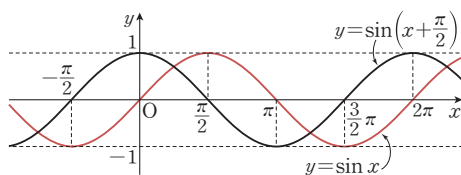


(2) $y = \cos(\pi - x) = \cos\{-(x - \pi)\}$ 이므로
 $y = \cos(\pi - x)$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프
 를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로
 π 만큼 평행이동한 것이다.

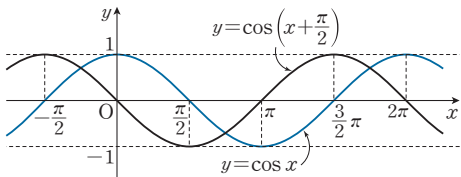
이때 $y = \cos(\pi - x)$ 의 그래프와 $y = -\cos x$ 의
 그래프가 일치하므로 모든 실수 x 에 대하여
 $\cos(\pi - x) = -\cos x$ 가 성립한다.



함께하기 ① $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 다음 그림과 같
 으므로 $y = \cos x$ 의 그래프와 일치한다.



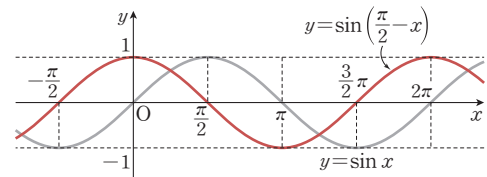
② $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 다음 그림과 같
 으므로 $y = -\sin x$ 의 그래프와 일치한다.



문제5 (1) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left\{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ 이므로

$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래
 프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으
 로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

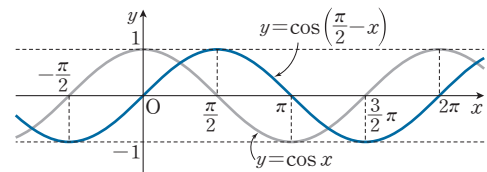
이때 $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 의 그래프와 $y = \cos x$ 의
 그래프가 일치하므로 모든 실수 x 에 대하여
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ 가 성립한다.



(2) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left\{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ 이므로

$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래
 프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으
 로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

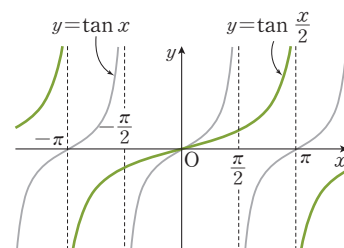
이때 $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 의 그래프와 $y = \sin x$ 의
 그래프가 일치하므로 모든 실수 x 에 대하여
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ 가 성립한다.



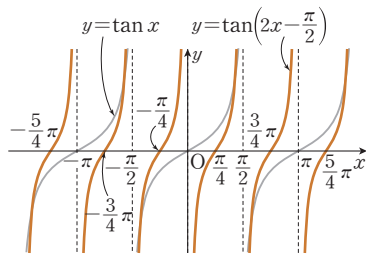
문제6 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

생각톡톡 갖지 않는다.

문제7 (1) 주기: 2π , 점근선: $x = (2n + 1)\pi$ (n 은 정수)



(2) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 점근선: $x = \frac{n}{2}\pi$ (n 은 정수)



문제 8 (1) 0.5736 (2) -0.9903 (3) -3.7321

문제 9 (1) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$ (2) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$

문제 10 (1) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

(2) $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{7}{4}\pi$

공학적 도구

91쪽

확인 ① 함수 $y = a \sin(bx + c) + d$ 에서 a 의 값이 달라지면 최댓값과 최솟값의 차가 달라지고, b 의 값이 달라지면 주기가 달라진다. 또, c, d 의 값이 달라지면 그래프가 각각 x 축의 방향, y 축의 방향으로 평행이동한다.

② 생략

③ (1) 주기: 2π , 최댓값: -1, 최솟값: -5

(2) 주기: $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값: 6, 최솟값: 4

(3) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 최댓값과 최솟값은 없다.

II -1 중단원 마무리하기

92~95쪽

01 (1) $360^\circ \times n + 320^\circ$, 제 4 사분면

(2) $2n\pi + \frac{\pi}{6}$, 제 1 사분면

02 10π

03 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) -1

04 $\sqrt{2}$

05 -1

06 $\frac{2}{3}\pi$

07 $960\pi \text{ cm}^2$

08 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

09 (1) 제 4 사분면 (2) 제 2 사분면

10 (1) $-\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

11 문제 이해 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

▶ 30 %

해결 과정 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{2}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

▶ 40 %

답 구하기 따라서 구하는 값은

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 4$$

▶ 30 %

12 (1) 주기: 2π , 최댓값: 3, 최솟값: -3

(2) 주기: 8π , 최댓값: 3, 최솟값: -1

13 약 3°

14 (1) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(2) $x = 0$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

15 (1) $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ (2) $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

16 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 16이므로

$$2r + l = 16$$

즉, $l = 16 - 2r$ 이므로 부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(16 - 2r)$$

$$= -r^2 + 8r$$

$$= -(r - 4)^2 + 16 \quad (0 < r < 8)$$

따라서 S 는 $r = 4$ 일 때 최댓값 16을 가지므로 구하는 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \theta = 16, \quad \theta = 2$$

- 17 **문제 이해** 주어진 그래프에서 $y = a \cos b(x-c) + d$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 -1 이고, 주기는

$$\frac{15}{8}\pi - \left(-\frac{5}{8}\pi\right) = \frac{5}{2}\pi \quad \blacktriangleright 10\%$$

해결 과정 $y = a \cos b(x-c) + d$ 의 최댓값이 $a+d$, 최솟값이 $-a+d$ 이므로

$$a+d=3, \quad -a+d=-1$$

$$a=2, d=1 \quad \blacktriangleright 30\%$$

또, 주기가 $\frac{5}{2}\pi$ 이고, $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{5}{2}\pi, \quad b = \frac{4}{5} \quad \blacktriangleright 20\%$$

$y = 2 \cos \frac{4}{5}(x-c) + 1$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$2 \cos\left(-\frac{4}{5}c\right) + 1 = 1$$

$$\cos\left(-\frac{4}{5}c\right) = 0, \quad \cos \frac{4}{5}c = 0$$

따라서 $\frac{4}{5}c = \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{5}c = \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$c = \frac{5}{8}\pi \text{ 또는 } c = -\frac{15}{8}\pi$$

그런데 $0 < c < \pi$ 이므로 $c = \frac{5}{8}\pi \quad \blacktriangleright 30\%$

답 구하기 $a=2, b=\frac{4}{5}, c=\frac{5}{8}\pi, d=1$ 이므로

$$abcd = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{8}\pi \times 1 = \pi \quad \blacktriangleright 10\%$$

- 18 이차방정식 $x^2 - ax - a^2 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = a, \quad \sin \theta \cos \theta = -a^2$$

$\sin \theta + \cos \theta = a$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = a^2$$

$$1 - 2a^2 = a^2, \quad a^2 = \frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 상수 a 의 값은 $-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

- 19 $\sin(90^\circ - \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ 이므로

$$\sin 89^\circ = \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\sin 88^\circ = \sin(90^\circ - 2^\circ) = \cos 2^\circ$$

$$\sin 87^\circ = \sin(90^\circ - 3^\circ) = \cos 3^\circ$$

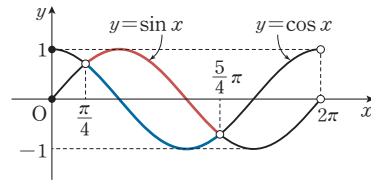
:

$$\sin 46^\circ = \sin(90^\circ - 44^\circ) = \cos 44^\circ$$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} & \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) \\ & \quad + (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) \\ & \quad + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) \\ & \quad + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2} \end{aligned}$$

- 20 부등식 $\cos x < \sin x$ 의 해는 $y = \sin x$ 의 그래프가 $y = \cos x$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위와 같다.



따라서 위의 그림에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$$

2 삼각함수의 활용

01 사인법칙

97~101 쪽

준비하기 4

생각 열기 ① 4 ② 20

문제 1 (1) $25\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{3}$

문제 2 30° 또는 150°

문제 3 $\frac{12\sqrt{3}}{7}$

함께하기 ① $\sin A' = \frac{a}{2R}$

② 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같기 때문이다.

③ $2R = \frac{a}{\sin A}$

문제 4 (1) $3\sqrt{6}$ (2) 30° (3) $\sqrt{3}$

문제 5 (1) $a=b$ 인 이등변삼각형
(2) $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

문제 6 $10\sqrt{6}$ m

생각 넓히기 ① (1) $b=2R \sin B$ (2) $c=2R \sin C$

$$\begin{aligned} (3) S &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 2R \sin B \times 2R \sin C \times \sin A \\ &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

② 예시 $S = \frac{abc}{4R}$

02 코사인법칙

102~106쪽

준비하기 $a^2 + b^2 = c^2$

생각 열기 ① $\overline{AH} = 4\sqrt{3}$ km, $\overline{BH} = 4$ km, $\overline{CH} = 6$ km

② $2\sqrt{21}$ km

함께하기 ① $\overline{AH} = b \sin C$ ② $\overline{BH} = a - b \cos C$

$$\begin{aligned} ③ c^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= (a - b \cos C)^2 + (b \sin C)^2 \\ &= a^2 - 2ab \cos C + b^2(\cos^2 C + \sin^2 C) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

문제 1 (1) 14 (2) 45°

문제 2 (1) $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

(2) $b=c$ 인 이등변삼각형

생각 톡톡 삼각형의 한 내각의 크기는 항상 0° 보다 크고 180° 보다 작기 때문이다.

문제 3 $14\sqrt{3}$

문제 4 130 m

생각 넓히기 ① $\overline{AC} = \sqrt{3}x$ m, $\overline{BC} = x$ m

② $x^2 - 10000 = 0$

③ 100 m

탐구 & 융합

107쪽

탐구 ① 생략 ② 생략

II -2 중단원 마무리하기

108~111쪽

01 (1) 20 (2) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ 02 3

03 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) $2\sqrt{3}$ 04 $\frac{1}{6}$

05 60° 06 3

07 $6\sqrt{2}$ 08 $40\sqrt{6}$ m

09 $-\sqrt{3}$

10 해결 과정 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

이므로 $a : b : c = 4 : 5 : 6$ ▶ 50 %

답 구하기 따라서 $a=4k$, $b=5k$, $c=6k$ ($k>0$)라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(5k)^2 + (6k)^2 - (4k)^2}{2 \times 5k \times 6k} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

▶ 50 %

11 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

12 (1) $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

(2) $b=c$ 인 이등변삼각형 또는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

13 $20\sqrt{7}$ m

14 주어진 $\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면

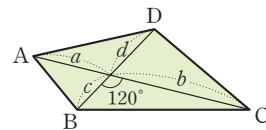
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \sin A = 6 \sin A$$

선분 DE 가 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하므로 $\triangle ADE$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}S$ 이다. 즉,

$$\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AE} \times \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \sin A$$

이므로 $\overline{AD} \times \overline{AE} = 6$

15 $\square ABCD$ 의 넓이를 S 라 하자.



위의 그림에서

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ac \sin(180^\circ - 120^\circ) + \frac{1}{2}bc \sin 120^\circ \\
&\quad + \frac{1}{2}bd \sin(180^\circ - 120^\circ) + \frac{1}{2}ad \sin 120^\circ \\
&= \frac{1}{2}ac \sin 120^\circ + \frac{1}{2}bc \sin 120^\circ \\
&\quad + \frac{1}{2}bd \sin 120^\circ + \frac{1}{2}ad \sin 120^\circ \\
&= \frac{1}{2}c(a+b) \sin 120^\circ + \frac{1}{2}d(a+b) \sin 120^\circ \\
&= \frac{1}{2}(a+b)(c+d) \sin 120^\circ \\
&= \frac{1}{2}pq \sin 120^\circ
\end{aligned}$$

□ABCD의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이므로 $\frac{1}{2}pq \sin 120^\circ = 2\sqrt{3}$ 에서

$$\frac{1}{2}pq \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad pq = 8$$

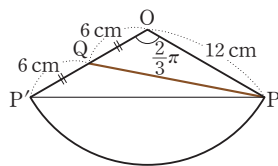
이때 $p+q=6$ 이므로

$$p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 6^2 - 2 \times 8 = 20$$

- 16 **문제이해** 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 옆면인 부채꼴의 호의 길이가 같으므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$2\pi \times 4 = 12\theta, \quad \theta = \frac{2}{3}\pi \quad \blacktriangleright 30\%$$

해결과정 감은 실의 길이의 최솟값은 오른쪽 그림에서 $\overline{PQ}$ 의 길이와 같다.



$\overline{PQ} = x$ cm라 하면

△OPQ에서 코사인법칙에 의하여

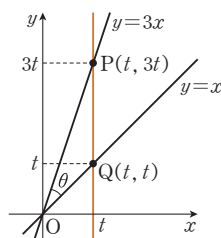
$$x^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \times 6 \times 12 \times \cos \frac{2}{3}\pi = 252$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 6\sqrt{7}$ $\blacktriangleright 60\%$

답구하기 따라서 감은 실의 길이의 최솟값은 $6\sqrt{7}$ cm이다. $\blacktriangleright 10\%$

- 17 오른쪽 그림과 같이 x 축에 수직인 직선 $x=t$ 를 그리고 직선 $y=3x$ 와의 교점을 $P(t, 3t)$, 직선 $y=x$ 와의 교점을 $Q(t, t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
\overline{OP} &= \sqrt{t^2 + (3t)^2} \\
&= \sqrt{10}t
\end{aligned}$$



$$\overline{OQ} = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}t$$

$$\overline{PQ} = 2t$$

△OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{10t^2 + 2t^2 - 4t^2}{2 \times \sqrt{10}t \times \sqrt{2}t} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- 18 $\overline{BC} = x$ 라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \times 8 \times 12 \times \cos 60^\circ = 112$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 4\sqrt{7}$

원 O의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = 2R, \quad R = \frac{4\sqrt{21}}{3}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times \left(\frac{4\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{112}{3}\pi$

II 대단원 평가하기

112~115쪽

01 ⑤

02 14π

03 $-\frac{2}{5}$

04 $-3 \tan \theta$

05 $-\frac{7}{5}$

06 $\frac{1}{\cos \theta}$

07 $-\frac{3}{4}$

08 4

09 1

10 5

11 ④

12 3π

13 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

14 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3}{4}\pi$

15 π

16 $8\sqrt{2}$

17 $(1500\sqrt{7} + 2400) \text{ m}^2$

18 3

19 75°

20 $4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$

- 21 $\overline{AD}$ 가 각 A를 이등분하고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 4 : 6 = 2 : 3$ 이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 2 : 3$$

$\angle BAD = \angle CAD = \theta$, $\overline{BD} = 2k$, $\overline{CD} = 3k$ ($k > 0$)라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 3^2 - (2k)^2}{2 \times 4 \times 3} = \frac{6^2 + 3^2 - (3k)^2}{2 \times 6 \times 3}$$

$$k^2 = \frac{5}{2}$$

그런데 k 는 양수이므로 $k = \frac{\sqrt{10}}{2}$

따라서 $\overline{BD} = 2k = \sqrt{10}$

22 $\triangle ABC$ 의 넓이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 B 의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin \theta = 4\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } \cos \theta = \frac{1}{3}$$

그런데 θ 는 예각이므로 $\cos \theta = \frac{1}{3}$

$\overline{AC} = x$ 라 하면 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos \theta$$

$$= 25 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{3}$$

$$= 17$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = \sqrt{17}$

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 각의 크기의 합은 π 이므로 $\triangle ACD$ 에서

$$\angle D = \pi - \theta$$

이때 $\overline{AD} = y$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{2^2 + y^2 - (\sqrt{17})^2}{2 \times 2 \times y}$$

이고, $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ 이므로

$$\frac{y^2 - 13}{4y} = -\frac{1}{3}, \quad 3y^2 + 4y - 39 = 0$$

$$(3y + 13)(y - 3) = 0$$

$$y = -\frac{13}{3} \text{ 또는 } y = 3$$

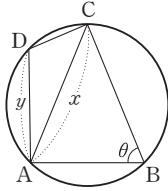
그런데 $\overline{AD} > 0$ 이므로 $\overline{AD} = y = 3$

23 **해결 과정** $f(x) = a \tan(bx + c) + d$

$$= a \tan b\left(x + \frac{c}{b}\right) + d \quad \dots\dots ①$$

$b > 0$ 이고, 조건 (가)에서 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } b = 2 \quad \blacktriangleright 20\%$$



조건 (나)에서 $y = a \tan bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y = a \tan b\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}, d = -1$

이때 $b = 2$ 이므로 $c = -\frac{\pi}{2} \quad \blacktriangleright 30\%$

한편, 조건 (다)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 1$ 이므로

$$a \tan\left(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = a \tan \frac{\pi}{6} - 1 = \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}a - 1 = \sqrt{3} - 1$$

즉, $a = 3 \quad \blacktriangleright 30\%$

답 구하기 따라서 $a = 3, b = 2, c = -\frac{\pi}{2}, d = -1$ 이므로

$$abcd = 3 \times 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times (-1) = 3\pi \quad \blacktriangleright 20\%$$

24 **문제 이해** $2 \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ 에서 $4x - \frac{\pi}{3} = t$ 라

하면

$$2 \sin t = 1, \quad \sin t = \frac{1}{2} \quad \blacktriangleright 30\%$$

해결 과정 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 t 의 값의 범위를 구하면

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$$

$\sin t = \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 t 의 값은

$$t = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } t = \frac{5}{6}\pi \quad \blacktriangleright 30\%$$

답 구하기 즉, $4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ 또는 $4x - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{8} \text{ 또는 } x = \frac{7}{24}\pi \quad \blacktriangleright 40\%$$

25 **문제 이해** $\overline{BC}$ 를 점 D 가 $1:2$ 로 내분하였으므로

$$\overline{BD} = 4, \overline{CD} = 8 \quad \blacktriangleright 30\%$$

해결 과정 $\overline{AD} = x$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 12^2 - x^2}{2 \times 8 \times 12} = \frac{8^2 + 8^2 - x^2}{2 \times 8 \times 8}$$

$$x = 4\sqrt{2} \quad \blacktriangleright 30\%$$

답 구하기 따라서 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{8^2 + (4\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times 8 \times 4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8} \quad \blacktriangleright 40\%$$

III 수열

1 등차수열과 등비수열

01 수열

121~122쪽

준비하기 (1) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ (2) $\sqrt{3}, \sqrt{5}$

생각 열기 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

문제 1 (1) 1, 4, 7, 10 (2) 2, 8, 26, 80

(3) $2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}$

문제 2 (1) $a_n = \frac{1}{n^3}$ (2) $a_n = n(n+1)$

생각 넓히기 ① 16 ② $a_n = (n+1)^2$

02 등차수열

123~129쪽

준비하기 30

생각 열기 ① 제 7 회 ② 2024년

문제 1 (1) 8 (2) $\frac{1}{2}, -1$

함께하기 $a_n = a + (n-1)d$

문제 2 (1) $a_n = 3n - 4$ (2) $a_n = -6n + 11$

문제 3 (1) 34 (2) 제 20 항

문제 4 $a_n = 3n + 2$

문제 5 (1) $a_n = -2n + 87$ (2) 제 44 항

문제 6 $a_n = pn + q, a_{n+1} = p(n+1) + q = pn + p + q$
이므로

$$a_{n+1} - a_n = (pn + p + q) - (pn + q) = p$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 주어진 수열은 공차가 p 인 등차수열이다.

문제 7 (1) $x=4, y=16$ (2) $x=8, y=3, z=-2$

문제 8 (1) 431.4 (2) 400 (3) 1.25 m

생각 열기 ① $2S=10100$ ② 5050

문제 9 (1) 750 (2) -660

문제 10 (1) 442 (2) -120

문제 11 3725

문제 12 (1) $S_n = -3n^2 + 52n$ (2) $n=9$

생각 넓히기 ① $a_n = -6n + 7$

② $a_{n+1} - a_n = -6$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -6 인 등차수열이다.

③ $a_n = S_n - S_{n-1} = 2pn - p + q$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = 2p$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 $2p$ 인 등차수열이다.

03 등비수열

130~136쪽

준비하기 (1) a^8 (2) a^3

생각 열기 ① $4, \frac{16}{5}, \frac{64}{25}, \dots$

② 바로 앞의 항에 $\frac{4}{5}$ 를 곱한 값이 그다음 항이 된다.

문제 1 (1) 4 (2) $1, \frac{1}{27}$

함께하기 $a_n = ar^{n-1}$

생각 톡톡 첫째항이 1, 공차가 0인 등차수열이기도 하고, 첫째 항이 1, 공비가 1인 등비수열이기도 하다.

문제 2 (1) $a_n = -5 \times 3^{n-1}$ (2) $a_n = 3 \times (-4)^{n-1}$

문제 3 (1) 4 (2) 제 9 항

문제 4 $a_n = \frac{1}{8} \times (-10)^{n-1}$

문제 5 (1) $a_n = 2^{n-1}$ (2) 제 13 항

문제 6 (1) $x=6, y=24$ (2) $x=\frac{\sqrt{7}}{2}, y=7, z=14\sqrt{7}$

문제 7 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

문제 8 $\frac{242}{81}$

문제 9 $\frac{171}{256}$

문제 10 3069

문제 11 (1) $a_n = 2 \times 3^n$

(2) $a_{n+1} = 3a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비 수열이다.

문제 12 306만 원

생각 넓히기 ① $a_1=1, a_2=\frac{1}{4}, a_3=\frac{1}{16}, \dots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열을 이룬다.

② 5번째

III -1 중단원 마무리하기

138~141쪽

01 (1) $\frac{1}{14}$ (2) 7

02 (1) $a_n=3n+4$ (2) $a_n=2n-3$

03 (1) $a_n=5^{n-1}$ (2) $a_n=2 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

04 (1) 1 (2) -4 또는 4 05 (1) -91 (2) 254

06 (1) 55 (2) -33 07 제 24항

08 $a=17, b=23, c=29$

09 **문제 이해** 제 3항과 제 5항이 절대값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_3 + a_5 = 0 \quad \blacktriangleright 30\%$$

해결 과정 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 할 때,

$$(9+2d) + (9+4d) = 0$$

$$18+6d=0$$

$$d=-3 \quad \blacktriangleright 30\%$$

답 구하기 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 9, 공차가 -3인 등차수열이므로 첫째항부터 제 10항까지의 합은

$$\frac{10\{2 \times 9 + (10-1) \times (-3)\}}{2} = -45 \quad \blacktriangleright 40\%$$

10 29

11 1050

12 (1) -81 (2) 320

13 6

14 $a=1, b=-2$

15 1, -3, 9

16 156

17 -9

18 $A=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots\}$,

$B=\{3, 8, 13, 18, 23, 28, \dots\}$

이므로

$$A \cap B = \{8, 23, 38, \dots\}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 8, 공차가 15인 등차수열이므로

$$a_n = 8 + (n-1) \times 15 = 15n - 7$$

$$a_k > 100 \text{에서 } 15k - 7 > 100$$

$$15k > 107, \quad k > 7. \times \times \times$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 처음으로 100보다 커지는 항은 제 8항이다.

19 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $S_5=S_{11}$ 에서

$$\frac{5\{2 \times 30 + (5-1)d\}}{2}$$

$$= \frac{11\{2 \times 30 + (11-1)d\}}{2}$$

$$45d = -180, \quad d = -4$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 30, 공차가 -4인 등차수열이므로

$$S_n = \frac{n\{2 \times 30 + (n-1) \times (-4)\}}{2}$$

$$= -2n^2 + 32n = -2(n-8)^2 + 128$$

즉, S_n 의 최댓값은 128이다.

20 **해결 과정** $S_n=kn^2+n, T_n=n^2+kn$ 이라 하면

$$a_3=S_3-S_2=(9k+3)-(4k+2)$$

$$=5k+1 \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$b_5=T_5-T_4=(25+5k)-(16+4k)$$

$$=k+9 \quad \blacktriangleright 40\%$$

답 구하기 이때 $a_3=b_5$ 이므로

$$5k+1=k+9 \text{에서 } k=2 \quad \blacktriangleright 20\%$$

21 여과기를 n 번 통과하였을 때의 유해 물질의 양을 a_n 이라 하면

$$a_n = 100 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right)^n = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$a_n \leq 10 \text{에서 } 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 10$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{1}{10}$$

이 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$n(\log 4 - \log 5) \leq -1$$

$$n\{2\log 2 - (1 - \log 2)\} \leq -1$$

$$n(3\log 2 - 1) \leq -1$$

$$n(3 \times 0.3010 - 1) \leq -1$$

$$n \geq \frac{1}{0.0970} = 10. \times \times \times$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 11이다.

2 수열의 합

01 합의 기호 Σ

143~145쪽

준비하기 $a_n = n(n+2)$

생각 열기 ① $a_n = 2n - 1$ ② 제 41 항

문제 1 (1) $\sum_{k=1}^{10} 2k$ (2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k}$

문제 2 (1) $13 + 17 + 21 + \dots + 33$
(2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

문제 3 (1) $12, 2k - 7$
(2) 예시 $\sum_{k=1}^{225} (4k + 104), \sum_{k=27}^{251} 4k$

함께하기 ① $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n,$
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$
② a_k, c

문제 4 (1) $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$
 $= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_n - b_n)$
 $= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$
 $= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$
(2) $\sum_{k=1}^n c = \underbrace{c + c + c + \dots + c}_{n\text{개}} = cn$

생각 토크 성립하지 않는다.

문제 5 (1) 60 (2) 120

생각 넓히기 ① $10^n - n$
② 제 10 항
③ 11111111055

02 여러 가지 수열의 합

146~149쪽

준비하기 $a = 1, b = -1$

생각 열기 빨간색 블록과 초록색 블록의 개수가 각각
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5$

이고 블록의 총개수가 5×6 이므로
 $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5 \times 6$
즉, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2}$

문제 1 (1) $(n+1)^4 - 1^4$
 $= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n$
 $= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 $+ 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$
 $= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
(2) $4 \sum_{k=1}^n k^3$
 $= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1)$
 $- 2n(n+1) - (n+1)$
 $= (n+1) \{ (n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1 \}$
 $= (n+1)(n^3 + n^2)$
 $= n^2(n+1)^2$
이므로

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

문제 2 (1) 819 (2) 14400

문제 3 (1) 1330 (2) 1260

문제 4 (1) 1480 (2) 9633

문제 5 (1) $\frac{n}{2n+1}$ (2) $\sqrt{n+1} - 1$

생각 넓히기 ① 805
② 모두 $4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 13^2$ 으로 같다.
③ 103600

탐구 & 융합

150쪽

탐구 ① [그림 1]에서 한 개의 정육면체의 부피를 1이라 하면
각 입체도형의 부피는

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

이므로 모든 입체도형의 부피는

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \dots\dots ①$$

[그림 1]의 입체도형을 [그림 2]와 같이 붙이고

[그림 3]과 같이 [그림 2]의 맨 위층을 반으로 잘라

[그림 4]와 같이 붙여 보자.

이때 [그림 4]의 가장 큰 정육면체에서 부피가 1인 정육면체는 가로에 $(4+1)$ 개, 세로에 4개, 높이로 $(4+\frac{1}{2})$ 개가 있으므로 가장 큰 정육면체의 부피는

$$4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right) \dots\dots ②$$

①, ②에서

$$3(1^2+2^2+3^2+4^2)=4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right)$$

② ①에서

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+4^2 &= \frac{4(4+1)\left(4+\frac{1}{2}\right)}{3} \\ &= \frac{4(4+1)(2 \times 4+1)}{6} \end{aligned}$$

따라서 같은 방법으로

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

임을 알 수 있다.

III -2 중단원 마무리하기

151~153쪽

01 (1) $\sum_{k=1}^9 3k$ (2) $\sum_{k=1}^{30} (2k+3)$ (3) $\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{(k+1)(k+2)}$

02 (1) -13 (2) 71

03 (1) 60 (2) 403 (3) 172 (4) 270

04 $\frac{25}{51}$ 05 70

06 (1) 270 (2) 45 (3) 3080 (4) 119

07 **문제 이해** $\sum_{k=1}^n (a_{2k-1}+a_{2k})$
 $= (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)$
 $\quad + \dots + (a_{2n-1}+a_{2n})$
 $= a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k \quad \blacktriangleright 40\%$

해결 과정 즉, $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 2n^2$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 2 \times 15^2 = 450, \sum_{k=1}^{10} a_k = 2 \times 5^2 = 50 \quad \blacktriangleright 40\%$$

답 구하기 $\sum_{k=11}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k$
 $= 450 - 50 = 400 \quad \blacktriangleright 20\%$

08 (1) $\frac{n}{3n+1}$ (2) $\frac{2n}{n+1}$

09 4

10 $\sum_{k=1}^{30} \log_5 \{\log_{k+1}(k+2)\}$
 $= \log_5 (\log_2 3) + \log_5 (\log_3 4) + \log_5 (\log_4 5)$
 $\quad + \dots + \log_5 (\log_{31} 32)$
 $= \log_5 (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \dots \times \log_{31} 32)$
 $= \log_5 \left(\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \dots \times \frac{\log 32}{\log 31} \right)$
 $= \log_5 \left(\frac{\log 32}{\log 2} \right) = \log_5 (\log_2 32)$
 $= \log_5 (\log_2 2^5) = \log_5 5$
 $= 1$

11 $\sum_{k=1}^{99} k(a_k - a_{k+1})$
 $= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4)$
 $\quad + \dots + 99(a_{99} - a_{100})$
 $= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{99} - 99a_{100}$
 $= \sum_{k=1}^{99} a_k - 99a_{100} = 16 - 99 \times \frac{1}{11}$
 $= 16 - 9$
 $= 7$

12 **문제 이해** 수열 $1 \times n, 2 \times (n-1), 3 \times (n-2), \dots$ 의 제 k 항은

$$a_k = k\{n - (k-1)\} = k(n-k+1) \quad \blacktriangleright 40\%$$

해결 과정 이때 주어진 합은 수열 $\{a_k\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같으므로

$$\begin{aligned} & 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) \\ & \quad + \dots + (n-1) \times 2 + n \times 1 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k(n-k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n (nk - k^2 + k) \\ &= n \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad \blacktriangleright 50\% \end{aligned}$$

답 구하기 따라서 $a=1, b=2$ 또는 $a=2, b=1$ 이므로 $a+b=3 \quad \blacktriangleright 10\%$

13 n 행에 나열되는 수들의 합은 첫째항이 n , 공차가 n 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

따라서 등차수열의 합의 공식에 의하여

$$a_n = \frac{n\{2n + (n-1) \times n\}}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3 + k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (3025 + 385) \\ &= 1705 \end{aligned}$$

3 수학적 귀납법

01 수열의 귀납적 정의

155~156쪽

준비하기 (1) -3 (2) 2

생각 열기 ① 9, 27, 81 ② $a_{n+1} = 3a_n$

문제 1 20

문제 2 (1) 91 (2) 2×5^{30}

문제 3 2

탐구 & 융합

157쪽

(1) $a_{n+1} = a_n + n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) (2) 45

02 수학적 귀납법

158~161쪽

준비하기 $1 + 3a + 3a^2 + a^3$

생각 열기 ① 1, 2, 3, 4 ② n

함께하기 $1, 1, k^2, (k+1)^2$

문제 1 (1) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \dots\dots ①$$

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 = 2, (\text{우변}) = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$

따라서 $n=1$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} &1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \end{aligned}$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} &1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1) \\ &\quad + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

$$\begin{aligned} (2) \quad &\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n}{n+1} \dots\dots ① \end{aligned}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$(\text{우변}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

문제 2 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}$ ①

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(\text{우변}) = \frac{2 \times 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

이때 $\frac{3}{2} > \frac{4}{3}$ 이므로, $n=2$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \\ & > \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} \end{aligned}$$

이때 $k \geq 2$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2(k+1)}{k+2} \\ & = \frac{(2k+1)(k+2) - 2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ & = \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0 \end{aligned}$$

에서 $\frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$

즉, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

생각 넓히기 ①

n	1	2	3	4	5	6	7	8
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64

② 5

③ $2^n > n^2$ ①

(i) $n=5$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2^5 = 32$$

$$(\text{우변}) = 5^2 = 25$$

따라서 $n=5$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

$n=k+1$ 일 때

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2k^2 \quad \text{..... ②}$$

이때 $k \geq 5$ 이므로

$$\begin{aligned} k^2 & \geq 5k = 2k + 3k \\ & > 2k + 1 \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

②, ③에서

$$\begin{aligned} 2^{k+1} & > 2k^2 = k^2 + k^2 \\ & > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다.

III -3 중단원 마무리하기

163~165쪽

01 (1) 22 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 19 (4) 26

02 (가) 2 (나) 2 (다) k (라) $k(k+1)$

03 14

04 $a_1 = 110, a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 30$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

05 -16

06 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
 $= \frac{n}{2n+1}$ ①

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$(\text{우변}) = \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

따라서 $n=1$ 일 때 ①이 성립한다. ▶ 30 %

(ii) $n=k$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ & = \frac{k}{2k+1} \end{aligned}$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ & \quad + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다. ▶ 70 %

07 (가) 2 (나) $k+4$ (다) $k+4$ (라) $k+1$

08 $a_1=1$

$$a_2=9^1 \times a_1=9^1$$

$$a_3=9^2 \times a_2=9^2 \times 9^1=9^{1+2}$$

$$a_4=9^3 \times a_3=9^3 \times 9^{1+2}=9^{1+2+3}$$

$$a_5=9^4 \times a_4=9^4 \times 9^{1+2+3}=9^{1+2+3+4}$$

⋮

$$a_{10}=9^{1+2+3+\cdots+9}=9^{45}$$

이므로

$$\begin{aligned} \log_3 a_{10} &= \log_3 9^{45} = \log_3 (3^2)^{45} \\ &= \log_3 3^{90} \\ &= 90 \end{aligned}$$

09 (1)(i) $n=1$ 일 때 $4^1-1=3$ 은 3의 배수이다.

따라서 $n=1$ 일 때 4^n-1 은 3의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때 4^k-1 이 3의 배수라 가정하면

$$4^k-1=3m \quad (m \text{은 자연수})$$

$$\text{이므로} \quad 4^k=3m+1$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} 4^{k+1}-1 &= 4 \times 4^k-1 = 4(3m+1)-1 \\ &= 4 \times 3m+3 \\ &= 3(4m+1) \end{aligned}$$

이므로 $4^{k+1}-1$ 도 3의 배수이다.

따라서 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 4^n-1 은 3의 배수이다. ▶ 50 %

$$(2) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

$$(\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 $n=2$ 일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &< 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

이때 $k \geq 2$ 이므로

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\} - \left(2 - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{에서} \quad 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

즉,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ①이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성립한다. ▶ 50 %

III 대단원 평가하기

166~169쪽

01 10

02 ④

03 주어진 등차수열의 일반항은

$$a_n = 31 + (n-1) \times (-5) = -5n + 36$$

$-5n + 36 < 0$ 에서

$$n > \frac{36}{5} = 7.2$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_7 = -5 \times 7 + 36 = 1$ 이므로 S_n 의 최댓값은

$$S_7 = \frac{7 \times (31+1)}{2} = 112$$

04 3

05 7

- 06 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이가 9이므로
첫 번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는

$$9 \times \frac{8}{9}$$

두 번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는

$$9 \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는

$$9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times \frac{8}{9} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는 $9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$

따라서 12번째 시행 후 남아 있는 부분의 넓이는

$$9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{12} = \frac{8^{12}}{9^{11}}$$

이므로 옳은 것은 ②이다.

07 68

08 4

09 20

10 100

- 11 주어진 부분에 속한 점 중에서
 x, y 좌표가 모두 자연수인 점
을 나타내면 오른쪽 그림과 같
으므로

$x=1$ 일 때,

(1, 1)의 1개

$x=2$ 일 때,

(2, 1), (2, 2)의 2개

$x=3$ 일 때,

(3, 1), (3, 2), (3, 3)의 3개

⋮

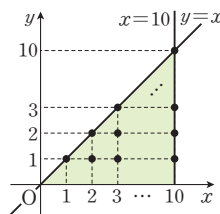
$x=10$ 일 때,

(10, 1), (10, 2), (10, 3), ..., (10, 10)의 10개

따라서 구하는 점의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

이므로 옳은 것은 ④이다.



12 ③

13 $\frac{10}{21}$

14 192

- 15 n 개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의
 n 개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$ 개의 새로
운 영역이 생긴다.

즉, $(n+1)$ 개의 직선으로 나누어지는 영역은 n 개의
직선으로 나누어지는 영역보다 $(n+1)$ 개가 많으므로

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

$a_3 = 7$ 이므로

$$a_4 = a_3 + 3 + 1 = 7 + 4 = 11$$

$$a_5 = a_4 + 4 + 1 = 11 + 5 = 16$$

$$a_6 = a_5 + 5 + 1 = 16 + 6 = 22$$

$$a_7 = a_6 + 6 + 1 = 22 + 7 = 29$$

16 ②

- 17 (가) > (나) $a^k b + a b^k$

- 18 **문제이해** 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차
수열이므로 일반항은

$$a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3 \quad \blacktriangleright 20\%$$

해결과정 주어진 식을 유리화하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{12}} + \sqrt{a_{13}}} \\ &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_{12}}}{a_{13} - a_{12}} \end{aligned}$$

$\blacktriangleright 20\%$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_{13} - a_{12} = 4$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_{12}}}{a_{13} - a_{12}} \\ &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{4} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{4} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_{12}}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{a_{13}} - \sqrt{a_1}}{4} \end{aligned}$$

$\blacktriangleright 30\%$

답구하기 $a_n = 4n - 3$ 에서

$$a_1 = 1, a_{13} = 4 \times 13 - 3 = 49$$

이므로 주어진 식의 값은

$$\frac{\sqrt{49} - \sqrt{1}}{4} = \frac{7 - 1}{4} = \frac{3}{2}$$

$\blacktriangleright 30\%$

- 19 **해결 과정** 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 8 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} a + ar + \cdots + ar^9 &= a(1 + r + \cdots + r^9) \\ &= 8 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20} = 24 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} ar^{10} + ar^{11} + \cdots + ar^{19} &= ar^{10}(1 + r + \cdots + r^9) \\ &= 24 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^{10} = 3 \quad \blacktriangleright 40 \%$$

답구하기 따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{30} &= ar^{20} + ar^{21} + \cdots + ar^{29} \\ &= ar^{20}(1 + r + \cdots + r^9) \\ &= a(1 + r + \cdots + r^9) \times r^{20} \\ &= 8 \times 3^2 \\ &= 72 \end{aligned} \quad \blacktriangleright 60 \%$$

- 20 **문제 이해** 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_k + \beta_k = 2k, \quad \alpha_k \beta_k = 3k \quad \blacktriangleright 20 \%$$

해결 과정 $\alpha_k^2 + \beta_k^2 = (\alpha_k + \beta_k)^2 - 2\alpha_k \beta_k$

$$\begin{aligned} &= (2k)^2 - 2 \times 3k \\ &= 4k^2 - 6k \end{aligned} \quad \blacktriangleright 30 \%$$

답구하기 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} &\sum_{k=3}^8 (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \\ &= \sum_{k=3}^8 (4k^2 - 6k) \\ &= \sum_{k=1}^8 (4k^2 - 6k) - \sum_{k=1}^2 (4k^2 - 6k) \\ &= \left(4 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} - 6 \times \frac{8 \times 9}{2} \right) \\ &\quad - \left(4 \times \frac{2 \times 3 \times 5}{6} - 6 \times \frac{2 \times 3}{2} \right) \\ &= 600 - 2 \\ &= 598 \end{aligned} \quad \blacktriangleright 50 \%$$

- 21 (1) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ 이므로

$$a_2 = \frac{1}{2-a_1} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{2-a_2} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{2-a_3} = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

따라서 일반항은

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

으로 추측할 수 있다.

$\blacktriangleright 40 \%$

$$(2) a_n = \frac{n}{n+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$(\text{우변}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$a_k = \frac{k}{k+1}$$

$n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{2-a_k} = \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \\ &= \frac{k+1}{(k+1)+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다. $\blacktriangleright 60 \%$

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

삼각함수표

각	라디안	sin	cos	tan	각	라디안	sin	cos	tan
0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	45	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000
1	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	46	0.8029	0.7193	0.6947	1.0355
2	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	47	0.8203	0.7314	0.6820	1.0724
3	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524	48	0.8378	0.7431	0.6691	1.1106
4	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699	49	0.8552	0.7547	0.6561	1.1504
5	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	50	0.8727	0.7660	0.6428	1.1918
6	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	51	0.8901	0.7771	0.6293	1.2349
7	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	52	0.9076	0.7880	0.6157	1.2799
8	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	53	0.9250	0.7986	0.6018	1.3270
9	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	54	0.9425	0.8090	0.5878	1.3764
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	55	0.9599	0.8192	0.5736	1.4281
11	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	56	0.9774	0.8290	0.5592	1.4826
12	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126	57	0.9948	0.8387	0.5446	1.5399
13	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	58	1.0123	0.8480	0.5299	1.6003
14	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	59	1.0297	0.8572	0.5150	1.6643
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	60	1.0472	0.8660	0.5000	1.7321
16	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	61	1.0647	0.8746	0.4848	1.8040
17	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	62	1.0821	0.8829	0.4695	1.8807
18	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	63	1.0996	0.8910	0.4540	1.9626
19	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	64	1.1170	0.8988	0.4384	2.0503
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	65	1.1345	0.9063	0.4226	2.1445
21	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	66	1.1519	0.9135	0.4067	2.2460
22	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	67	1.1694	0.9205	0.3907	2.3559
23	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	68	1.1868	0.9272	0.3746	2.4751
24	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452	69	1.2043	0.9336	0.3584	2.6051
25	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	70	1.2217	0.9397	0.3420	2.7475
26	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	71	1.2392	0.9455	0.3256	2.9042
27	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	72	1.2566	0.9511	0.3090	3.0777
28	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	73	1.2741	0.9563	0.2924	3.2709
29	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	74	1.2915	0.9613	0.2756	3.4874
30	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	75	1.3090	0.9659	0.2588	3.7321
31	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009	76	1.3265	0.9703	0.2419	4.0108
32	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	77	1.3439	0.9744	0.2250	4.3315
33	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	78	1.3614	0.9781	0.2079	4.7046
34	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	79	1.3788	0.9816	0.1908	5.1446
35	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	80	1.3963	0.9848	0.1736	5.6713
36	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	81	1.4137	0.9877	0.1564	6.3138
37	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	82	1.4312	0.9903	0.1392	7.1154
38	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	83	1.4486	0.9925	0.1219	8.1443
39	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	84	1.4661	0.9945	0.1045	9.5144
40	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	85	1.4835	0.9962	0.0872	11.4301
41	0.7156	0.6561	0.7547	0.8696	86	1.5010	0.9976	0.0698	14.3007
42	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	87	1.5184	0.9986	0.0523	19.0811
43	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	88	1.5359	0.9994	0.0349	28.6363
44	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	89	1.5533	0.9998	0.0175	57.2900
45	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	90	1.5708	1.0000	0.0000	

용어

거듭제곱근	12
공비	130
공차	123
귀납적 정의	155

동경	69
등비수열	130
등비중향	132
등차수열	123
등차중향	126

라디안	71
로그	24
로그함수	44

(로그의) 밑	24
---------	----

사인법칙	99
사인함수	75
삼각함수	75
상용로그	32
수열	121
수학적 귀납법	159
시초선	69

일반각	70
일반향	121

주기	83
주기함수	83
지수함수	41
진수	24

코사인법칙	104
코사인함수	75

탄젠트함수	75
-------	----

항	121
호도법	71

기호

$\sqrt[n]{a}$	13
$\log_a N$	24
$\log N$	32
$\sin x$	75
$\cos x$	75
$\tan x$	75
a_n	121
$\{a_n\}$	121
$\sum_{k=1}^n a_k$	143

사진 자료 출처

표지, 1쪽, 8쪽, 11쪽, 17쪽, 23쪽, 35쪽, 41쪽, 49쪽, 55쪽, 58쪽, 64쪽, 65쪽, 66쪽, 74쪽, 80쪽, 81쪽, 85쪽, 97쪽, 117쪽, 118쪽, 121쪽, 123쪽, 130쪽, 133쪽, 141쪽, 142쪽, 146쪽, 155쪽, 158쪽, 164쪽, 171쪽 셔터스톡	51쪽, 97쪽, 146쪽 게티이미지코리아
27쪽 www.saatchiart.com	54쪽 토픽이미지
28쪽 www.computerhistory.org	69쪽, 101쪽, 106쪽, 133쪽 연합뉴스
32쪽 NASA(www.nasa.gov)	116쪽 중앙시사매거진(jmagazine.joins.com)
41쪽, 51쪽, 69쪽, 102쪽, 136쪽 이미지클릭	123쪽 worldwaterforum7.org
	124쪽, 131쪽 people.reed.edu
	130쪽 아카이브(www.akeive.org)
	143쪽 도로교통공단(www.koroad.or.kr)

• 출처 표시를 안 한 사진 및 삽화 등은 저작자 및 발행사에서 저작권을 가지고 있는 경우임.

인용 자료 출처

10쪽 Budd, C. J., Sangwin, C. J., 『Mathematics Galore!』, Oxford University Press, 2001, 226쪽	
17쪽 천함지이, 『나노 테크놀로지 입문』, 김태엽, 홍영대 역, 성안당, 2003, 9쪽	
23쪽 김창덕, 『우리나라 명수법에 대한 소고(III)』, 『한국수학사학회지』, 제12권 제2호, 1999, 55~62쪽	
24쪽 루타 라이머, 윌버트 라이머, 『수학자도 사람이다! 1』, 김소정 역, 꼬마이실, 2007, 121쪽	
28쪽 EBS, 『2015 수능특강 국어 B형』, EBS, 2015, 297~298쪽	
32쪽 Wilbraham, Staley, Matta, Waterman, 『Chemistry』, Pearson Prentice Hall, 2008, 598쪽	
35쪽 환경부(www.me.go.kr), 공동 주택 층간 소음의 범위와 기준에 관한 규칙, 2016	
40쪽 www.albartlett.org	
55쪽 안전보건공단(www.kosha.or.kr), 「산소 농도와 유해 가스 등 작업 환경이 생체 및 운동성에 미치는 영향 연구」, 2009	
64쪽 Banks, R. B., 『Towing Icebergs, Falling Dominoes, and Other Adventures in Applied Mathematics』, 1998, 150~167쪽	
65쪽 www.utdallas.edu	
Paulraj, A., Gore, D., Nabar, R., 『Introduction to Space-Time Wireless Communications』, Cambridge University Press, 2003, 11~18쪽	
68쪽 Breitman, D., Byrd, D., 「This date in science: Clyde Tombaugh, discoverer of Pluto」, Earthsky(http://earthsky.org/space), 2016년 2월 4일	
76쪽 『수학동아』, 동아 사이언스, 2014년 6월 호, 76~77쪽	
80쪽 두산백과 (www.doopedia.co.kr)	
96쪽 Klapper, P., 『College Teaching: Studies in methods of teaching in the college』, World Book Company, 1920, 130쪽	
116쪽 EBS MATH (www.ebsmath.co.kr)	
117쪽 정보통신연구회, 『디지털 통신이론』, 백티닷컴, 2010, 315쪽	
120쪽 Abbott, E. A., 『Flatland: A Romance of Many Dimensions』, Dover Publications, 1992, 61쪽	
121쪽 『Scientific American』, Nature America, 2016년 5월 호, 63쪽	
137쪽 계영희, 『명화와 함께 떠나는 수학사 여행』, 살림, 2006, 44쪽	
142쪽 Buchanan, S. M., 『Poetry and Mathematics』, Lippincott Company, 1929, 47쪽	
154쪽 Dijkstra, E. W., 『Acta Informatica 13』, 1980, 1~8쪽	
162쪽 앙드레 주에트, 『수의 비밀』, 김보현 역, 이지북, 2001, 105쪽	
170쪽 임백준, 『뉴욕의 프로그래머』, 한빛미디어, 2007, 214~215쪽	
171쪽 매일경제 경제용어사전(dic.mk.co.kr)	

• 집필진의 직접 집필인 경우 출처를 밝히지 않았음.

검정심의회

위원장 | 장재덕(한국외국어대학교)

간사 | 나준영(한국과학창의재단)

연구위원 | 김권욱(순천대학교)

김영아(수택고등학교)

유상욱(제주대학교)

이상훈(천안신당고등학교)

조용욱(신라대학교)

황형주(포항공과대학교)

김형배(국립국어원)

김현숙(공주대학교)

황선희(중앙대학교)

검정위원 | 김정래(연세중학교)

김혜란(관양고등학교)

김호천(화천정보산업고등학교)

박종희(안동고등학교)

이용훈(전북대학교)

이익권(인하대학교)

이재혁(이화여자대학교)

허난(경기대학교)

한국과학창의재단

조향숙 김기상 최임정 김대수 나준영 남소현 조혜정

개발 책임 | 정장아

편집 | 주석호, 김지현, 심누리, 김혜정

디자인 | 오영숙, 김석현, 김기욱

일러스트 · 삽화 | 박경호, 영수, 담, 차원, 임진아, 이은미, 김예슬

교육부의 위탁을 받아 한국과학창의재단이 검정 심사를 하였음.

고등학교

수학 I

2018. 3. 1. 초판 발행

정가 원

지은이 | 황선욱 외 8인

발행인 | (주)미래엔 (서울특별시 서초구 신반포로 321)

인쇄인 | (주)미래엔 (서울특별시 서초구 신반포로 321)

이 교과서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용하였습니다.

교과서에 대한 문의 사항이나 의견이 있으신 분은 '교과서민원바로처리센터(전화 1566-8572, www.textbook114.com 또는 www.교과서114.com)'에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상은 문화체육관광부 장관이 정하는 기준에 의거 사단법인 한국복제전송저작권협회(전화 02-2608-2800, www.korra.kr)에서 저작권 산권자에게 지급합니다.

내용 관련 문의 | (주)미래엔 교육사업본부 전화 1800-8890 전송 02-541-8150

공급 업무 대행 | (사)한국검인정교과서협회 (10881)경기도 파주시 문발로 439-1(신촌동 734-1)

개별 구입 문의 | 누리집 주소 www.klbook.com 전화 031-956-8581~4 (사)한국검인정교과서협회

ISBN 979-11-6233-308-2