

I 지수함수와 로그함수

1. 지수와 로그
2. 지수함수와 로그함수

이 단원에서는

거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이해하고,
지수법칙을 실수의 범위까지 확장한다. 또, 로그의 뜻과 성질을
이해하고, 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 및 그 활용을 알아본다.



지도 목표

1. 지수와 로그

- 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
- 지수가 정수, 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하게 한다.
- 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있게 한다.
- 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
- 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

2. 지수함수와 로그함수

- 지수함수와 로그함수의 뜻을 알게 한다.
- 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해하게 한다.
- 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 지수와 로그

- 지수가 유리수 및 실수인 경우는 밑이 양수인 조건이 필요함을 이해하게 한다.
- 지수가 실수인 경우는 직관적으로 다룬다.
- 로그의 성질은 지수의 성질과 관련지어 이해하게 한다.

2. 지수함수와 로그함수

- 지수함수와 로그함수는 역함수 관계임을 그래프를 통해 확인하게 한다.
- 지수와 로그 및 지수함수와 로그함수를 다룰 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
- 구체적인 자연 현상이나 사회 현상을 지수함수와 로그함수로 표현하고 이 과정에서 나타나는 간단한 방정식과 부등식을 풀어 문제를 해결해 봄으로써 지수함수와 로그함수의 유용성과 가치를 인식하게 한다.

학습 계통도

배운 내용

[중학교 수학 2]

- 단항식의 계산
- 지수법칙

[중학교 수학 3]

- 제곱근과 실수
- 이차방정식

[수학]

- 방정식과 부등식
- 함수

이 단원의 내용

1. 지수와 로그

- 01 거듭제곱과 거듭제곱근
- 02 지수의 확장
- 03 로그
- 04 상용로그

2. 지수함수와 로그함수

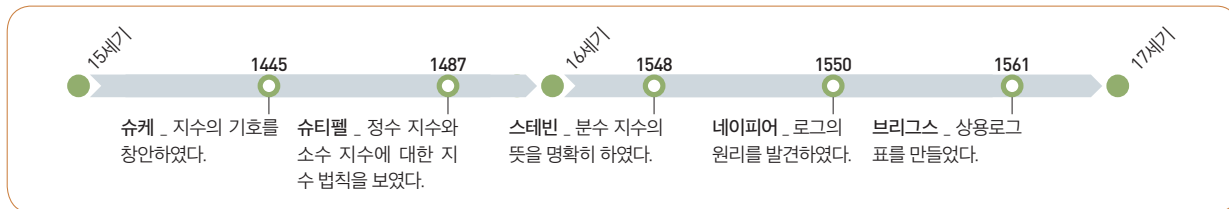
- 01 지수함수와 로그함수
- 02 지수함수와 로그함수의 활용

배울 내용

[미적분]

- 여러 가지 함수의 미분
- 여러 가지 미분법
- 도함수의 활용
- 여러 가지 적분법
- 정적분의 활용

2 단원의 이론적 배경



1 지수

고대부터 발달해 온 수체계는 수의 거듭제곱을 여러 가지 방법으로 나타내었다.

십진법을 사용하는 중국과 이집트의 경우 1, 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , ...에 해당하는 문자를 다음 표와 같이 따로 만들어 사용하였다.

수	1	10	10^2	10^3	10^4	...
중국	一	十	百	千	萬	...
이집트		∩	9	⌒	⌒	...

우리가 현재 사용하는 수체계는 숫자가 자리하는 위치가 그 숫자의 자릿값을 나타내는 방식인데, 예를 들어 1954에서 1, 9, 5, 4는 각각 10^3 , 10^2 , 10^1 , 10^0 의 자리를 나타낸다. 이와 같이 나열된 숫자의 자리가 일정한 수의 거듭제곱을 나타내는 표기법은 60진법을 사용하였던 고대 바빌로니아에서 비롯되었다. 그들은 점토판에 췌기문자를 써서 수를 나타내었는데, 1과 10을 각각 기호 ∟과 ∟로 나타내고, 60 이하인 수는 단순히 이들 기호를 수만큼 나열하여 표시하였다. 60이 넘는 수는 60 , 60^2 , 60^3 , ...만큼씩 묶어서 각 묶음의 개수를 차례대로 나타내었다.

예를 들어 8012는

$$8012 = 2 \times 60^2 + 13 \times 60 + 32$$

이므로 다음과 같이 나타내었다.

$$22 \ll 13 \ll 32$$

그리스의 수학자 디오판토스(Diophantos, 200?~284?)는 『산학(Arithmetica)』에서 미지수의 제곱은 Δ^Y , 세제곱은 K^Y , 네제곱은 제곱의 제곱으로 $\Delta^Y \Delta$, 5제곱은 ΔK^Y , 6제곱은 $K^Y K$ 로 나타내었다.



슈케

르네상스 이후에 개발된 여러 가지 기호로 인해 대수학은 보다 발전하게 되었다. 15세기 프랑스의 수학자 슈케(Chuquet, N., 1445~1488)는 저서 『수의 과학에서의 세 부분(Le Triparty en la Science des Nombres)』에서 지수의 기호를 창안하였는데, $5x$, $6x^2$, $10x^3$ 을 각각 $.5.^1$, $.6.^2$, $.10.^3$ 으로, 0과 음의 정수의 지수인 $9x^0$, $9x^{-2}$ 을 각각 $.9.^0$, $.9.^{2.m}$ 으로 나타내었다. 또, 그는 $.72.^1$ 나누기 $.8.^3$ 을 $.9.^{2.m}$ 으로 나타내었는데, 이는 $72x \div 8x^3 = 9x^{-2}$ 임을 의미하는 것으로 지수법칙이 드러나게 한 것으로 평가된다. 슈케는 또한 모든 수 x 에 대하여 등식 $x^0 = 1$ 을 사용하였다.

슈티펠(Stifel, M., 1487~1567)은 저서 『산술백과(Arithmetica Integra)』에서 거듭제곱과 거듭제곱근을 다루는 방법을 기술하였는데, 여기에서 정수 지수와 분수 지수에 대한 지수법칙을 보였다. 또, x 와 2^x 의 관계를 비교하여 복잡한 수의 곱셈을 덧셈으로 바꾸어 계산할 수 있음을 보임으로써 로그의 개념을 만들었다.

스테빈(Stevin, S., 1548~1620)은 지수의 기호를 동그라미 안에 숫자를 써서

$$x, x^2, x^3 \text{을 각각 } ①, ②, ③$$

으로,

$$x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{1}{3}} \text{을 각각 } (\frac{1}{2}), (\frac{3}{2}), (\frac{1}{3})$$

로 나타내었는데, 특히 $x^{\frac{3}{2}}$ 을 x 의 세제곱의 제곱근이라고 말함으로써 분수 지수의 뜻을 명확히 하였다.

오늘날 사용하고 있는 지수 기호 a^n 은 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)가 『방법서설(Discours de la Methode)』의 부록 「기하학」에서 사용하였는데, 여기에서는 n 이 자연수인 경우만 다루었다.

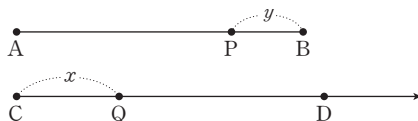
2 로그



네이피어

로그의 원리를 처음 발견한 사람은 영국 스코틀랜드의 네이피어(Napier, J., 1550~1617)인데, 그는 천문학에서 다루어야 하는 큰 수의 계산을 간단하게 할 수 있는 방법을 고안하던 중에 로그의 원리를 발견하였다.

네이피어가 로그를 정의하는 과정을 살펴보면 다음과 같다.



위의 그림과 같이 선분 AB 위의 점 P가 점 A에서 출발하여 점 B의 방향으로 $\overline{PB}$ 와 같은 속도로 움직인다고 하자. 또, 반직선 CD 위의 점 Q가 점 C에서 출발하여 점 D의 방향으로 $\overline{AB}$ 와 같은 속도로 움직인다고 하자.

이때 $\overline{CQ}$ 를 $\overline{PB}$ 의 로그로 정의한다.

즉, $x = \text{Nap log } y$ 이다. (단, Nap log 는 네이피어 로그의 기호이다.)

네이피어는 당시 사용했던 소수점 아래 7째 자리까지 계산되어 있는 사인(sine)표에 따라 $\overline{AB}$ 의 길이를 10^7 으로 택했다.

여기서 t 를 시간이라 하면 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dt}(10^7 - y) = y, \quad \frac{dx}{dt} = 10^7$$

따라서

$$-\frac{dy}{y} = dt, \quad x = 10^7 t$$

이므로 $-\ln y = t + C$ (C 는 상수)이다. 그런데 $t=0$ 일 때 $y=10^7$ 이므로 $C = -\ln 10^7$ 이 된다.

그러므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = 10^7 t = 10^7 (\ln 10^7 - \ln y) = 10^7 \ln \frac{10^7}{y}$$

$$\therefore x = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \frac{y}{10^7}$$

여기서 $e=2.718\cdots$ 은 자연로그(natural logarithm)의 밑을 나타낸다. 이와 같은 내용은 네이피어가 1614년에 출판한 『경이로운 로그 법칙의 기술(Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio)』이란 책을 통해 처음으로 소개되었다. 이 책에는 로그표의 계산법이 실려 있으며, 로그(logarithm)라는 말이 처음으로 사용되었다.

실제로 계산에 이용할 수 있는 편리한 로그표는 영국의 수학자 브리그스(Briggs, H., 1561~1630)에 의하여 만들어졌으며, 이때 비로소 10을 밑으로 하는 로그인 상용로그(common logarithm)가 만들어졌다.

3 지수함수와 로그함수

$a>0$ 이고 $a\neq 1$ 인 실수 a 와 임의의 실수 x 에 대하여 실수 지수 a^x 의 값은 단 하나 존재하고, x 의 값이 연속적으로 변하면 a^x 의 값도 연속적으로 변하게 된다. 따라서 x 의 값이 변함에 따라 a^x 의 값도 변하므로 $y=a^x$ 은 함수가 되며, 이 함수를 a 를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

실제로 $y=a^x$ 의 순서쌍을 좌표평면에 나타내고 매끄러운 곡선으로 연결하면 지수함수의 그래프가 되며, $a>1$ 이면 증가하는 그래프이고 $0<a<1$ 이면 감소하는 그래프가 되므로 지수함수 $y=a^x$ 은 역함수가 존재하게 된다.

지수함수 $y=a^x$ 의 역함수는 로그의 정의에 의하여 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)이며, 이 함수를 a 를 밑으로 하는 로그함수라고 한다. 로그함수 $y=\log_a x$ 는 지수함수의 역함수로 정의하였으므로 로그함수의 그래프는 지수함수의 그래프를 이용하여 그린다.

참고 문헌

- Eves, H., 『수학사』, 이우영, 신항균 역, 경문사, 1995
- Cajori, F., 『A History of Mathematical Notations』, Dover, 1993
- Smith, S., 『수학사 가볍게 읽기』, 황선옥 역, 한승, 2002

3 단원의 지도 계획

중단원	소단원	차시 (총 32차시)	교과서 쪽 수	지도 내용	용어와 기호
1. 지수와 로그	01 거듭제곱과 거듭제곱근	4	11~16	- 거듭제곱 - 거듭제곱근 - 거듭제곱근의 성질	거듭제곱근, $\sqrt[n]{a}$
	02 지수의 확장	5	17~22	- 지수가 정수인 경우 - 지수가 유리수인 경우 - 지수가 실수인 경우	
			23	• 수학 이야기	
	03 로그	6	24~30	- 로그 - 로그의 성질 - 로그의 밑의 변환	(로그의) 밑, 로그, 진수, $\log_a N$
			31	• 탐구&융합	
	04 상용로그	3	32~34	• 상용로그	상용로그, $\log N$
			35	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	2	36~39	• 중단원 마무리하기	
2. 지수함수와 로그 함수	01 지수함수와 로그함수	4	41~48	- 지수함수의 뜻과 그래프 - 로그함수의 뜻과 그래프 - 두 수의 대소 비교	지수함수, 로그함수
	02 지수함수와 로그함수의 활용	4	49~54	- 지수함수의 활용 - 로그함수의 활용	
			55	• 탐구&융합	
	중단원 마무리	2	56~59	• 중단원 마무리하기	
대단원 마무리		2	60~63	• 대단원 평가하기	
			64	• 수학 이야기	
			65	• 뿌리가 되는 수학	

※ 실제 지도는 학교의 실정에 따라 알맞게 계획하고 재구성할 수 있다.



1

지수와 로그

01 거듭제곱과 거듭제곱근

02 지수의 확장

03 로그

04 상용로그

“수학을 공부할 때 큰 수의 곱셈과 나눗셈, 제곱과 세제곱처럼 성가신 것이 없다. 그래서 이러한 방해물을 어떻게 제거할 수 있을까 계속 생각했다.”

(출처: Budd, C. J. 외, 'Mathematics Galore!')



네이피어(Napier, J., 1550~1617)
영국의 수학자, 천문학자

이 글은 네이피어가 1614년 로그 계산법을 처음 소개한 '놀라운 로그 체계의 기술'에서 찾아볼 수 있다. 그는 'Napier's bones'라 불리는 곱셈과 나눗셈 계산기와 로그 계산법을 발명하여 천문 연구에 큰 도움을 주었다.

10

중단원 도입

우리 생활 주변에서 억, 조, 기가, 테라 등과 같이 매우 큰 수를 나타내는 말이나 나노, 펨토 등과 같이 매우 작은 수를 나타내는 말들이 자주 등장한다. 또한, 천문학이나 나노 기술과 같은 과학의 발달로 아주 큰 수나 아주 작은 수의 계산을 신속하고 간편하게 처리하기 위해 지수와 로그를 이용하면 계산이 매우 편리하다.

이 단원에서는 중학교에서 학습한 거듭제곱, 지수법칙, 제곱근을 바탕으로 지수를 정수, 유리수, 실수의 범위까지 확장한 지수법칙과 로그의 뜻과 그 성질에 대하여 알아본다.

네이피어

네이피어(Napier, J., 1550~1617)는 영국 스코틀랜드 출신의 수학자이다. 그는 수학·신학·점성술 등을 좋아하였는데, 특히 40여 년에 걸친 수학 연구로 산술·대수(數數)·삼각법 등의 단순화·계열화를 꾀하였으며, 연구 영역이 '네이피어 로드' 등 계산 기계의 고안에까지 미쳤다. 그중 계산의 간편화를 목적으로 한 로그의 발명은 수학사상 커다란 업적이었다. 또한, 그는 로그를 등차수열적 운동과 등비수열적 운동에 대응시켜서 발견해 냈다.

01

거듭제곱과 거듭제곱근

배경

거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

문제 해결

1 다음 수의 제곱근을 구하시오.

- (1) 0.49 (2) $(-2)^2$

2 다음을 계산하시오.

- (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ (2) $\sqrt{27} \div \sqrt{3}$

탐구 1

정사각형의 한 변의 길이를 알 때의 넓이, 정육면체의 한 모서리의 길이를 알 때의 부피는 거듭제곱의 꼴로 나타낼 수 있다.

이제 거꾸로 정사각형의 넓이를 알 때 한 변의 길이, 정육면체의 부피를 알 때 한 모서리의 길이를 나타내는 방법에 대하여 알아보자.



거듭제곱

생각 열기

컴퓨터의 정보량을 나타내는 단위인 메바이트(MiB), 기바이트(GiB), 테라바이트(TiB) 사이에 다음과 같은 관계가 있다.

$$1 \text{ GiB} = 1024 \text{ MiB}, \quad 1 \text{ TiB} = 1024 \text{ GiB}$$

① 1024를 2의 거듭제곱으로 나타내어 보자.

② 다음은 1 TiB가 몇 MiB인지 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$1 \text{ TiB} = 2^{\square} \text{ GiB} = (2^{\square} \times 2^{\square}) \text{ MiB} = 2^{\square} \text{ MiB}$$

1

어떤 수 a 를 n 번 곱한 것을 a^n 으로 나타내고,

$$a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$$

을 통틀어 a 의 거듭제곱이라고 한다.

이때 a^n 에서 a 를 거듭제곱의 밑, n 을 거듭제곱의 지수라고 한다.

중학교에서 배운 지수법칙을 정리하면 다음과 같다.

지수가 자연수일 때의 지수법칙

a, b 가 실수이고 m, n 이 자연수일 때,

- ① $a^m a^n = a^{m+n}$
- ② $(a^m)^n = a^{mn}$
- ③ $(ab)^n = a^n b^n$
- ④ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$
- ⑤ $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \quad (a \neq 0) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$

$$a = a^1 \text{이다.}$$

$$a^n \text{ --- 지수} \\ \text{--- 밑}$$

11

소단원 지도 개관

지도 목표

- ① 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 이해하게 한다.
- ② 거듭제곱근을 구할 수 있게 한다.
- ③ 거듭제곱근의 성질을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 계산을 할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

- ① 거듭제곱의 지수와 지수법칙을 생각할 때, 밑은 0이 아닌에 유의하게 한다.
- ② 거듭제곱근은 실수인 것만 다루도록 한다.
- ③ 거듭제곱근을 구할 때는 방정식을 세워서 구하도록 지도한다.
- ④ 거듭제곱근 중 실수인 것을 구할 때 $y = x^n$ 의 그래프를 이용하고, 이때 공학적 도구를 활용할 수 있도록 한다. $y = x^n$ 의 그래프는 n 이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 설명한다.

용어와 기호

• 거듭제곱근(radical root)

$$\cdot \sqrt[n]{a}$$

▶ 문제 1 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0, b \neq 0$)

(1) $ab^5 \times a^2b^4$ (2) $(a^2b)^3$ (3) $a^2b^2 \div \left(\frac{b^2}{a}\right)^3$

● 거듭제곱근

제곱하여 실수 a 가 되는 수를 a 의 제곱근이라 하고, 세제곱하여 실수 a 가 되는 수를 a 의 세제곱근이라고 한다.

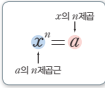
일반적으로 n 이 2 이상인 자연수일 때, n 제곱하여 실수 a 가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n = a$$

의 근 x 를 a 의 n 제곱근이라고 한다.

a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a 의 거듭제곱근이라고 한다.

실수 a 의 n 제곱근은 복소수의 범위에서 n 개가 있음이 알려져 있다. 그러나 여기에서는 거듭제곱근 중에서 실수인 것만 다루기로 한다.



④ x 가 a 의 n 제곱근이다.
 $\Rightarrow x^n = a$

▶ 예제 1 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하시오.

(1) -1의 세제곱근 (2) 16의 네제곱근

풀이 (1) -1의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -1$ 이므로

$$x^3 + 1 = 0, \quad (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

이때 $x^2 - x + 1 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로 $x+1=0$ 에서 $x = -1$ 따라서 -1의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -1이다.

(2) 16의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 16$ 이므로

$$x^4 - 16 = 0, \quad (x-2)(x+2)(x^2 + 4) = 0$$

이때 $x^2 + 4 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로 $(x-2)(x+2) = 0$ 에서 $x = \pm 2$ 따라서 16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 -2, 2이다.

답 (1) -1 (2) -2, 2

▶ 문제 2 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하시오.

(1) -8의 세제곱근 (2) 49의 네제곱근

■ 준비하기

|주안점| 제곱근의 뜻을 알고 제곱근의 성질을 이용하여 제곱근의 계산을 할 수 있는지 확인한다.

|풀이| 1 (1) $(-0.7)^2 = 0.49, 0.7^2 = 0.49$ 이므로

0.49의 제곱근은 $-0.7, 0.7$

(2) $(-2)^2 = 4, 2^2 = 4$ 이므로 $(-2)^2$ 의 제곱근은 $-2, 2$

2 (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ (2) $\sqrt{27} \div \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$

답 1 (1) -0.7, 0.7 (2) -2, 2

2 (1) 4 (2) 3

● 거듭제곱

생각 열기

|지도 방향| 중학교에서 학습한 지수의 뜻과 지수법칙을 이용하여 컴퓨터의 정보량을 비교하게 한다.

1 $1024 = 2^{10}$

2 1 TiB = 2^{10} GiB = $(2^{10} \times 2^{10})$ MiB = 2^{20} MiB

(내용 연구)

1 거듭제곱의 뜻을 이해하고, 중학교에서 학습한 지수의 뜻과 지수가 자연수인 경우의 지수법칙을 확인하게 한다.

(문제 풀이)

문제 1

|주안점| 지수가 자연수일 때의 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $ab^3 \times a^2b^4 = a^{1+2}b^{3+4} = a^3b^7$

(2) $(a^2b)^3 = a^{2 \times 3}b^3 = a^6b^3$

(3) $a^4b^3 \div \left(\frac{b^2}{a}\right)^3 = a^4b^3 \div \frac{b^6}{a^3} = a^4b^3 \times \frac{a^3}{b^6} = \frac{a^7}{b^3}$

답 (1) a^3b^7 (2) a^6b^3 (3) $\frac{a^7}{b^3}$

● 거듭제곱근

평가기준

상 거듭제곱근의 성질을 설명할 수 있고, 거듭제곱근의 성질을 이용한 문제 해결 과정을 설명할 수 있다.

중 실수의 거듭제곱근 중 실수인 것의 개수를 구할 수 있고, 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

하 거듭제곱근의 뜻을 알고, 주어진 실수의 거듭제곱근을 구할 수 있다.

(문제 풀이)

문제 2

|주안점| 거듭제곱근의 뜻을 알고, 방정식을 이용하여 주어진 수의 거듭제곱근을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) -8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -8$ 이므로

$$x^3 + 8 = 0, \quad (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

이때 $x^2 - 2x + 4 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로

$$x+2=0 \text{에서 } x = -2$$

따라서 -8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -2이다.

(2) 49의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 49$ 이므로

$$x^4 - 49 = 0, \quad (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x^2+7) = 0$$

이때 $x^2+7=0$ 은 실근을 갖지 않으므로

$$(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7}) = 0 \text{에서 } x = \pm\sqrt{7}$$

따라서 49의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-\sqrt{7}, \sqrt{7}$ 이다.

답 (1) -2 (2) $-\sqrt{7}, \sqrt{7}$

함께하기

[지도 방향] 함수 $y=x^n$ ($n=2, 3, 4, 5$)의 그래프를 이용하여 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것을 찾을 수 있게 한다.

[풀이] ① 직선 $y=a$ 와 두 함수 $y=x^2, y=x^4$ 의 그래프의 교점의 개수는

$a > 0$ 일 때 2

$a = 0$ 일 때 1

$a < 0$ 일 때 0

또, 직선 $y=a$ 와 두 함수 $y=x^3, y=x^5$ 의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

② **[예시]** 함수 $y=x^n$ 의 그래프에서 n 이 짝수일 때는 a 의 값에 따라 교점의 개수가 달라지지만, n 이 홀수일 때는 a 의 값에 관계없이 교점의 개수가 1이다.

[답] 풀이 참조

(내용 연구)

① n 이 짝수인 경우 함수 $y=x^n$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, $x \geq 0$ 인 범위에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

(i) $a > 0$ 일 때, 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 두 점에서 만나므로 실수 a 의 n 제곱근은 $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$ 이다.

(ii) $a = 0$ 일 때, 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 원점에서 만나므로 실수 a 의 n 제곱근은 0이다.

(iii) $a < 0$ 일 때, 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 만나지 않으므로 실수 a 의 n 제곱근은 없다.

② n 이 홀수인 경우 함수 $y=x^n$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $x \geq 0$ 인 범위에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

(i) $a > 0$ 일 때, 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 한 점에서 만나므로 실수 a 의 n 제곱근은 $\sqrt[n]{a}$ (양수)이다.

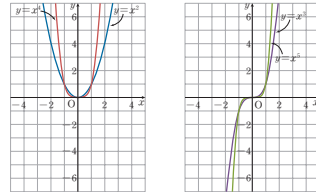
(ii) $a = 0$ 일 때, 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 원점에서 만나므로 실수 a 의 n 제곱근은 0이다.

(iii) $a < 0$ 일 때, 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 한 점에서 만나므로 실수 a 의 n 제곱근은 $\sqrt[n]{a}$ (음수)이다.

이상에서 n 이 홀수인 경우 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 오직 $\sqrt[n]{a}$ 하나뿐이다.

이제 함수 $y=x^n$ 의 그래프를 이용하여 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것을 찾아 보자.

[함께하기] 다음은 네 함수 $y=x^2, y=x^3, y=x^4, y=x^5$ 의 그래프이다.



[활동 1] x 축에 평행한 직선 $y=a$ 를 그은 후, 이 직선과 주어진 네 함수의 그래프의 교점의 개수를 각각 조사해 보자.

[활동 2] 활동 1의 결과로부터 알 수 있는 사실을 말해 보자.

실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$ 의 실근이므로 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

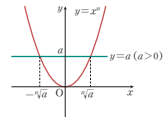
따라서 다음과 같이 n 이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 함수 $y=x^n$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표를 구하면, a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것을 찾을 수 있다.

1

① n 이 짝수인 경우

함수 $y=x^n$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다.

(i) $a > 0$ 일 때, a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 양수와 음수의 두 개가 있고, 이것을 각각 $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$



와 같이 나타낸다.

(ii) $a = 0$ 일 때, a 의 n 제곱근은 0 하나뿐이다.

즉, $\sqrt[n]{0}=0$ 이다.

(iii) $a < 0$ 일 때, a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

13

(문제 풀이)

문제 3

[주안점] 실수 a 의 값이 주어질 때 $\sqrt[n]{a}$ 의 값을 구할 수 있게 한다.

[풀이] (1) 8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 2이므로

$$\sqrt[3]{8}=2$$

(2) 81의 네제곱근 중에서 실수인 것은 3, -3 이므로

$$\sqrt[4]{81}=3$$

(3) -32 의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 -2 이므로

$$\sqrt[5]{-32}=-2$$

(4) $\frac{1}{16}$ 의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=-\frac{1}{2}$$

[답] (1) 2 (2) 3 (3) -2 (4) $-\frac{1}{2}$

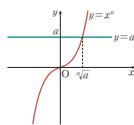
2

② n 이 홀수인 경우

① n 이 홀수일 때,
 $y=x^n$ 에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면
 $-y=(-x)^n=-x^n$
 즉, $y=x^n$
 이므로 함수 $y=x^n$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $y=x^n$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다.
 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나뿐이고, 이것을 $\sqrt[n]{a}$ 와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

■ a 의 실수인 n 제곱근

n 이 2 이상인 자연수일 때,

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

② $\sqrt[n]{a}$ 는 ' n 제곱근 a '라고 읽는다.
 또, $\sqrt[n]{a}$ 는 간단히 $\sqrt{a}$ 로 나타낸다.

③ ① 16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 2, -2이므로

$$\sqrt[4]{16}=2, -\sqrt[4]{16}=-2$$

② -16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

③ -27의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -3이므로

$$\sqrt[3]{-27}=-3$$

④ n 이 홀수일 때, $\sqrt[n]{a}$ 의 부호는 a 의 부호와 일치한다.

문제 3 다음 값을 구하시오.

(1) $\sqrt[3]{8}$

(2) $\sqrt[4]{81}$

(3) $\sqrt[4]{-32}$

(4) $-\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

문제 4 전해 내려오는 이야기에 따르면 고대 그리스에서는 전염병을 퇴치하기 위하여, 아폴론 신전에 있는 정육면체 모양의 제단을 처음 제단의 부피의 2배인 정육면체 모양으로 새로 만들어야 했다고 한다. 처음 제단의 부피가 8 m^3 라 할 때, 새로 만들어야 하는 제단의 한 모서리의 길이를 구하시오.



14

문제 4

|주안점| 거듭제곱근을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| 처음 제단의 부피가 8 m^3 이므로 새로 만들어야 하는 제단의 부피는

$$2 \times 8 = 16 (\text{m}^3)$$

이때 새로 만들어야 하는 정육면체 모양의 제단의 한 모서리의 길이를 $a \text{ m}$ 라 하면

$$a^3 = 16$$

에서

$$a = \sqrt[3]{16}$$

따라서 새로 만들어야 하는 제단의 한 모서리의 길이는 $\sqrt[3]{16} \text{ m}$ 이다.

답 $\sqrt[3]{16} \text{ m}$

지도 자료

1의 n 제곱근

복소수 범위에서 1의 n 제곱근은 방정식 $x^n=1$ 의 근이다. 이 방정식의 한 복소수의 근은

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

인데, 실제로

$$\begin{aligned} \alpha^n &= \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n \\ &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

또, $1 \leq k \leq n-1$ 이면

$$(\alpha^k)^n = (\alpha^n)^k = 1^k = 1$$

이므로 $x^n=1$ 의 근은

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$$

이다.

즉, 1의 n 제곱근은

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$$

이다. 이들 근은 복소평면에서

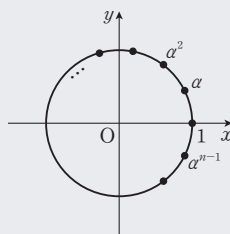
점 $(1, 0)$ 을 포함하여, 단위

원을 n 등분하는 점들의 좌표가 나타내는 복소수이다.

이때 n 이 짝수이면 $x=-1$ 이 방정식 $x^n=1$ 의 근이므로 이들 점 중에는 점 $(-1, 0)$ 이 포함된다.

그러나 n 이 홀수이면 점 $(1, 0)$ 이외에 y 좌표가 0인 점은 없다.

따라서 1의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 n 이 짝수일 때는 1, -1의 두 개이고, n 이 홀수일 때는 1의 한 개뿐이다.



읽기 자료

거듭제곱과 거듭제곱근을 나타내는 기호

a 의 거듭제곱을 $a, a^2, a^3, \dots$ 과 같이 나타내는 방식은 1637년 프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)가 도입하였다. 기호 a^n 은 거듭제곱을 간단하게 나타내고 계산할 수 있게 해준다.

근호 $\sqrt{\quad}$ 도 데카르트가 처음으로 사용하였고, 기호 $\sqrt[n]{\quad}$ 는 1690년 롤(Rolle, M., 1652~1719)이 사용하기 시작하여 18세기에 확대되었다.

● 거듭제곱근의 성질

(내용 연구)

① $a > 0$ 이고 n 이 2 이상인 자연수일 때, n 제곱하여 a 가 되는 양수는 $\sqrt[n]{a}$ 뿐이므로 제곱근의 정의에 의하여 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 이다. 이를 이용하여 거듭제곱근의 성질을 증명한다.

② 거듭제곱근의 성질은 $a > 0$, $b > 0$ 일 때만 성립함을 알게 한다.

[오개념 바로잡기] 다음의 경우에는 거듭제곱근의 성질

①, ②, ③, ④가 성립하지 않는다.

① $a < 0$, $b < 0$ 일 때

$$\text{예 } \sqrt{-2} \sqrt{-8} = \sqrt{2i} \times \sqrt{8i} = \sqrt{16i^2} = -4,$$

$$\sqrt{(-2) \times (-8)} = \sqrt{16} = 4$$

이므로

$$\sqrt{-2} \sqrt{-8} \neq \sqrt{(-2) \times (-8)}$$

② $a > 0$, $b < 0$ 일 때

$$\text{예 } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-8}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8i}} = -\frac{1}{2}i, \sqrt{\frac{2}{-8}} = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}i$$

이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-8}} \neq \sqrt{\frac{2}{-8}}$$

③ $a < 0$ 일 때

$$\text{예 } (\sqrt{-2})^6 = (\sqrt{2i})^6 = -8, \sqrt{(-2)^6} = \sqrt{64} = 8$$

이므로

$$(\sqrt{-2})^6 \neq \sqrt{(-2)^6}$$

④ $a < 0$ 일 때

$$\text{예 } \sqrt[3]{\sqrt{-64}} = \sqrt{-4} = 2i \text{이지만 } \sqrt[6]{-64} \text{는 정할 수 없으므로}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{-64}} \neq \sqrt[6]{-64}$$

③ 거듭제곱근의 성질 ①~④ 이외에 다음 성질도 성립함을 알게 한다.

$a > 0$ 이고 m , n 이 2 이상인 자연수일 때,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m} \quad (p \text{는 자연수})$$

[증명] p 가 자연수이면 거듭제곱근의 성질과 지수법칙에 의하여

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a^m})^p &= (\sqrt[n]{a^m})^p \\ &= \sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{(a^m)^p} \\ &= (\sqrt[n]{a^m})^p = a^m \end{aligned}$$

● 거듭제곱근의 성질

1

지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 성질을 알아보자.

$a > 0$ 이고 n 이 2 이상인 자연수일 때, $\sqrt[n]{a}$ 는 n 제곱하면 a 가 되는 양수이므로 $(\sqrt[n]{a})^n = a$

가 성립한다.

2

이를 이용하면 $a > 0$, $b > 0$ 이고 n 이 2 이상인 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$$

이다. 이때 $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$ 이므로 $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} > 0$ 이다.

따라서 $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ 는 ab 의 양의 n 제곱근이므로 다음이 성립한다.

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

한편, $a > 0$ 이고 m , n 이 2 이상인 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = ((\sqrt[n]{a})^m)^m = a^m$$

이다. 이때 $\sqrt[n]{a} > 0$ 이므로 $(\sqrt[n]{a})^m > 0$ 이다.

따라서 $(\sqrt[n]{a})^m$ 은 a^m 의 양의 n 제곱근이므로 다음이 성립한다.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

오개념 바로잡기
 $\sqrt[n]{a^m}$ 과 $\sqrt[n]{a^m}$ 은 같을까?

문제 5 $a > 0$, $b > 0$ 이고 m , n 이 2 이상인 자연수일 때, 다음이 성립함을 보이시오.

$$(1) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(2) \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

3

● 거듭제곱근의 성질

$a > 0$, $b > 0$ 이고 m , n 이 2 이상인 자연수일 때,

$$\text{① } \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\text{② } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{③ } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\text{④ } \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\text{예 ① } \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 8} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2 \quad \text{② } \sqrt[3]{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$\text{③ } (\sqrt[3]{9})^2 = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81} = 3 \quad \text{④ } \sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[3]{2^2} = 2$$

15

이때 $a > 0$ 에서 $\sqrt[n]{a^m} > 0$ 이므로 $\sqrt[n]{a^m}$ 은 a^m 의 양의 n 제곱근이다.

$$\text{따라서 } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

생각 독독

$\sqrt[n]{a^m}$ 은 a^m 의 n 제곱근이고 $\sqrt[m]{a^n}$ 은 a^n 의 m 제곱근이므로 서로 다르다.

(문제 풀이)

문제 5

[주안점] 거듭제곱근의 성질을 증명할 수 있게 한다.

[풀이] (1) 지수법칙에 의하여

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

이때 $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$ 에서 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} > 0$ 이다.

따라서 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 는 $\frac{a}{b}$ 의 양의 n 제곱근이므로

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

문제 6 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{125} \times \sqrt[4]{5}$

(2) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$

(3) $(\sqrt[4]{49})^3$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{1024}}$

문제 7 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{54} - 6\sqrt[4]{2}$

(2) $2\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{2}$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} + 2\sqrt[3]{3}$

(4) $(\sqrt[3]{11})^4 - \sqrt[3]{121}$

문제 8 다음 계산에서 잘못된 부분을 찾아 그 이유를 설명하고 바르게 고치시오.

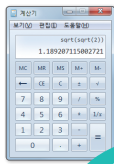
$$\sqrt[4]{(-6)^4} + \sqrt[4]{-2^4} = -6 + 4 = -2$$



오른쪽 그림과 같은 컴퓨터 계산기 프로그램에서 $\sqrt[4]{2}$ 의 어려운 값을 구할 수 있다.

활동 ① $\sqrt[4]{2}$ 의 어려운 값을 구할 때, $\sqrt[4]{2}$ 를 두 번 누르는 이유를 말해 보자.

활동 ② $\sqrt[4]{2}$ 의 어려운 값을 구하려면 $\sqrt[4]{2}$ 를 누른 후 $\sqrt[4]{2}$ 를 몇 번 눌러야 하는지 말해 보자.



16

(2) 지수법칙에 의하여

$$(m\sqrt[n]{a})^{mn} = \{(m\sqrt[n]{a})^m\}^n = (m\sqrt[n]{a})^n = a$$

이때 $m\sqrt[n]{a} > 0$ 에서 $m\sqrt[n]{a}$ 는 a 의 양의 mn 제곱근이므로

$$m\sqrt[n]{a} = mn\sqrt[n]{a}$$

답 풀이 참조

문제 6

|주안점| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\sqrt[4]{125} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

(2) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(3) $(\sqrt[6]{49})^3 = \sqrt[6]{49^3} = \sqrt[6]{7^6} = 7$

(4) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{1024}} = \sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

답 (1) 5 (2) 4 (3) 7 (4) 2

문제 7

|주안점| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\sqrt[3]{54} - 6\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} - 6\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = -3\sqrt[3]{2}$

(2) $2\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2^4 \times 2} + \sqrt[4]{3^4 \times 2} - \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2} = 6\sqrt[4]{2}$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} + 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^3}} + 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3}} + 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{3} + 2\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[4]{3}$

(4) $(\sqrt[3]{11})^4 - \sqrt[3]{\sqrt[4]{121}} = \sqrt[3]{11^4} - \sqrt[3]{\sqrt[4]{11^2}} = \sqrt[3]{11^3 \times 11} - \sqrt[3]{\sqrt[4]{11^2}} = 11\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{11} = 10\sqrt[3]{11}$

답 (1) $-3\sqrt[3]{2}$ (2) $6\sqrt[4]{2}$ (3) $3\sqrt[4]{3}$ (4) $10\sqrt[3]{11}$

문제 8

|주안점| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 잘못된 부분을 찾아 이유를 설명하고 바르게 고칠 수 있게 한다.

|풀이| $(-6)^4 = 6^4$ 이고, $\sqrt[n]{a}$ 에서 n 이 홀수이면 $\sqrt[n]{a}$ 의 부호는 a 의 부호와 일치하므로

$$\sqrt[4]{(-6)^4} + \sqrt[3]{-2^6} = \sqrt[4]{6^4} - 2^2 = 6 - 4 = 2$$

답 풀이 참조

생각 넓히기

|지도 방향| 제곱근을 구할 수 있는 계산기로 주어진 수의 네제곱근, 16제곱근의 어려운 값을 구할 때, 제곱근의 성질을 활용할 수 있음을 이해하게 한다.

|풀이| ① $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$ 이기 때문이다.

② $\sqrt[16]{2} = \sqrt[8]{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$

이므로 $\sqrt[16]{2}$ 의 어려운 값을 구하려면 $\sqrt[4]{2}$ 를 누른 후 $\sqrt[4]{2}$ 를 4번 눌러야 한다.

답 ① 풀이 참조 ② 4번

소단원 지도 개관

지도 목표

- ① 지수가 정수, 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하게 한다.
- ② 정수, 유리수, 실수 지수에 대하여 지수법칙이 성립함을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

- ① 정수 지수를 도입할 때는 지수가 자연수일 때의 지수법칙이 성립하도록 정의하고, 유리수 지수를 도입할 때는 지수가 정수일 때의 지수법칙이 성립하도록 정의함을 이해하게 한다.
- ② 0^0 은 정의하지 않는다.
- ③ 지수가 유리수 및 실수인 경우는 밑이 양수인 조건이 필요함을 이해하게 한다.
- ④ 실수 지수를 도입할 때는 직관적으로 소개하고 지나치게 엄밀하게 다루지 않는다.
- ⑤ 지수법칙을 이용한 계산은 간단히 다룬다.

준비하기

[주안점] 지수가 자연수일 때 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있는지 확인한다.

[풀이] (1) $2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

(2) $2^6 \div 2^2 = 2^{6-2} = 2^4$

(3) $(2^5)^2 = 2^{5 \times 2} = 2^{10}$

(4) $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4$

답 (1) 5 (2) 4 (3) 10 (4) 6

지수가 정수인 경우

평가기준

- | | |
|---|---|
| 상 | 지수가 정수, 유리수, 실수로 확장되는 과정을 설명할 수 있고, 지수법칙을 이용한 문제 해결 과정을 설명할 수 있다. |
| 중 | 실수까지 확장된 지수법칙을 이용하여 다양한 식을 간단히 나타낼 수 있다. |
| 하 | 유리수까지 확장된 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. |

02 지수의 확장

전달 목표

- 지수가 정수, 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.
- 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

준비하기

다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

- (1) $2^3 \times 2^2 = 2^{\square}$ (2) $2^6 \div 2^2 = 2^{\square}$
(3) $(2^5)^2 = 2^{\square}$ (4) $2^4 \times 3^4 = \square^4$

평가하기

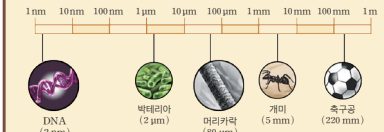
정확한 양을 표현하기 위해 자연수에서 정수, 유리수, 실수로 수의 범위가 확장되었다.

마찬가지로 정확한 양을 거듭제곱으로 나타내기 위하여 지수를 자연수에서 정수, 유리수, 실수로 확장할 필요가 있다.

지수가 정수인 경우

생각 열기

머리카락의 굵기는 평균 $80 \mu\text{m}$ (마이크로미터)이고 DNA의 폭은 2 nm (나노미터)라고 한다. 여기서 $1 \mu\text{m}$ 는 $\frac{1}{10^6} \text{ m}$ 이고, 1 nm 은 $\frac{1}{10^9} \text{ m}$ 이다.



① 1 m 은 $1 \mu\text{m}$ 의 몇 배인지 살펴 보자.

② 다음은 1 nm 가 몇 μm 인지 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$1 \text{ nm} = \frac{1}{10^9} \text{ m} = \frac{1}{10^9} \times 10^{\square} \mu\text{m} = \frac{1}{10^{\square}} \mu\text{m}$$

지금까지는 지수가 양의 정수인 경우만 다루었다. 이제 지수의 범위를 0 또는 음의 정수까지 확장해 보자.

a 가 0이 아닌 실수일 때, 양의 정수 m, n 에 대하여 지수법칙

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \dots\dots ①$$

이 성립한다.

그런데 $m=0$ 일 때 ①이 성립한다고 하면

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$$

이므로 $a^0=1$ 로 정의할 수 있다.

또, 양의 정수 n 에 대하여 $m=-n$ 일 때도 ①이 성립한다고 하면

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

이므로 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 로 정의할 수 있다.

$$\text{③ } a^{-1} = \frac{1}{a} \text{이다.}$$

생각 열기

[지도 방향] $\frac{1}{10^6}$ 을 나타내는 접두어 μ (마이크로)를 이용하여 1 m 은 $1 \mu\text{m}$ (마이크로미터)의 몇 배인지 알아보고, 1 nm (나노미터)는 몇 μm 인지 알아봄으로써 자연스럽게 음의 정수인 지수의 필요성을 인식하게 한다.

① $1 \mu\text{m}$ 은 $\frac{1}{10^6} \text{ m}$ 이므로 1 m 은 $1 \mu\text{m}$ 의 10^6 배이다.

② 1 nm 은 $\frac{1}{10^9} \text{ m}$ 이므로

$$1 \text{ nm} = \frac{1}{10^9} \text{ m} = \frac{1}{10^9} \times 10^{\square} \mu\text{m} = \frac{1}{10^{\square}} \mu\text{m}$$

(내용 연구)

① $a \neq 0$ 이고, n 이 양의 정수일 때,

$$a^n = a^{n+0} = a^n a^0$$

이 성립하려면 $a^0=1$ 로 정의해야 함을 이해하게 한다.

② $a \neq 0$ 이고, n 이 양의 정수일 때, $a^n \times \frac{1}{a^n} = 1$ 이므로

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

3 따라서 지수가 0 또는 음의 정수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

4 0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

① $2^0 = 1$ ② $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

문제 1 다음 값을 구하시오.

(1) $(\sqrt[3]{5})^0$ (2) $(-2)^0$
(3) $(\frac{3}{4})^{-2}$ (4) $(-3)^{-3}$

다음을 통해 지수가 음의 정수인 경우에도 지수법칙이 성립함을 확인해 보자.

함께하기 $a \neq 0$ 이고 m, n 이 음의 정수일 때,

$m = -p$, $n = -q$ (p, q 는 양의 정수)

라 하면 다음이 성립한다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{-p} a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} \\ &= \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-\square} \\ &= a^{-p-q} = a^{-(p)+(-q)} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}} \\ &= a^{pq} = a^{(-p)(-q)} \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

③ m, n 중에서 하나만 음의 정수인 경우에도 위와 같은 방법으로 지수법칙이 성립함을 보일 수 있다.

위의 활동에서 $a \neq 0$ 이고 m, n 이 음의 정수일 때,

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

이 성립함을 알 수 있다. 이것은 지수가 0일 때도 성립한다.

문제 2 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 이고 m, n 이 0 또는 음의 정수일 때, 다음 지수법칙이 성립함을 보이시오.

(1) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (2) $(ab)^n = a^n b^n$

18

이 성립하려면 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 로 정의해야 함을 이해하게 한다.

3 a^0 와 a^{-n} 은 다음과 같이 규칙성을 이용하여 정의할 수도 있다.

지수가 1씩 줄어든다.	$a^2 = a \times a$ $a^1 = a$ $a^0 = 1$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$	a로 나눈다.

4 지수가 0 또는 음의 정수인 경우 밑은 0이 아니어야 함에 유의하게 한다.

(문제 풀이)

문제 1

|주안점| 지수가 0 또는 음의 정수일 때, 지수의 정의를 이용하여 수의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(\sqrt[3]{5})^0 = 1$

(2) $(-2)^0 = 1$

(3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}$

(4) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$

답 (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{16}{9}$ (4) $-\frac{1}{27}$

문제 2

|주안점| 지수가 0 또는 음의 정수일 때, 지수법칙을 증명할 수 있게 한다.

|증명| $m = -p$, $n = -q$ (p, q 는 양의 정수)라 하자.

$$\begin{aligned} (1) a^m \div a^n &= a^{-p} \div a^{-q} = \frac{1}{a^p} \div \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p} \times a^q \\ &= a^q \times a^{-p} = a^{q-p} \\ &= a^{-n+m} = a^{m-n} \end{aligned}$$

이것은 지수가 0일 때도 성립한다.

$$\begin{aligned} (2) (ab)^n &= (ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q b^q} \\ &= \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} = a^{-q} b^{-q} = a^n b^n \end{aligned}$$

이것은 지수가 0일 때도 성립한다.

함께하기

|지도 방향| 지수가 음의 정수인 경우에도 지수법칙이 성립함을 확인할 수 있게 한다.

|풀이| $a^m a^n = a^{-p} a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} \\ &= a^{-p-q} = a^{(-p)+(-q)} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}} \\ &= a^{pq} = a^{(-p)(-q)} \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

답 $p+q, p+q, q, pq, pq$

내용 연구

- 1 지수가 정수일 때의 지수법칙에서 ①, ③, ④는 지수가 자연수일 때와 같지만, ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 의 경우에는 지수가 자연수일 때 세 가지 경우로 구분하여 나타낸 것을 지수의 범위가 정수로 확장되면서 하나의 식으로 나타낼 수 있게 된 것임을 이해하게 한다.

m, n 이 자연수	m, n 이 정수
$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$	$a^m \div a^n = a^{m-n}$

문제 풀이

문제 3

[주안점] 지수가 정수일 때, 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

[풀이] (1) $3^7 \times 3^{-4} = 3^3 = 27$

$$(2) 2^2 \div (2^{-1})^{-3} = 2^2 \div 2^3 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$(3) (a^{-3}b^2)^{-2} = a^6b^{-4} = \frac{a^6}{b^4}$$

$$(4) (ab)^5 \div (a^2b^{-3})^{-2} = a^5b^5 \div a^{-4}b^6 = a^9b^{-1} = \frac{a^9}{b}$$

답 (1) 27 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{a^6}{b^4}$ (4) $\frac{a^9}{b}$

읽기 자료

생활 속 지수

생활 주변에는 매우 크거나 매우 작은 양이 수로 나타나는 것들이 있는데 이 값들을 간단하게 표현하기 위해 지수로 나타내면 편리하다.

다음은 우리 주변에서 자주 접하는 지수이다.

- ① 지구의 질량은 약 5.97×10^{24} kg이다.
- ② 지구에서 태양까지의 거리는 약 1.5×10^8 km이다.
- ③ 지구상에 있는 육지의 전체 넓이는 1.49×10^8 km²이다.
- ④ ¹²C(탄소 12) 원자 6.02×10^{23} 개의 질량은 약 12g이다.
- ⑤ 전자의 질량은 9.107×10^{-28} g이다.

이처럼 현대 정보 사회에서 핵심을 이루고 있는 정보 기술(IT), 나노 기술(NT), 생명 기술(BT) 등에서 정보량을 나타낼 때나 미세한 자료의 크기를 나타낼 때 거듭제곱을 사용하지 않을 수 없다. 그리고 이러한 수들을 이용하여 계산할 때는 지수법칙이 유용하게 사용된다.

일반적으로 지수가 정수일 때도 다음 지수법칙이 성립한다.

1

지수가 정수일 때의 지수법칙

$a \neq 0, b \neq 0$ 이고 m, n 이 정수일 때,

- ① $a^m a^n = a^{m+n}$
- ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- ③ $(a^m)^n = a^{mn}$
- ④ $(ab)^n = a^n b^n$

③ ④는 m, n 의 대소에 관계없이 성립한다.

$$(예) ① 2^5 \times 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2 = 4$$

$$② 3^{-2} \div 3 = 3^{-2-1} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{81}$$

$$③ a \neq 0 \text{ 일 때, } (a^{-2})^3 = a^{-2 \times 3} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

$$④ a \neq 0, b \neq 0 \text{ 일 때, } (ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2} = a^{-2}b^{-6} = \frac{1}{a^2b^6}$$

문제 3 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0, b \neq 0$)

$$(1) 3^7 \times 3^{-4}$$

$$(2) 2^2 \div (2^{-1})^{-3}$$

$$(3) (a^{-3}b^2)^{-2}$$

$$(4) (ab)^5 \div (a^2b^{-3})^{-2}$$

지수가 유리수인 경우

지수의 범위를 유리수까지 확장해 보자.

2

$a > 0$ 일 때, 두 정수 p, q 에 대하여 지수법칙

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

3

이 성립한다. 지수가 유리수인 경우에도 이 등식이 성립한다고 하면 두 정수 m, n ($n \geq 2$)에 대하여

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

이므로, $a^{\frac{m}{n}}$ 은 a^m 의 n 제곱근이다. 즉, 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

4

(정의) 지수가 유리수일 때, $a < 0$ 이면

$$5 = (5^2)^{\frac{1}{2}} = ((-5)^2)^{\frac{1}{2}} = (-5)^{2 \times \frac{1}{2}} = -5$$

와 같은 모순이 생긴다. 따라서 $a > 0$ 인 조건이 필요하다.

19

지수가 유리수인 경우

내용 연구

- 2 유리수 지수를 도입할 때는 이미 배운 지수법칙이 성립하도록 정의해야 함을 이해하게 한다.

- 3 유리수 지수를 정리할 때, 두 양의 정수 m, n 에 대하여

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{-m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

이 성립한다.

따라서 임의의 유리수 r 에 대하여 $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ 이다.

- 4 지수가 유리수의 범위로 확장되면 밑은 양수로 제한됨에 유의하게 한다.

문제 풀이

문제 4

[주안점] 지수가 유리수일 때, 지수의 정의를 이용하여 수의 값을 구할 수 있게 한다.

따라서 지수가 유리수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

유리수인 지수

$a > 0$ 이고 m, n ($n \geq 2$)이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{특히 } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

① $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$

② $9^{-\frac{3}{2}} = 9^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{9^{-3}} = \sqrt{(3^2)^{-3}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

문제 4 다음 값을 구하시오.

(1) $4^{\frac{3}{2}}$ (2) $125^{-\frac{2}{3}}$ (3) $81^{0.75}$ (4) $16^{-0.5}$

다음을 통해 지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립함을 확인해 보자.

함께하기 $a > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때,

$$r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q} \quad (m, n, p, q \text{는 정수}, n \geq 2, q \geq 2)$$

라 하면 다음이 성립한다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} \\ &= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^r)^s &= (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}} \\ &= \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} \\ &= \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}} \\ &= a^{rs} \end{aligned}$$

위의 활동에서 $a > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때,

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

이 성립함을 알 수 있다.

문제 5 $a > 0, b > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때, 다음 지수법칙이 성립함을 보시오.

(1) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

(2) $(ab)^r = a^r b^r$

20

|풀이| (1) $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{(2^2)^3} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

(2) $125^{-\frac{2}{3}} = 125^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{125^2}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{(5^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(5^2)^3}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

(3) $81^{0.75} = 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3}$

$$= \sqrt[4]{(3^3)^4} = 3^3 = 27$$

(4) $16^{-0.5} = 16^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{16^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

답 (1) 8 (2) $\frac{1}{25}$ (3) 27 (4) $\frac{1}{4}$

문제 5

|주안점| 지수가 유리수일 때, 지수법칙을 증명할 수 있게 한다.

|증명| $r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q}$ (m, n, p, q 는 정수, $n \geq 2, q \geq 2$)라 하자.

(1) $a^r \div a^s = a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \div a^{\frac{np}{nq}} = \frac{a^{\frac{mq}{nq}}}{a^{\frac{np}{nq}}}$

$$= \frac{nq \sqrt[nq]{a^{mq}}}{nq \sqrt[nq]{a^{np}}} = nq \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

$$= a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{r-s}$$

(2) $(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m}$

$$= \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m}$$

$$= a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r$$

함께하기

|지도 방향| 지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립함을 확인할 수 있게 한다.

|풀이| $a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}}$

$$= nq \sqrt[nq]{a^{mq}} nq \sqrt[nq]{a^{np}} = nq \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

$(a^r)^s = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}}$

$$= \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}} = a^{rs}$$

답 $mq, np, mq+np, mq+np, nq, mp, \frac{mq}{nq}$

지도 자료

0^0 의 값

수학에서 0^0 의 값은 정의하지 않는다.

0^0 의 값을 정의할 수 있다면 그것은 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} x^y$ 과 같아야 하는데, 이 극한값은 존재하지 않으므로 0^0 의 값을 정할 수 없다.

그런데 $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ 의 극한값은 존재하며, 그 값은 1이므로 컴퓨터나 공학에서는 $0^0 = 1$ 로 정하는 경우가 있다.

$x > 0$ 일 때 $y = x^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$ 임을 알 수 있다.

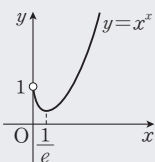
또, $\ln y = x \ln x$ 이므로 로피탈 정리에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$ 임을 알 수도 있다.



문제 풀이

문제 6

[주안점] 지수가 유리수일 때, 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

[풀이] (1) $5^{-\frac{3}{2}} \times 5^{0.5} = 5^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

(2) $3^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 3$

(3) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2$

(4) $a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} \times (a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$
 $= a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} \times (a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} (b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$
 $= a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$
 $= a^{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} b^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}$
 $= a^{-1} b$
 $= \frac{b}{a}$

[답] (1) $\frac{1}{5}$ (2) 3 (3) 2 (4) $\frac{b}{a}$

문제 7

[주안점] 지수가 유리수일 때, 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

[풀이] (1) $\sqrt[4]{ab^3} \times \sqrt[12]{a^7b^5} \div \sqrt[3]{a^5b}$
 $= \sqrt[4]{ab^3} \times \sqrt[12]{a^7b^5} \div \sqrt[6]{a^5b}$
 $= (ab^3)^{\frac{1}{4}} \times (a^7b^5)^{\frac{1}{12}} \div (a^5b)^{\frac{1}{6}}$
 $= a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{7}{12}} b^{\frac{5}{12}} \div a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{6}}$
 $= a^{\frac{1}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{6}} b^{\frac{3}{4} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6}}$
 $= a^{\frac{3}{12} + \frac{7}{12} - \frac{10}{12}} b^{\frac{9}{12} + \frac{5}{12} - \frac{2}{12}}$
 $= b$

(2) $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$
 $= \{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$
 $= (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$
 $= (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2$
 $= a - b$

[답] (1) b (2) $a - b$

일반적으로 지수가 유리수일 때도 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때,

① $a^r a^s = a^{r+s}$

② $a^r \div a^s = a^{r-s}$

③ $(a^r)^s = a^{rs}$

④ $(ab)^r = a^r b^r$

[예제 1] ① $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

② $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}})^6 = (a^{\frac{1}{3}})^6 (b^{\frac{1}{3}})^6 = a^{\frac{1}{3} \times 6} b^{\frac{1}{3} \times 6} = a^2 b^2$

문제 6 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a > 0, b > 0$)

(1) $5^{-\frac{2}{3}} \times 5^{0.5}$

(2) $3^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$

(3) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

(4) $a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} \times (a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

예제 1 $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{a^2 b^3} \div \sqrt[3]{a^2 b}$

(2) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

[풀이] (1) $\sqrt[3]{a^2 b^3} \div \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b^3} \div \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b} = a^{\frac{2}{3}} b^1 \div (a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}})$
 $= a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{3}} \div a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} b^{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}}$
 $= a^0 b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}}$

(2) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})[(a^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2]$
 $= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3$
 $= a - b$

[답] (1) a (2) $a - b$

문제 7 $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{ab^3} \times \sqrt[12]{a^7b^5} \div \sqrt[3]{a^5b}$

(2) $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

21

지수가 실수인 경우

내용 연구

① 지수가 무리수인 경우에는 그 무리수에 한없이 가까워지는 수들을 나열해 본 후 이 수들의 각 항을 지수로 갖는 수가 어떤 일정한 수에 가까워짐을 공학적으로 활용하여 직관적으로 이해하게 한다.

② $a > 0$ 일 때, 임의의 실수 x 에 대하여 a^x 의 값은 단 하나로 정해진다.

③ a^x 에서 지수 x 의 값의 범위에 따른 밑 a 의 조건을 정리하면 다음과 같다.

지수 x	양의 정수	정수	유리수	실수
밑 a	실수	$a \neq 0$	$a > 0$	$a > 0$

④ 지수가 실수일 때의 지수법칙은 지수가 유리수일 때의 지수법칙이 확장된 것으로 이해하게 하고, 이를 지나치게 자세하게 다루지 않도록 한다.

지수가 실수인 경우

1

지수의 범위가 실수까지 확장됨을 $3^{\sqrt{2}}$ 을 통하여 알아 보자.

$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$ 이므로 $\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워지는 유리수

1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...

를 지수로 갖는 수

$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, \dots$

은 오른쪽 표와 같이 어떤 일정한 수에 가까워진다는 사실이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$ 으로 정의한다.

이와 같은 방법으로 $a > 0$ 이고 x 가 실수일 때, a^x 을 정의할 수 있다.

4

일반적으로 지수가 실수일 때도 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 실수일 때의 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때,

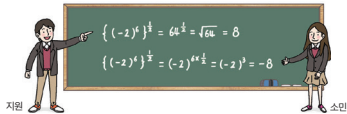
- ① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y = a^{x-y}$
③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $(ab)^x = a^x b^x$

문제 8 $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

- (1) $3^{2\sqrt{3}} \times 3^{2-2\sqrt{3}}$ (2) $a^{\sqrt{3}+1} \div a^{\sqrt{3}-2}$
(3) $\{(\sqrt{5})^2\}^{\sqrt{8}}$ (4) $(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}})^{-\sqrt{2}}$

생각 넓히기

다음은 지원이와 소민이가 각각 $\{(-2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$ 을 계산한 것이다.



활동 지원이와 소민이 중에서 잘못 계산한 사람은 누구인지 말하고, 그 이유를 말해 보자.

x	3^x
1	3
1.4	4.655536722
1.41	4.706965002
1.414	4.727695035
1.4142	4.728733930
$\vdots$	$\vdots$
$\sqrt{2}$	$3^{\sqrt{2}}$

수학 이야기

순식간은 얼마나 빠를까?

크기	이름	크기	이름
10^0	일(一)	10^{-1}	분(分)
10^1	십(十)	10^{-2}	리(釐)
10^2	백(百)	10^{-3}	호(毫)
10^3	천(千)	10^{-4}	사(絲)
10^4	만(萬)	10^{-5}	홍(忽)
10^5	억(億)	10^{-6}	미(微)
10^{12}	조(兆)	10^{-7}	섬(纖)
10^{16}	경(京)	10^{-8}	사(沙)
10^{19}	해(垓)	10^{-9}	진(塵)
10^{24}	자(穰)	10^{-10}	에(埃)
10^{26}	양(壘)	10^{-11}	모(渺)
10^{27}	구(溝)	10^{-12}	막(漠)
10^{28}	간(澗)	10^{-13}	모호(模胡)
10^{30}	정(正)	10^{-14}	준손(澗塵)
10^{31}	재(載)	10^{-15}	수유(須臾)
10^{32}	극(極)	10^{-16}	순식(瞬息)
10^{33}	항하사(恒河沙)	10^{-17}	탄지(彈指)
10^{34}	아승가(阿僧祇)	10^{-18}	찰나(刹那)
10^{35}	나유타(那由他)	10^{-19}	육덕(六德)
10^{36}	불가사의(不可思議)	10^{-20}	허공(虛空)
10^{38}	무량수(無量數)	10^{-21}	청정(淸淨)

'찰나의 순간', '순식간에 벌어진 일'과 같이 아주 짧은 시간을 표현할 때, 찰나 또는 순식이라는 말을 쓴다. 그런데 찰나와 순식은 어느 정도의 짧은 시간을 나타낼까? 또, 어떤 차이가 있을까?

동양에서는 수를 읽을 때 주로 중국과 인도에서 전래한 수사(數詞, 사물의 수량이나 순서를 나타내는 품사)를 이용하는데, 왼쪽 표와 같이 찰나(刹那)는 10^{-10} 초, 순식(瞬息)은 10^{-16} 초를 나타낸다. 즉, 순식은 찰나보다 100배 더 긴 시간을 나타낼 수 있다.

찰나가 어느 정도의 시간인지 정확한 정의는 없으나, 대략 $\frac{1}{75}$ 초 또는 약 0.013초 정도의 시간으로 알려져 있다.

형하사, 나유타, 불가사의, 무량수 등은 불교에서 나온 용어로 '헤아릴 수 없이 많다'는 뜻으로 이해할 수 있는데, '형하사'는 인도 갠지스강에 있는 모래알의 수만큼 많다는 뜻이라고 한다.

한편, 영어에서는 10의 거듭제곱에서 사용하는 어근 ten (10), hundred (10²), thousand (10³), million (10⁶), billion (10⁹)을 사용하여 수를 읽는다.

특히, 구골(gogol)은 10¹⁰⁰, 구골플렉스(gogolplex)는 10^{gogol}, 즉 10^{10¹⁰⁰}을 나타내는 수이고, 구골플렉시언(gogolplexian)은 10^{gogolplex}을 나타내는 수로 1 다음에 0이 1조 개가 붙는 아주 큰 수이다.

(출처: 김병덕, '우라나라 명수법에 대한 소고(叢考)')

수학 이야기 → 순식간은 얼마나 빠를까?

기술력이 향상되고 국가간 교역의 규모가 커지면서 아주 크거나 작은 수를 표기하는 방법을 전 세계적으로 통일할 필요가 생겨 국제단위계(國際單位系, International System of Units)가 제정되었고, 국제단위계에서 사용하는 접두어는 다음과 같다.

크기	접두어	기호	크기	접두어	기호
10^1	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

(문제 풀이)

문제 8

|주안점| 지수가 실수일 때, 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $3^{2\sqrt{3}} \times 3^{2-2\sqrt{3}} = 3^{2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}} = 3^2 = 9$

(2) $a^{\sqrt{3}+1} \div a^{\sqrt{3}-2} = a^{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-2)} = a^3$

(3) $\{(\sqrt{5})^2\}^{\sqrt{8}} = (\sqrt{5})^{\sqrt{2} \times \sqrt{8}} = (\sqrt{5})^4 = 5^{\frac{1}{2} \times 4} = 25$

(4) $(a^{\frac{\sqrt{2}}{2}} b^{\frac{1}{\sqrt{2}}})^{-\sqrt{2}} = a^{\frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\sqrt{2})} b^{\frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2})} = a^{-1} b^{-2} = \frac{1}{ab^2}$

답 (1) 9 (2) a^3 (3) 25 (4) $\frac{1}{ab^2}$

생각 넓히기

|지도 방향| 지수가 유리수인 경우에는 밑이 양수일 때만 지수법칙이 성립함을 이용하여 잘못 계산된 식을 찾을 수 있게 한다.

|풀이| 소민, 지수가 유리수일 때의 지수법칙은 밑이 양수인 경우에만 성립하므로 $(-2)^6$ 을 먼저 계산한 다음 그 값에 $\frac{1}{2}$ 제곱을 해야 한다.

답 풀이 참조

지도 목표

- 로그의 뜻을 알게 한다.
- 로그의 정의를 이용하여 간단한 로그의 값을 구할 수 있게 한다.
- 로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 유도하고, 이것을 이해하게 한다.
- 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 식의 계산을 할 수 있게 한다.
- 로그의 정의를 이용하여 로그의 밑의 변환을 유도하고, 이것을 이해하게 한다.

지도상의 유의점

- 로그의 뜻은 지수의 개념과 관련지어 생각하게 한다.
- 로그의 값을 구할 때, 처음에는 지수를 사용하여 나타내게 한 후 $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$ 과 같은 특별한 로그의 값은 기억할 수 있도록 한다.
- 로그가 정의되려면 밑은 1이 아닌 양수이고, 진수는 양수이어야 함에 유의하도록 한다.
- 로그의 성질은 지수의 성질과 관련지어 지도하고, 이를 능숙하게 활용할 수 있게 한다.
- 로그는 복잡한 수의 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈으로 바꾸어서 계산을 간편하게 하기 위해 만든 것임을 알게 한다.

용어와 기호

- 밑(base)
- 로그(logarithm)
- 진수(眞數, antilogarithm)
- $\log_a N$

준비하기

[주안점] 거듭제곱과 지수법칙을 이용하여 알맞은 수를 구할 수 있는지 확인한다.

[풀이] (1) $27=3^3$ 이므로 $3^{\boxed{3}}=27$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{1000}} = \frac{1}{\sqrt{10^3}} = \frac{1}{10^{\frac{3}{2}}} = 10^{-\frac{3}{2}} \text{이므로}$$

$$10^{\boxed{-\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1000}}$$

답 (1) 3 (2) $-\frac{3}{2}$

03로그

[전반 목표]
로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

[준비하기]
다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.
(1) $3^{\square}=27$ (2) $10^{\square}=\frac{1}{\sqrt{1000}}$

로그

[생각 열기] 다음은 민서와 현규의 대화이다.



● 현규의 대답을 식으로 나타내어 보자.

위의 생각 열기에서 나타난 식 $2^x=10$ 에서 x 를 2와 10을 이용하여 기호로 나타내는 방법을 알아보자.

1 $a>0$, $a\neq 1$ 일 때, 양수 N 에 대하여

$$a^x=N$$

2 을 만족시키는 실수 x 는 오직 하나 존재한다. 이 수 x 를

$$\log_a N$$

으로 나타내고, a 를 밑으로 하는 N 의 로그라고 한다.

이때 N 을 $\log_a N$ 의 진수라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

3 $a>0$, $a\neq 1$, $N>0$ 일 때,
 $a^x=N \iff x=\log_a N$

4 **[참고]** 밑으로 특별한 언급 없이 $\log_a N$ 으로 쓸 때는 밑 a 와 진수 N 이 위의 조건을 모두 만족시키는 것으로 생각한다.

진수 $\rightarrow$
 $\log_a N$
밑 $\leftarrow$

24

로그

평가 기준

- | | |
|---|--|
| 상 | 로그의 성질을 유도하는 과정을 설명할 수 있고, 로그의 성질을 이용한 문제 해결 과정을 설명할 수 있다. |
| 중 | 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있다. |
| 하 | 로그의 뜻을 말할 수 있고, 로그가 포함된 간단한 수식의 값을 구할 수 있다. |

생각 열기

[지도 방향] 2를 세제곱하면 8이 되듯이 2를 x 제곱하면 100이 되는 x 의 값에서 로그의 필요성을 알게 한다.

▶ $2^x=10$

(내용 연구)

- $a>0$, $a\neq 1$ 일 때, 양수 N 에 대하여 $a^x=N$ 을 만족시키는 실수 x 의 값이 오직 하나 존재함을 직관적으로 알게 한다.
- $a^x=N$ 을 만족시키는 실수 x 가 $x=\log_a N$ 임을 강조하여 로그의 정의가 지수로부터 비롯되었음을 인식하고, 로그의 정의에 익숙해지게 한다.

log는 logarithm의 약자이다.

(기) ① $2^5=32 \iff 5=\log_2 32$
 ② $3^{-3}=\frac{1}{27} \iff -3=\log_3 \frac{1}{27}$

문제 1 다음 등식을 $x=\log_a N$ 의 꼴로 나타내시오.

(1) $(\sqrt{3})^4=9$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$ (3) $8^{\frac{1}{3}}=2$

문제 2 다음 등식을 $a^x=N$ 의 꼴로 나타내시오.

(1) $\log_2 1=0$ (2) $\log_4 16=2$ (3) $\log_{\frac{1}{3}} 81=-4$

예제 1 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 16$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

풀이 (1) $\log_2 16=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$2^x=16$
 $16=2^4$ 이므로 $x=4$
 따라서 $\log_2 16=4$ 이다.

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 9=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$
 $9=3^2=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 이므로 $x=-2$
 따라서 $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$ 이다.

답 (1) 4 (2) -2

문제 3 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_5 27$ (2) $\log_5 \frac{1}{16}$
 (3) $\log_{\frac{1}{4}} 64$ (4) $\log_5 \sqrt{125}$

25

3 $\log_a N$ 이 정의되기 위해서는 밑의 조건 $a>0, a \neq 1$ 과 진수의 조건 $N>0$ 을 모두 만족시켜야 한다.

- ① 밑의 조건: 로그의 밑은 1이 아닌 양수이어야 한다.
 ② 진수의 조건: 로그의 진수는 양수이어야 한다.

4 $a>0, a \neq 1, N>0$ 일 때만 $\log_a N$ 이 정의됨을 이해하게 하고, 특별한 언급 없이 $\log_a N$ 으로 쓸 때는 밑 a 와 진수 N 에 이 조건이 모두 포함된 것으로 보도록 지도한다.

(문제 풀이)

문제 1

|주안점| 로그의 정의를 이용하여 주어진 등식을 로그를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

|풀이| (1) $(\sqrt{3})^4=9 \iff 4=\log_{\sqrt{3}} 9$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4 \iff -2=\log_{\frac{1}{2}} 4$

(3) $8^{\frac{1}{3}}=2 \iff \frac{1}{3}=\log_8 2$

답 (1) $4=\log_{\sqrt{3}} 9$ (2) $-2=\log_{\frac{1}{2}} 4$ (3) $\frac{1}{3}=\log_8 2$

문제 2

|주안점| 로그의 정의를 이용하여 주어진 등식을 지수를 사용하여 나타낼 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\log_2 1=0 \iff 2^0=1$

(2) $\log_4 16=2 \iff 4^2=16$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} 81=-4 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

답 (1) $2^0=1$ (2) $4^2=16$ (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

문제 3

|주안점| 로그의 정의를 이용하여 주어진 로그의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\log_3 27=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$3^x=27$

$27=3^3$ 이므로 $x=3$

따라서 $\log_3 27=3$

(2) $\log_2 \frac{1}{16}=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$2^x=\frac{1}{16}$

$\frac{1}{16}=2^{-4}$ 이므로 $x=-4$

따라서 $\log_2 \frac{1}{16}=-4$

(3) $\log_{\frac{1}{4}} 64=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$\left(\frac{1}{4}\right)^x=64$

$64=4^3=\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ 이므로 $x=-3$

따라서 $\log_{\frac{1}{4}} 64=-3$

(4) $\log_5 \sqrt{125}=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$5^x=\sqrt{125}$

$\sqrt{125}=5^{\frac{3}{2}}$ 이므로 $x=\frac{3}{2}$

따라서 $\log_5 \sqrt{125}=\frac{3}{2}$

답 (1) 3 (2) -4 (3) -3 (4) $\frac{3}{2}$

【문제 풀이】

문제 4

【주안점】 로그의 정의를 이용하여 진수의 값을 구할 수 있게 한다.

【풀이】 (1) 로그의 정의에 의하여

$$\log_4 N = -3 \iff N = 4^{-3}$$

$$N = 4^{-3} = \frac{1}{64}$$

(2) 로그의 정의에 의하여

$$\log_{\frac{1}{5}} N = -2 \iff N = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$N = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$$

답 (1) $\frac{1}{64}$ (2) 25

읽기 자료

로그의 어원

로그를 만든 네이피어(Napier, J., 1550~1617)는 처음에 이것을 ‘인공의 수(numeri artificiales)’로 불렀는데 1614년에 출판한 『경이로운 로그 법칙의 기술(Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio)』이란 책에서 로그로 바꾸어 불렀다.

로그(logarithm)는 계산, 비율을 뜻하는 그리스어 logos와 산술을 뜻하는 arithmos의 합성어인데, 결국은 ‘비율 수(ratio number)’를 의미한다. 이것은 로그가 어떤 수에 일정한 수가 곱해진 비율을 나타낸다는 의미이다.

● 로그의 성질

【내용 연구】

① $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ 에서 밑이 1인 로그는 정의되지 않으므로

$$\log_1 1 \neq 0, \log_1 1 \neq 1$$

임에 주의하게 한다.

② 로그의 성질이 성립하려면 로그끼리 밑이 같고, 로그 앞에 계수가 없어야 한다는 것을 알게 한다.

예제 2 다음 등식을 만족시키는 N 의 값을 구하시오.

(1) $\log_5 N = 4$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} N = 3$

① $\log_a N = x$
 $\iff a^x = N$

풀이 (1) 로그의 정의에 의하여 $N = 5^4 = 625$

(2) 로그의 정의에 의하여 $N = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

답 (1) 625 (2) $\frac{1}{8}$

문제 4 다음 등식을 만족시키는 N 의 값을 구하시오.

(1) $\log_4 N = -3$

(2) $\log_{\frac{1}{5}} N = -2$

① $a^x = N$
 $\iff \log_a N = x$

1

로그의 성질

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 알아보자.

$a > 0$, $a \neq 1$ 일 때, $a^0 = 1$, $a^1 = a$ 이므로 로그의 정의에 의하여

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

이다.

또, $M > 0$, $N > 0$ 일 때, $\log_a M = m$, $\log_a N = n$ 으로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$a^m = M, a^n = N$$

이고 지수법칙에 의하여

$$MN = a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$M^k = (a^m)^k = a^{mk} \quad (k \text{는 실수})$$

2

이다. 따라서 로그의 정의를 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = m - n = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^k = mk = k \log_a M \quad (k \text{는 실수})$$

26

【오개념 바로잡기】 $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$ 일 때, 다음과 같이 계산하지 않도록 주의하게 한다.

(1) $\log_a M + \log_a N \neq \log_a (M + N)$

(2) $\log_a M - \log_a N \neq \log_a (M - N)$

(3) $\log_a MN \neq \log_a M \times \log_a N$

(4) $\log_a \frac{M}{N} \neq \frac{\log_a M}{\log_a N}$

(5) $\log_a M^n \neq (\log_a M)^n$

③ 로그의 성질도 밑과 진수의 조건에 유의하게 한다.

예를 들어 $a = 2$, $x = -2$ 일 때

$$\log_a x^2 = 2 \log_a x \text{라 하면}$$

$$\log_2 (-2)^2 = \log_2 4$$

$$= \log_2 2^2$$

$$= 2 \log_2 2$$

$$= 2$$

이다. 그러나 $2 \log_2 (-2)$ 는 정의되지 않으므로

$$\log_2 (-2)^2 \neq 2 \log_2 (-2)$$

임을 알게 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

3 로그의 성질

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때,

- ① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
- ② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- ③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- ④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k 는 실수)

- (예) ① $\log_5 1 = 0, \log_5 5 = 1$
 ② $\log_5 15 = \log_5 (3 \times 5) = \log_5 3 + \log_5 5 = 1 + \log_5 3$
 ③ $\log_5 \frac{5}{2} = \log_5 5 - \log_5 2 = 1 - \log_5 2$
 ④ $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2}$

문제 5 로그의 성질을 이용하여 다음 값을 구하시오.

- (1) $\log_6 \frac{1}{\sqrt{6}}$ (2) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ (3) $-\log_{\frac{1}{5}} 25$

예제 3 다음 값을 구하시오.

- (1) $\log_3 \frac{8}{3} + 2 \log_3 \sqrt{6}$ (2) $2 \log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 5 - \log_5 4\sqrt{5}$

풀이 (1) $\log_3 \frac{8}{3} + 2 \log_3 \sqrt{6} = \log_3 \frac{8}{3} + \log_3 (\sqrt{6})^2 = \log_3 \frac{8}{3} + \log_3 6$
 $= \log_3 \left(\frac{8}{3} \times 6 \right) = \log_3 16$
 $= \log_3 2^4 = 4$
 (2) $2 \log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 5 - \log_5 4\sqrt{5} = \log_5 2^2 + \log_5 5^{\frac{1}{2}} - \log_5 4\sqrt{5}$
 $= \log_5 4 + \log_5 \sqrt{5} - \log_5 4\sqrt{5}$
 $= \log_5 \frac{4 \times \sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \log_5 1$
 $= 0$



◆ 미국의 화가 록웰 (Rockwell, D.)의 로그를 이용한 작품

답 (1) 4 (2) 0

27

문제 풀이

문제 5

주안점 | 로그의 성질을 이용하여 간단한 로그의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 (1) $\log_6 \frac{1}{\sqrt{6}} = \log_6 6^{-\frac{1}{2}}$
 $= \log_6 6^{-\frac{1}{2}}$
 $= -\frac{1}{2}$

(2) $\log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 3^{\frac{3}{4}}$
 $= \log_3 3^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

(3) $-\log_{\frac{1}{5}} 25 = \log_{\frac{1}{5}} 25^{-1}$
 $= \log_{\frac{1}{5}} \left\{ \left(\frac{1}{5} \right)^{-2} \right\}^{-1}$
 $= \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5} \right)^2$
 $= 2$

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 2

지도 자료

1. 로그의 성질

로그의 정의는 지수를 이용하므로 로그의 성질은 지수법칙에서 유도된다.

지수법칙(성질)	로그의 성질
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^1 = a$	$\log_a a = 1$
$a^p \times a^q = a^{p+q}$	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
$a^p \div a^q = a^{p-q}$	$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
$(a^p)^k = a^{kp}$	$\log_a M^k = k \log_a M$

특히, 두 수의 곱, 몫의 로그가 각각의 수의 로그의 합, 차가 된다는 성질을 이용하면 두 수의 곱셈과 나눗셈을 계산할 때, 로그를 취하여 각각 덧셈과 뺄셈으로 계산한 다음 다시 로그의 역을 취하면 간편하게 계산할 수 있다.

이것이 로그가 복잡한 수의 계산에서 위력을 갖게 된 이유이다.

이러한 기본적인 생각을 학생들이 분명하게 이해하도록 지도한다.

2. 지수를 포함한 복잡한 식의 계산

지수를 포함한 복잡한 식의 계산은 로그를 이용하여 간단히 해결할 수 있다.

예 세 양수 a, b, c 에 대하여

$$a^x = b^y = c^z, c = ab$$

인 관계가 성립하면

$$a^x = b^y = c^z$$

에서

$$\log_m a^x = \log_m b^y = \log_m c^z \quad (m > 0, m \neq 1)$$

$$x \log_m a = y \log_m b = z \log_m c$$

이 식의 값을 k 라 하면, 즉

$$x \log_m a = y \log_m b = z \log_m c = k$$

에서

$$\log_m a = \frac{k}{x}, \log_m b = \frac{k}{y}, \log_m c = \frac{k}{z}$$

이므로

$$a = m^{\frac{k}{x}}, b = m^{\frac{k}{y}}, c = m^{\frac{k}{z}}$$

이때 $c = ab$ 에서

$$m^{\frac{k}{x}} \times m^{\frac{k}{y}} = m^{\frac{k}{z}}$$

$$m^{\frac{k}{x} + \frac{k}{y}} = m^{\frac{k}{z}}$$

이므로 세 실수 x, y, z 사이에

$$\frac{k}{x} + \frac{k}{y} = \frac{k}{z}, \quad \text{즉} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

인 관계가 성립한다.

【문제 풀이】

문제 6

【주안점】 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 여러 가지 식의 값을 구할 수 있게 한다.

【풀이】 (1) $3\log_4 2\sqrt{2} - \log_4 \sqrt{2}$

$$= \log_4 (2\sqrt{2})^3 - \log_4 \sqrt{2}$$

$$= \log_4 16\sqrt{2} - \log_4 \sqrt{2}$$

$$= \log_4 \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \log_4 16$$

$$= \log_4 4^2 = 2$$

(2) $\log_5 2 - \log_5 2\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$

$$= \log_5 \frac{2 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{10}}$$

$$= \log_5 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$

$$= \log_5 \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$

문제 7

【주안점】 로그의 성질을 이용하여 주어진 로그를 a , b 에 대한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

【풀이】 (1) $\log_2 100 = \log_2 (2^2 \times 5^2)$

$$= 2\log_2 2 + 2\log_2 5$$

$$= 2b + 2$$

(2) $\log_2 \frac{3}{10} = \log_2 3 - \log_2 10$

$$= \log_2 3 - \log_2 (2 \times 5)$$

$$= \log_2 3 - \log_2 2 - \log_2 5$$

$$= a - b - 1$$

(3) $\log_2 \frac{\sqrt{45}}{2} = \log_2 \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$$= \log_2 3\sqrt{5} - \log_2 2$$

$$= \log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 5 - 1$$

$$= a + \frac{b}{2} - 1$$

답 (1) $2b + 2$ (2) $a - b - 1$ (3) $a + \frac{b}{2} - 1$

문제 6 다음 값을 구하시오.

(1) $3\log_4 2\sqrt{2} - \log_4 \sqrt{2}$ (2) $\log_5 2 - \log_5 2\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$

예제 4 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_{10} 24$ (2) $\log_{10} 75$

풀이 (1) $\log_{10} 24 = \log_{10} (2^3 \times 3) = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3$

$$= 3\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 3a + b$$

(2) $\log_{10} 75 = \log_{10} (3 \times 5^2) = \log_{10} 3 + \log_{10} 5^2$

$$= \log_{10} 3 + 2\log_{10} 5 = \log_{10} 3 + 2\log_{10} \frac{10}{2}$$

$$= \log_{10} 3 + 2(1 - \log_{10} 2) = -2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 2$$

$$= -2a + b + 2$$

답 (1) $3a + b$ (2) $-2a + b + 2$

문제 7 $\log_3 3 = a$, $\log_5 5 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_5 100$ (2) $\log_5 \frac{3}{10}$ (3) $\log_5 \frac{\sqrt{45}}{2}$

수학 이야기

네이퍼의 뼈

계산을 쉽게 하고자 하는 인간의 소망은 고대부터 계산기를 만들려는 노력으로 이어졌다.

중국에서는 주판이 만들어져 널리 사용되었고, 19세기 초에 영국의 수학자 배비지(Babbage, C., 1792~1871)가 발명한 기계식 계산기인 차분 기관은 오늘날 계산기의 모태가 되었다.

한편, 계산기 말고도 계산을 편리하게 하는 보조 도구의 개발은 인류의 전 역사를 통해 널리 이루어졌다. 그중에서도 로그를 발명한 네이퍼(Napier, J., 1550~1617)는 복잡한 계산을 쉽게 할 수 있는 도구로 '네이퍼의 뼈(Napier's bones)'를 고안함으로써 기계식 계산기의 토대를 쌓았다. 네이퍼의 뼈를 이용한 계산은 35년 후 파스칼(Pascal, B., 1623~1662)이 계산기를 발명하는 데 영향을 주었으며 컴퓨터의 개발에도 큰 도움을 주게 되었다.

(출처: EBS, 2015)

28

● 로그의 밑의 변환

생각 열기

【지도 방향】 로그의 정의와 성질을 이용하여 로그의 밑을 10이 아닌 양수로 변환하여도 그 값이 같음을 알게 한다.

① $\log_{16} 64 = \log_{16} 16^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

② $\frac{\log_2 64}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^6}{\log_2 2^4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

이고

$$\frac{\log_4 64}{\log_4 16} = \frac{\log_4 4^3}{\log_4 4^2} = \frac{3}{2}$$

이므로 ①의 결과와 같다.

【내용 연구】

① $\log_a N (a > 0, a \neq 1, N > 0)$ 에서 로그의 밑의 변환을 이용하여 밑 a 를 1이 아닌 다른 양수로 바꿀 수 있고 이는 밑이 다른 로그의 계산을 할 때 유용함을 알게 한다.

로그의 밑의 변환

생각 열기 다음에 답하십시오.

① $\log_{16} 64$ 의 값을 구해 보자.

② $\frac{\log_2 64}{\log_2 16}$ 와 $\frac{\log_4 64}{\log_4 16}$ 의 값을 각각 구하고, 그 값을 ①의 결과와 비교해 보자.

1

$a > 0, a \neq 1, b > 0$ 일 때, a 를 밑으로 하는 로그 $\log_a b$ 를 1이 아닌 양수 c 를 밑으로 하는 로그로 나타내어 보자.

$$\log_a b = m, \log_c a = n \text{으로 놓으면 } b = a^m, a = c^n \text{이므로}$$

$$b = a^m = (c^n)^m = c^{nm}$$

이다. 로그의 정의에 의하여 $nm = \log_c b$ 이므로

$$(\log_a b)(\log_c a) = \log_c b$$

이다. 따라서 양변을 $\log_c a$ 로 나누면 다음이 성립한다.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

③ $a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1$
이므로
 $\log_c a \neq 0$

2

로그의 밑의 변환

$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$ 일 때, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

④ 로그의 밑을 다른 수로 바꿀 때 로그의 밑의 변환을 이용하여 편리하다.

$$\text{예시} \quad \log_8 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$$

문제 8 다음 값을 구하십시오.

$$(1) \log_{16} 36$$

$$(2) \log_{\sqrt{3}} 27$$

문제 9 1이 아닌 세 양수 a, b, c 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$(1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$(2) (\log_a b)(\log_b c)(\log_c a) = 1$$

29

2 로그가 포함된 식의 계산에서 다음 성질이 자주 이용됨을 알게 한다.

$a > 0, a \neq 1, b > 0$ 일 때

$$(1) \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b \quad (m \text{은 실수}, m \neq 0)$$

$$(2) \log_{a^m} b^m = \log_a b \quad (m \text{은 실수}, m \neq 0)$$

$$(3) \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \quad (m, n \text{은 실수}, m \neq 0)$$

$$(4) a^{\log_a b} = b$$

$$(5) a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \quad (c > 0, c \neq 1)$$

$$\begin{aligned} \text{[증명]} \quad (1) \log_{a^m} b &= \frac{\log_a b}{\log_a a^m} \\ &= \frac{\log_a b}{m \log_a a} \\ &= \frac{1}{m} \log_a b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_{a^m} b^m &= \frac{\log_a b^m}{\log_a a^m} \\ &= \frac{m \log_a b}{m \log_a a} \\ &= \log_a b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \log_{a^m} b^n &= \frac{\log_a b^n}{\log_a a^m} \\ &= \frac{n \log_a b}{m \log_a a} \\ &= \frac{n}{m} \log_a b \end{aligned}$$

$$(4) \log_a a^{\log_a b} = \log_a b \times \log_a a = \log_a b$$

$$\text{즉, } \log_a a^{\log_a b} = \log_a b \text{이므로}$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$(5) \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \times \log_c a$$

$$= \log_c a \times \log_c b$$

$$= \log_c b^{\log_c a}$$

$$\text{즉, } \log_c a^{\log_c b} = \log_c b^{\log_c a} \text{이므로}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

(문제 풀이)

문제 8

[주안점] 로그의 밑의 변환을 이용하여 로그의 값을 구할 수 있게 한다.

$$\begin{aligned} \text{[풀이]} \quad (1) \log_{216} 36 &= \frac{\log_6 36}{\log_6 216} \\ &= \frac{\log_6 6^2}{\log_6 6^3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_{\sqrt{3}} 27 &= \frac{\log_3 27}{\log_3 \sqrt{3}} \\ &= \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \end{aligned}$$

$$\text{답} \quad (1) \frac{2}{3} \quad (2) 6$$

문제 9

[주안점] 로그의 밑의 변환을 이용하여 로그가 포함된 등식이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

$$\text{[증명]} \quad (1) \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\begin{aligned} (2) (\log_a b)(\log_b c)(\log_c a) &= \frac{\log_a b}{\log_a a} \times \frac{\log_a c}{\log_a b} \times \frac{\log_a a}{\log_a c} = 1 \end{aligned}$$

예제 5 $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_5 16$

(2) $\log_5 9$

풀이 (1) $\log_5 16 = \frac{\log_5 16}{\log_5 3} = \frac{\log_5 2^4}{\log_5 3} = \frac{4 \log_5 2}{\log_5 3} = \frac{4a}{b}$
 (2) $\log_5 9 = \frac{\log_5 9}{\log_5 10} = \frac{\log_5 3^2}{\log_5 (2 \times 5)} = \frac{2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 5} = \frac{2b}{a+1}$
 □ (1) $\frac{4a}{b}$ (2) $\frac{2b}{a+1}$

문제 10 $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_5 \sqrt{6}$

(2) $\log_5 18$

생각 넓히기

문제 해결 · 추론 · 창의융합 · 의사소통 · 정보 처리 · 태도 및 실천

다음은 1이 아닌 세 양수 a , b , c 에 대하여 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ 임을 보이는 과정이다.

$a^{\log_b c} = x$ 라 하면 로그의 정의에 의하여

$\log_b c = \log_b x$ ①

로그의 밑의 변환에 의하여

$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$, $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ ②

①과 ②에서 $\frac{1}{\log_c b} = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ 이므로

$\log_c x = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

로그의 정의에 의하여

$x = c^{\frac{\log_c a}{\log_c b}}$

따라서 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ 이다.

활동 ① □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

활동 ② 위의 성질을 이용하여 $4^{\log_5 9}$ 의 값을 구해 보자.

탐구 & 융합

추론 · 태도 및 실천

로그의 밑과 진수에 필요한 조건

$\log_a N$ 을 정의할 때 밑 a 는 1이 아닌 양수이어야 하고 진수 N 은 양수이어야 한다. 이와 같은 조건이 왜 필요한지 그 이유를 예를 통해 알아보자.



1 밑 a 는 왜 1이 아닌 양수이어야 할까?

① $a < 0$ 인 경우

$a = -3$, $N = 5$ 라 하면 $\log_{-3} 5 = x$ 에서 $(-3)^x = 5$

이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

② $a = 0$ 인 경우

$N = 5$ 라 하면 $\log_0 5 = x$ 에서 $0^x = 5$

이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

③ $a = 1$ 인 경우

$N = 5$ 라 하면 $\log_1 5 = x$ 에서 $1^x = 5$

이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

따라서 ①, ②, ③으로부터 $\log_a N$ 에서 밑 a 는 1이 아닌 양수이어야 함을 알 수 있다.

2 진수 N 은 왜 양수이어야 할까?

① $N < 0$ 인 경우

$a = 5$, $N = -2$ 라 하면 $\log_5 (-2) = x$ 에서 $5^x = -2$

이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

② $N = 0$ 인 경우

$a = 5$ 라 하면 $\log_5 0 = x$ 에서 $5^x = 0$

이것을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

따라서 ①과 ②로부터 $\log_a N$ 에서 진수 N 은 양수이어야 함을 알 수 있다.

탐구 & 융합 $\log_{x+1} (8-x)$ 가 정의되는 정수 x 를 모두 구해 보자.

31

(문제 풀이)

문제 10

[주안점] 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 주어진 로그를 a , b 에 대한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

[풀이] (1) $\log_2 \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log_2 6 = \frac{\log_{10} (2 \times 3)}{2 \log_{10} 2} = \frac{a+b}{2a}$

(2) $\log_5 18 = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} (2 \times 3^2)}{\log_{10} \frac{10}{2}} = \frac{a+2b}{1-a}$

답 (1) $\frac{a+b}{2a}$ (2) $\frac{a+2b}{1-a}$

생각 넓히기

[지도 방향] 로그에 대한 등식을 증명하고 증명된 등식을 이해함으로써 로그가 포함된 식의 계산력을 향상시킬 수 있게 한다.

[풀이] ① $a^{\log_b c} = x$ 라 하면 로그의 정의에 의하여

$\log_b c = \log_b x$ ①

로그의 밑의 변환에 의하여

$\log_b c = \frac{1}{\log_c b}$, $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ ②

①과 ②에서 $\frac{1}{\log_c b} = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ 이므로

$\log_c x = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$

로그의 정의에 의하여 $x = c^{\log_b a}$

따라서 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ 이다.

② $4^{\log_5 9} = 9^{\log_5 4} = 9^{\log_5 2^2} = 9^2 = 81$

답 ① $\log_c b$, $\log_c b$, $\log_c a$, $\log_b a$, $\log_b a$ ② 81

탐구 & 융합 · 로그의 밑과 진수에 필요한 조건

[지도 방향] $\log_a N$ 의 밑의 조건과 진수의 조건을 확실히 이해하도록 지도한다. 즉, $\log_a N$ 에서 밑 a 가 1이 아닌 양수, 즉 $a > 0$, $a \neq 1$ 인 이유와 $\log_a N$ 에서 진수 N 이 양수, 즉 $N > 0$ 인 이유를 이해하게 한다.

[풀이] 진수 조건에서 $8-x > 0$ 이므로 $x < 8$

밑의 조건에서 $x+1 > 0$, $x+1 \neq 1$ 이므로

$x > -1$, $x \neq 0$

즉, $-1 < x < 0$ 또는 $0 < x < 8$ 이므로 정수 x 는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

답 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

04 상용로그

지도 목표

상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

지도 평가

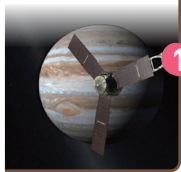
다음 ☐ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $\log_{10} 100 = \square$

(2) $\log_{10} 0.001 = \square$

지도 평가

미국 항공 우주국(NASA)의 목성 탐사선 주노(JUNO)는 약 2800000000 km의 거리를 비행하여 목성에 도착했는데, 이 거리는 2.8×10^9 km로 나타낼 수 있다. 무려나 길이, 거리 등과 같이 우리가 일상생활에서 사용하는 수는 10의 거듭제곱으로 나타내는 경우가 많으므로, 자연 현상이나 사회 현상을 탐구할 때 밑이 10인 로그를 사용하면 편리하다.



상용로그

생각 열기 pH는 수소 이온 농도인 $[H^+]$ 의 지수를 나타낸 것으로 0에서 14까지 측정된다. 이때 $[H^+]$ 가 10배씩 증가하면 pH는 1씩 감소한다고 한다.



① 다음 표는 pH와 $[H^+]$ 사이의 대응 관계를 나타낸 것이다. 표를 완성해 보자.

pH	5		7		9
$[H^+]$	10^{-5}	10^{-6}		10^{-8}	

② pH가 2인 레몬의 $[H^+]$ 는 pH가 7인 순수한 물의 $[H^+]$ 의 몇 배인지 구해 보자.

위의 생각 열기에서 $pH = -\log_{10} [H^+]$ 로 구할 수 있다. 이와 같이 실생활에서 10을 밑으로 하는 로그를 사용하는 경우가 많다. 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하며, 양수 N 에 대하여 상용로그 $\log_{10} N$ 은 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$ 과 같이 나타낸다. 예를 들어 $\log_{10} 2$ 를 간단히 $\log 2$ 로 나타낸다. 한편, $\log 10^n = \log_{10} 10^n = n$ 이므로 10의 거듭제곱 곱의 수에 대한 상용로그의 값은 로그의 성질을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

(예) ① $\log 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$
 ② $\log \sqrt[3]{100} = \log_{10} \sqrt[3]{10^2} = \log_{10} 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

32

소단원 지도 개관

지도 목표

- 상용로그의 뜻을 알게 한다.
- 상용로그를 이용하여 상용로그의 값을 구할 수 있게 한다.
- 상용로그를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

- 상용로그표를 이용하여 구한 상용로그의 값을 어렵한 값임을 이해하게 한다.
- 상용로그표를 이용하는 방법은 예를 통하여 간단히 다루고, 상용로그표의 비례부분은 다루지 않는다.
- 로그와 관련된 여러 가지 문제를 해결하는 데 계산기 등의 공학적 도구를 활용할 수 있게 한다.

용어와 기호

- 상용로그(常用-, common logarithm)
- $\log N$

준비하기

주안점 10을 밑으로 하는 로그의 값을 계산하여 알맞은 수를 구할 수 있는지 확인한다.

풀이 (1) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

(2) $\log_{10} 0.001 = \log_{10} \frac{1}{1000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$

답 (1) 2 (2) -3

상용로그

평가 기준

- 상용로그를 이해하고 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
- 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구할 수 있다.
- 상용로그의 뜻을 알고, 진수가 10^n 꼴인 상용로그의 값을 구할 수 있다.

생각 열기

지도 방향 우리가 일상생활에서 사용하는 수는 십진법의 수이므로 10을 밑으로 하는 로그가 유용하게 쓰인다. 10을 밑으로 하는 로그의 값을 이용하여 실생활 문제를 해결하게 함으로써 상용로그의 필요성을 인식하게 한다.

- $[H^+]$ 가 10배씩 증가하면 pH는 1씩 감소하므로 pH는 로그를 이용하여 $-\log_{10} [H^+]$ 로 구할 수 있다. 이를 이용하여 pH와 $[H^+]$ 사이의 대응 관계를 나타낸 표를 완성하면 다음과 같다.

pH	5	6	7	8	9
$[H^+]$	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}

- pH가 2인 레몬의 $[H^+]$ 는 $2 = -\log_{10} [H^+]$ 에서 $[H^+] = 10^{-2}$ 이고 pH가 7인 순수한 물의 $[H^+]$ 는 $7 = -\log_{10} [H^+]$ 에서 $[H^+] = 10^{-7}$ 따라서 $10^{-2} = 10^{-7} \times 10^5$ 이므로 pH가 2인 레몬의 $[H^+]$ 는 pH가 7인 순수한 물의 $[H^+]$ 의 10^5 배이다.

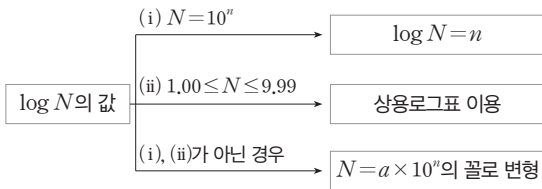
내용 연구

- 10의 거듭제곱 곱의 수에 대한 상용로그의 값을 구해 보고, $\log 10^n = n$ 임을 확인하게 한다.

〔내용 연구〕

- 1 계산기를 이용하여 로그의 값을 구한 후 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하여 구한 값과 상용로그표를 이용하여 구한 값은 서로 같다.
- 2 상용로그표는 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값이 계산되어 있으므로 이를 이용하면 정수 부분이 한 자리인 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있음을 알게 한다.

〔오개념 바로잡기〕



- 3 상용로그표에서 몇 가지 경우를 제외하고 상용로그의 값은 반올림한 값으로 나타내지만 편의상 등호 =를 사용하여 나타냄을 알게 한다.

예를 들어 $\log 2$ 의 실제의 값은

0.30102999566398...

이지만 $\log 2=0.3010$ 으로 나타낸다.

- 4 상용로그표에 없는 양수의 상용로그의 값은 로그의 성질을 이용하여 1.00에서 9.99까지의 범위에 포함된 수로 바꾸어 구함을 알게 한다.

〔문제 풀이〕

문제 1

〔주안점〕 상용로그의 정의를 알고, 이를 이용하여 상용로그의 값을 구할 수 있게 한다.

〔풀이〕 (1) $\log 1000=\log 10^3=3$

$$(2) \log \frac{1}{10000}=\log 10^{-4}=-4$$

$$(3) \log \sqrt[4]{10^5}=\log 10^{\frac{5}{4}}=\frac{5}{4}$$

$$(4) \log 10\sqrt{10}=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

답 (1) 3 (2) -4 (3) $\frac{5}{4}$ (4) $\frac{3}{2}$

문제 1 다음 상용로그의 값을 구하시오.

- (1) $\log 1000$
- (2) $\log \frac{1}{10000}$
- (3) $\log \sqrt[4]{10^5}$
- (4) $\log 10\sqrt{10}$

1, 2

이 책의 부록에 있는 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

상용로그표를 이용하면 정수 부분이 한 자리인 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있다.

예를 들어 오른쪽 상용로그표에서

$\log 2.28$ 의 값을 구할 때, 2.2의 가로줄과

8의 세로줄이 만나는 곳의 수 0.3579를

찾으면 된다. 즉,

$$\log 2.28=0.3579$$

이다.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0863	.0898	.0932	.0966	.1000	.1034	.1068	.1101
1.3	.1133	.1165	.1196	.1227	.1258	.1288	.1318	.1349	.1379	.1409
1.4	.1439	.1469	.1498	.1527	.1556	.1585	.1613	.1642	.1671	.1699
1.5	.1728	.1756	.1784	.1812	.1840	.1867	.1895	.1922	.1949	.1976
1.6	.1993	.2020	.2047	.2073	.2099	.2124	.2149	.2174	.2199	.2224
1.7	.2239	.2263	.2287	.2311	.2334	.2357	.2380	.2403	.2425	.2447
1.8	.2469	.2490	.2511	.2532	.2553	.2573	.2593	.2613	.2633	.2653
1.9	.2672	.2691	.2710	.2729	.2747	.2766	.2784	.2803	.2821	.2839

3 상용로그표에서 0.3579는 0.3579를 뜻한다.

상용로그표에 있는 상용로그의 값은 아홉째 자리까지만 편의상 등호를 사용하여 나타낸다.

문제 2 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

- (1) $\log 3.73$
- (2) $\log 6.09$

4

상용로그표와 로그의 성질을 이용하면 상용로그표에 없는 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있다.

예제 1 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

- (1) $\log 416$
- (2) $\log 0.00887$

풀이 (1) 상용로그표에서 $\log 4.16=0.6191$ 이므로

$$\log 416=\log (4.16 \times 10^2)=\log 4.16+\log 10^2$$

$$=0.6191+2=2.6191$$

(2) 상용로그표에서 $\log 8.87=0.9479$ 이므로

$$\log 0.00887=\log (8.87 \times 10^{-3})=\log 8.87+\log 10^{-3}$$

$$=0.9479+(-3)=-2.0521$$

답 (1) 2.6191 (2) -2.0521

33

문제 2

〔주안점〕 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구할 수 있게 한다.

〔풀이〕 (1) 상용로그표에서 3.7의 가로줄과 3의 세로줄이 만나는 곳의 수를 찾으면 0.5717이다.

$$\text{따라서 } \log 3.73=0.5717$$

(2) 상용로그표에서 6.0의 가로줄과 9의 세로줄이 만나는 곳의 수를 찾으면 0.7846이다.

$$\text{따라서 } \log 6.09=0.7846$$

답 (1) 0.5717 (2) 0.7846

문제 3

〔주안점〕 상용로그표와 로그의 성질을 이용하여 상용로그표에 없는 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있게 한다.

〔풀이〕 (1) 상용로그표에서 $\log 5.36=0.7292$ 이므로

$$\log 53.6=\log (5.36 \times 10)$$

$$=\log 5.36+\log 10$$

$$=0.7292+1$$

$$=1.7292$$

생각 넓히기

[지도 방향] 유리판을 통과한 빛의 밝기를 식으로 나타내고, 상용로그를 활용하여 빛의 밝기를 구할 수 있게 한다.

[풀이] ① 밝기가 A lx인 빛이 어떤 유리판을 한 장 통과할 때마다 그 밝기가 5%씩 감소하므로 유리판 한 장을 통과하였을 때의 밝기는

$$(1-0.05)A, \text{ 즉 } 0.95A$$

이다. 따라서 이 유리판을 n 장 통과하였을 때의 밝기를 식으로 나타내면 $0.95^n A$ 이다.

② 밝기가 1000lx인 빛이 이 유리판을 10장 통과하였을 때의 밝기를 L lx라 하면

$$L = 0.95^{10} \times 1000$$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log L &= \log(0.95^{10} \times 1000) = 10 \log 0.95 + 3 \\ &= 10 \times \log(9.5 \times 10^{-1}) + 3 \\ &= 10 \times (\log 9.5 - 1) + 3 \\ &= 10 \times (0.9777 - 1) + 3 \\ &= 2.7770 \end{aligned}$$

이때 $\log 5.984 = 0.7770$ 이므로

$$\begin{aligned} \log L &= 2 + 0.7770 = \log 100 + \log 5.984 \\ &= \log 598.4 \end{aligned}$$

즉, $L = 598.4$ 이므로 구하는 빛의 밝기는 598.4lx이다.

$$\text{답 } ① 0.95^n A \quad ② 598.4lx$$

지도 자료

상용로그의 값이 a 인 N 의 값 구하기

상용로그의 값이 a 인 수 N , 즉 $\log N = a$ 를 만족시키는 N 의 값은 상용로그표에서 상용로그의 값을 찾아 구할 수 있다.

이럴테면 $\log N = 3.6284$ 인 N 의 값을 구하기 위해서는 먼저 상용로그표에서 0.6284를 상용로그의 값으로 가지는 수를 찾는다. 이로부터 $\log 4.25 = 0.6284$ 임을 알 수 있고, $\log N$ 의 정수 부분이 3이므로

$$\begin{aligned} \log N &= 3 + 0.6284 = \log 10^3 + \log 4.25 \\ &= \log(10^3 \times 4.25) = \log 4250 \end{aligned}$$

에서 $N = 4250$ 임을 알 수 있다.

위의 방법 이외에도 $N = 10^a$ 임을 이용하면 계산기 등의 공학적 도구를 사용하여 구할 수도 있다.

문제 3 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $\log 53.6$

(2) $\log 0.0952$

예제 2 어떤 광원으로부터 d m 떨어진 자점에서 사람이 느끼는 감각 강도는

$$\log \frac{h}{d^2} \quad (h > 0 \text{인 상수})$$

라고 한다. 감각 강도가 3일 때의 광원으로부터의 거리는 감각 강도가 1일 때의 광원으로부터의 거리의 몇 배인지 구하시오.

풀이 감각 강도가 3, 1일 때의 광원으로부터의 거리를 각각 d_1 m, d_2 m라 하면

$$3 = \log \frac{h}{d_1^2}, \quad 1 = \log \frac{h}{d_2^2}$$

$$\text{이므로 } \frac{h}{d_1^2} = 10^3, \quad \frac{h}{d_2^2} = 10$$

$$\text{즉, } d_1^2 = \frac{h}{1000}, \quad d_2^2 = \frac{h}{10} \text{ 이므로 } \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{1}{100}$$

$$\text{따라서 } \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{10} \text{ 이므로 감각 강도가 3일 때의 광원으로부터의 거리는 감각 강도가 1}$$

$$\text{일 때의 광원으로부터의 거리의 } \frac{1}{10} \text{ 배이다.}$$

$$\text{답 } \frac{1}{10} \text{ 배}$$

문제 4 지구로부터의 거리가 x 광년인 별의 겉보기 등급을 m , 절대 등급을 M 이라 하면

$$m - M = 5 \log x - 5$$

가 성립함이 알려져 있다. 겉보기 등급이 3, 절대 등급이 -2 인 별의 지구로부터의 거리는 몇 광년인지 구하시오.

③ 별의 밝기는 눈으로 보이는 밝기와 겉보기 등급과 실제 밝기인 절대 등급으로 나타낸다.



문제 해결 | 수문 | 형의 융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

빛이 어떤 유리판을 한 장 통과할 때마다 그 밝기가 5%씩 감소한다고 한다.

(단, $\log 9.5 = 0.9777$, $\log 5.984 = 0.7770$ 으로 계산한다.)

활동 1 밝기가 A lx인 빛이 이 유리판을 n 장 통과하였을 때의 밝기를 식으로 나타내어 보자.

활동 2 밝기가 1000lx인 빛이 이 유리판을 10장 통과하였을 때의 밝기를 구해 보자.

④ lx(럭스)는 빛의 조명을 나타내는 단위이다.

34

(2) 상용로그표에서 $\log 9.52 = 0.9786$ 이므로

$$\log 0.0952 = \log(9.52 \times 10^{-2})$$

$$= \log 9.52 + \log 10^{-2}$$

$$= 0.9786 + (-2)$$

$$= -1.0214$$

$$\text{답 } ① 1.7292 \quad ② -1.0214$$

문제 4

[주안점] 상용로그를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

[풀이] 겉보기 등급이 3, 절대 등급이 -2 이므로

$$m = 3, \quad M = -2$$

$m - M = 5 \log x - 5$ 에 이를 대입하면

$$3 - (-2) = 5 \log x - 5,$$

$$10 = 5 \log x, \quad \log x = 2,$$

따라서 $x = 100$

즉, 겉보기 등급이 3, 절대 등급이 -2 인 별의 지구로부터의 거리는 100광년이다.

$$\text{답 } 100 \text{ 광년}$$

탐구&융합 → 중간 소음, 지혜롭게 해결하는 방법은?

[지도 방향] 조사한 소리의 세기에 따른 소리의 크기를 구하여 주간과 야간에 허용 가능한 소음 유형을 정리해 보고, 중간 소음을 줄이기 위한 실천 방안에 대해 조사하여 발표해 보게 한다.

[풀이]

소리 유형	$I \text{ W/m}^2$	$\frac{I}{10^{-12}}$	$D \text{ dB}$
속삭이는 대화	10^{-10}	10^2	20
냉장고 또는 청소기 소리	10^{-8}	10^4	40
물건을 떨어뜨리는 소리	$10^{-6.5}$	$10^{5.5}$	55
망치질 소리	10^{-6}	10^6	60
전화벨 소리	10^{-5}	10^7	70
스피커 음악 소리	$10^{-3.5}$	$10^{8.5}$	85

주간	속삭이는 대화, 냉장고 또는 청소기 소리, 물건을 떨어뜨리는 소리
야간	속삭이는 대화, 냉장고 또는 청소기 소리

3 예시 실내용 슬리퍼를 착용한다. 소음 방지용 매트를 설치한다.

풀이 참조

탐구&융합

탐구 융합 의사소통 태도 및 실천

중간 소음, 지혜롭게 해결하는 방법은?

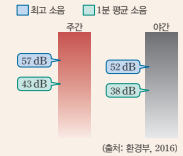
공동 주택이 늘어나면서 중간 소음이 사회적 문제가 되고 있다. 특히, 겨울철에는 난방을 위해 창문을 닫고 생활하기 때문에 중간 소음을 더 심하게 느낀다고 한다.

중간 소음은 소리의 세기에 따른 소리의 크기로 측정할 수 있는데, 법으로 정한 중간 소음의 허용 기준은 오른쪽 그림과 같다.

한편, 소리의 세기가 $I \text{ W/m}^2$ 일 때, 소리의 크기 $D \text{ dB}$ 는

$$D = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

와 같이 정한다고 한다. 이때 dB (데시벨)은 소리의 크기를 나타내는 단위이다.



1 다음 표는 유형에 따른 소리의 세기를 조사한 것이다. 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

소리 유형	$I \text{ W/m}^2$	$\frac{I}{10^{-12}}$	$D \text{ dB}$
속삭이는 대화	10^{-10}		
냉장고 또는 청소기 소리	10^{-8}		
물건을 떨어뜨리는 소리	$10^{-6.5}$		
망치질 소리	10^{-6}		
전화벨 소리	10^{-5}		
스피커 음악 소리	$10^{-3.5}$		

2 1의 표에서 최고 소음을 기준으로 주간과 야간에 허용 가능한 소리 유형을 각각 정리해 보자.

주간
야간

3 중간 소음을 줄이기 위해 실천할 수 있는 방법을 조사하여 발표해 보자.



35

읽기 자료

메르센 소수

메르센 소수란 $2^p - 1$ (p 는 소수)의 꼴로 표현되는 소수로, 프랑스의 수학자 메르센(Mersenne, M., 1588~1648)의 이름을 딴 것이다.

메르센이 발견한 가장 큰 메르센 소수는

$$2^{257} - 1$$

인데, 로그를 이용하면 이 수가 몇 자리 정수인지 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \log 2^{257} &= 257 \log 2 \\ &= 257 \times 0.3010 \\ &= 77.357 \end{aligned}$$

이므로 2^{257} 은 78자리 정수이다. 그런데 2^{257} 의 일의 자리 숫자가 0이 아니므로 $2^{257} - 1$ 도 78자리 정수임을 알 수 있다. 또한, 지금까지 발견된 가장 큰 메르센 소수는 2017년 12월 6일에 발견된 $2^{77232917} - 1$ 이다.

이것은 50번째로 발견된 메르센 소수이며 이에 앞서 49번째로 발견된 메르센 소수와 비교했을 때, 거의 100만 개가 더 많은 자릿수를 가진 수이다.

2005년부터 2017년까지 발견된 메르센 소수를 크기가 큰 것부터 차례대로 그 자릿수와 함께 나열하면 다음과 같다.

소수	자릿수	발견 연도
$2^{77232917} - 1$	23249425	2017
$2^{74207281} - 1$	22338618	2016
$2^{57885161} - 1$	17425170	2013
$2^{43112609} - 1$	12978189	2008
$2^{42643801} - 1$	12837064	2009
$2^{37156667} - 1$	11185272	2008
$2^{32582657} - 1$	9808358	2006
$2^{30402457} - 1$	9152052	2005

$\log 2$ 의 어림한 값이 0.3010임을 이용하면, 위의 표에 제시된 메르센 소수의 자릿수를 직접 구할 수 있다.

2006년도에 발견된 메르센 소수 $2^{32582657} - 1$ 을 시각적으로 보여주기 위해서는 1페이지 당 십진법의 수 75개 자릿수의 숫자를 50줄씩 쓴 2616페이지가 필요하다고 한다.

또, $2^{42643801} - 1$ 은 2009년에, $2^{43112609} - 1$ 은 2008년에 발견된 것처럼 메르센 소수는 작은 수부터 순차적으로 발견되는 것은 아니다.

1. 지수와 로그

중단원 마무리하기

● 거듭제곱과 거듭제곱근

- (1) n 이 2 이상인 자연수일 때, 방정식 $x^n=a$ 의 근 x 를 실수 a 의 n 제곱근이라고 한다.
- (2) a 의 실수인 n 제곱근

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(3) 거듭제곱근의 성질

$a>0, b>0$ 이고 m, n 이 2 이상인 자연수일 때,

- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^m}$

● 지수의 확장

- (1) $a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때,

$$a^n=1, \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

- (2) $a>0$ 이고 m, n ($n \geq 2$)이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

(3) 지수법칙

$a>0, b>0$ 이고 x, y 가 실수일 때,

- $a^x a^y=a^{x+y}$
- $a^x \div a^y=a^{x-y}$
- $(a^x)^y=a^{xy}$
- $(ab)^x=a^x b^x$

● 로그

$a>0, a \neq 1, M>0, N>0$ 일 때,

- (1) 로그: $a^x=N \iff x=\log_a N$

(2) 로그의 성질

- $\log_a 1=0, \quad \log_a a=1$
- $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
- $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
- $\log_a M^k=k \log_a M$ (k 는 실수)

- (3) 로그의 밑의 변환: $b>0, c>0, c \neq 1$ 일 때,

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

- (4) 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하며, 보통 $\log, N$ 과 같이 나타낸다.

가

01 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하시오.

- (1) -125의 세제곱근
- (2) $\frac{1}{81}$ 의 네제곱근

02 다음 값을 구하시오.

- (1) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{72}$
- (2) $\frac{\sqrt[4]{2500}}{\sqrt[4]{4}}$
- (3) $(\sqrt[3]{4})^3$
- (4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$

03 다음 값을 구하시오.

- (1) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}}$
- (2) $4^{\frac{3}{2}} \div 4^{-\frac{1}{6}}$
- (3) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$
- (4) $\left(3^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \times 2^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)^{\sqrt{6}}$

04 다음 등식을 만족시키는 x 의 값을 구하시오.

- (1) $\log_5 x=2$
- (2) $\log_2 \sqrt{2}=\frac{1}{2}$
- (3) $\log x=-4$
- (4) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{100}}=x$

05 다음 값을 구하시오.

- (1) $\log_{625} 16$
- (2) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$
- (3) $\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{3}{2}$
- (4) $2 \log \sqrt{10} - \log 100$

36

중단원 마무리하기

01

|주안점| 거듭제곱근을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) -125의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-125$ 이므로 $x^3+125=0, (x+5)(x^2-5x+25)=0$

이때 $x^2-5x+25=0$ 은 실근을 갖지 않으므로 -125의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -5이다.

(2) $\frac{1}{81}$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=\frac{1}{81}$ 이므로

$$x^4-\frac{1}{81}=0, \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}\right)=0$$

이때 $x^2+\frac{1}{9}=0$ 은 실근을 갖지 않으므로 $\frac{1}{81}$ 의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ 이다.

|답| (1) -5 (2) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

02

|주안점| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{3 \times 72}=\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(2) $\frac{\sqrt[4]{2500}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\frac{2500}{4}}=\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$

(3) $(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}=\sqrt[9]{512}=\sqrt[9]{2^9}=2$

|답| (1) 6 (2) 5 (3) 2 (4) 2

03

|주안점| 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}+(-\frac{1}{4})}=2^1=2$

(2) $4^{\frac{4}{3}} \div 4^{-\frac{1}{6}}=4^{\frac{4}{3}-(-\frac{1}{6})}=4^{\frac{3}{2}}=2^{2 \times \frac{3}{2}}=8$

(3) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}=3^{\sqrt{2} \times \sqrt{8}}=3^{\sqrt{16}}=3^4=81$

(4) $\left(3^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \times 2^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)^{\sqrt{6}}=3^{\frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{6}} \times 2^{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{6}}=3^2 \times 2^6=576$

|답| (1) 2 (2) 8 (3) 81 (4) 576

04

|주안점| 로그의 정의를 이용하여 x 의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x=5^2=25$

(2) $2\sqrt{2}=x^{\frac{1}{2}}$ 이므로 $x=(2\sqrt{2})^2=8$

(3) $x=10^{-4}=\frac{1}{10000}$

(4) $\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}=10^{-\frac{2}{3}}$ 이므로

$10^{-\frac{2}{3}}=10^x$ 에서 $x=-\frac{2}{3}$

|답| (1) 25 (2) 8 (3) $\frac{1}{10000}$ (4) $-\frac{2}{3}$

05

|주안점| 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $\log_{0.25} 16=\log_{\frac{1}{4}} 16=\log_{2^{-2}} 2^4$

$$=\frac{4}{-2} \log_2 2=-2$$

(2) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}=\log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{\frac{3}{2}}=3 \log_3 3=3$

(3) $\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{3}{2}=\log_2 \left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}\right)=\log_2 2=1$

(4) $2 \log \sqrt{10} - \log 100=\log 10 - \log 10^2=1-2=-1$

|답| (1) -2 (2) 3 (3) 1 (4) -1

06

|주안점| 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{3} &= \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^4} \times \sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{3} \\ &= 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{3} \\ &= 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2^2 \times 6} + 8\sqrt[3]{3} \\ &= 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + 8\sqrt[3]{3} \\ &= 9\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

$$(3) \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(-5)^3} \times \sqrt[3]{3^6} = -5 \times 3 = -15$$

$$(4) \sqrt[5]{32^2} \div (\sqrt[3]{2})^6 \div \sqrt[3]{64} = 2^2 \div 2^2 \div 2 = \frac{1}{2}$$

|답| (1) $4\sqrt[3]{2}$ (2) $9\sqrt[3]{3}$ (3) -15 (4) $\frac{1}{2}$

07

|주안점| 지수법칙을 이용하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

|풀이| $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = 64^{-\frac{1}{n}} = (2^6)^{-\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$ 이므로 주어진 수

가 자연수가 되려면 $-\frac{6}{n}$ 의 값이 자연수이어야 한다. 즉, 이를 만족시키는 정수 n 의 값은 $-1, -2, -3, -6$ 이다.

|답| $-1, -2, -3, -6$

08

|주안점| 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 제곱하면

$$x + x^{-1} + 2 = 9$$

따라서 $x + \frac{1}{x} = 7$

(2) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 세제곱하면

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 3(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) = 27,$$

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 3 \times 3 = 27$$

따라서 $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 27 - 9 = 18$

|답| (1) 7 (2) 18

09

|주안점| 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 주어진 등식의 좌변의 분모와 분자에 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = \frac{4}{3}, \quad 3a^{2x} + 3 = 4a^{2x} - 4$$

표준

06 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

(2) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{3}$

(3) $\sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{27^2}$

(4) $\sqrt[5]{32^2} \div (\sqrt[3]{2})^6 \div \sqrt[3]{64}$

07 $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되도록 하는 정수 n 의 값을 모두 구하시오.

08 $x > 0$ 에 대하여 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $x + \frac{1}{x}$

(2) $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$

09 실수 x 에 대하여 $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{4}{3}$ 일 때, a^x 의 값을 구하시오. (단, $a > 0, a \neq 1$)

10 $\log_{x-2}(6-x)$ 가 정의되도록 하는 정수 x 의 개수를 구하시오.

37

이므로 $a^{2x} = 7$

따라서 $a^{4x} = (a^{2x})^2 = 7^2 = 49$

|답| 49

10

|주안점| 로그의 정의를 이해하게 한다.

|풀이| 밑의 조건에서 $x - 2 > 0, x - 2 \neq 1$

즉, $x > 2, x \neq 3$ 이므로

$$2 < x < 3 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $6 - x > 0$, 즉 $x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

①, ②에서 $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 6$

따라서 정수 x 는 4, 5의 2개이다.

|답| 2

11

|주안점| 로그의 성질을 이용하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

|해결과정| 세 수를 정리하면

$$A = 3^{\log_5 27 - \log_5 18} = 3^{\log_5 \frac{27}{18}} = 3^{\log_5 \frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$B = \log_5 25 - \log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^2 - \log_5 \frac{1}{5^3}$$

$$= 2 - (-3) = 5$$

|답| 30%

11 세 수

$$A = 3^{\log_6 27 - \log_6 18}, B = \log_5 25 - \log_5 \frac{1}{125}, C = \log_5 \{ \log_4 (\log_5 64) \}$$

중에서 가장 큰 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

12 $\log (\log_2 3) + \log (\log_2 4) + \log (\log_2 5) + \cdots + \log (\log_{1023} 1024)$ 의 값을 구하시오.

13 $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ 일 때, 다음을 a 와 b 에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_5 12$

(2) $\log_5 \frac{27}{2}$

(3) $\log_5 72$

(4) $\log_5 \frac{9}{16}$

14 상용로그표를 이용하여 다음에 답하시오.

(1) $\log N = 0.7582$ 인 실수 N 의 값을 구하시오.

(2) (1)을 이용하여 $\log M = 3.7582$ 인 실수 M 의 값을 구하시오.

15 $\log 4.73 = 0.6749$ 임을 이용하여 다음 등식을 만족시키는 x 의 값을 구하시오.

(1) $x = \log 473$

(2) $\log x = -1.3251$

38

$$C = \log_2 \{ \log_4 (\log_8 64) \} = \log_2 (\log_4 2)$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

▶ 30 %

[답 구하기] 따라서 $C < A < B$ 이므로 가장 큰 수는 B 이다.

▶ 10 %

12

[주안점] 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

[풀이] (주어진 식)

$$= \log (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{1023} 1024)$$

$$= \log \left(\frac{\log_2 3}{\log_2 2} \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \cdots \times \frac{\log_2 1024}{\log_2 1023} \right)$$

$$= \log (\log_2 1024)$$

$$= \log (\log_2 2^{10})$$

$$= \log 10 = 1$$

[답] 1

13

[주안점] 로그의 성질을 이용하여 주어진 로그를 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있게 한다.

[풀이] (1) $\log_5 12 = \log_5 (2^2 \times 3) = 2 \log_5 2 + \log_5 3$
 $= 2a + b$

$$(2) \log_5 \frac{27}{2} = \log_5 \frac{3^3}{2} = 3 \log_5 3 - \log_5 2 = 3b - a$$

$$(3) \log_6 72 = \frac{\log_5 72}{\log_5 6} = \frac{\log_5 (2^3 \times 3^2)}{\log_5 (2 \times 3)}$$

$$= \frac{3 \log_5 2 + 2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a + 2b}{a + b}$$

$$(4) \log_3 \frac{9}{16} = \frac{\log_5 \frac{9}{16}}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3^2 - \log_5 2^4}{\log_5 3}$$

$$= \frac{2 \log_5 3 - 4 \log_5 2}{\log_5 3} = \frac{2b - 4a}{b}$$

[답] (1) $2a + b$ (2) $3b - a$ (3) $\frac{3a + 2b}{a + b}$ (4) $\frac{2b - 4a}{b}$

14

[주안점] 상용로그표와 상용로그의 성질을 이용하여 상용로그의 값을 구하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

[풀이] (1) $N = 5.73$

$$(2) \log M = 3.7582 = 3 + 0.7582$$

$$= \log 10^3 + \log 5.73$$

$$= \log (5.73 \times 10^3)$$

$$= \log 5730$$

따라서 $M = 5730$

[답] (1) 5.73 (2) 5730

15

[주안점] 상용로그표와 상용로그의 성질을 이용하여 상용로그의 값을 구하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

[풀이] (1) $x = \log 473 = \log (4.73 \times 10^2) = \log 4.73 + 2$

$$= 2 + 0.6749 = 2.6749$$

$$(2) \log x = -1.3251 = -2 + 0.6749$$

$$= \log 10^{-2} + \log 4.73$$

$$= \log (4.73 \times 10^{-2}) = \log 0.0473$$

따라서 $x = 0.0473$

[답] (1) 2.6749 (2) 0.0473

16

[주안점] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

[풀이] $4^{\frac{1}{a}} = 1000$ 에서 $4 = 1000^a \cdots \cdots ①$

$25^{\frac{1}{b}} = 1000$ 에서 $25 = 1000^b \cdots \cdots ②$

① $\times$ ②를 하면 $100 = 1000^a \times 1000^b = 1000^{a+b}$

즉, $10^2 = 10^{3(a+b)}$ 이므로

$$3(a+b) = 2, \quad a+b = \frac{2}{3}$$

[답] $\frac{2}{3}$

17

[주안점] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

$$\begin{aligned}
 \text{[풀이]} \quad & \frac{2}{1-a^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{8}}} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{1+a} \\
 &= \frac{4}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{1+a} \\
 &= \frac{8}{1-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{1+a} \\
 &= \frac{16}{1-a} + \frac{16}{1+a} \\
 &= \frac{32}{1-a^2} \\
 &= \frac{32}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 64
 \end{aligned}$$

답 64

18

[주안점] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

$$\text{[풀이]} \quad 3^a = k^c \text{에서} \quad 3 = k^{\frac{c}{a}} \quad \dots\dots ①$$

$$5^b = k^c \text{에서} \quad 5 = k^{\frac{c}{b}} \quad \dots\dots ②$$

$$① \times ② \text{를 하면} \quad 15 = k^{\frac{c}{a}} k^{\frac{c}{b}} = k^{\frac{bc+ca}{ab}}$$

이때 $ab=bc+ca$ 이므로

$$\frac{bc+ca}{ab} = \frac{ab}{ab} = 1$$

따라서 $k=15$

답 15

19

[주안점] 로그의 정의와 성질을 이해하고 활용할 수 있게 한다.

[해결 과정] 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 2$$

$$\log_2 a \times \log_2 b = -7$$

▶ 40 %

$$\begin{aligned}
 \text{[답 구하기]} \quad & \log_a b + \log_b a = \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\
 &= \frac{(\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\
 &= \frac{2^2 - 2 \times (-7)}{-7} \\
 &= -\frac{18}{7}
 \end{aligned}$$

▶ 60 %

답·전

16 두 실수 a, b 에 대하여 $4^{\frac{1}{a}} = 25^{\frac{1}{b}} = 1000$ 이 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

17 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $\frac{2}{1-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{1+a}$ 의 값을 구하시오.

이차방정식

18 세 양수 a, b, c 에 대하여
 $3^a = 5^b = k, \quad ab = bc + ca$
 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

19 이차방정식 $x^2 - 2x - 7 = 0$ 의 두 근이 $\log_2 a, \log_2 b$ 일 때, $\log_2 b + \log_2 a$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

[사·술·행]

20 세기가 x W인 전파가 벽을 투과하여 세기가 y W인 전파로 바뀔 때, 그 벽의 전파 감쇠비는 $10 \log \frac{y}{x}$ dB이라고 한다.
 세기가 200 W인 전파가 어떤 벽을 투과하여 세기가 63 W인 전파로 바뀌었을 때, 이 벽의 전파 감쇠비는 몇 dB인지 상용로그표를 이용하여 구하시오.

(단, W(와트)는 전력의 단위이다.)



39

20

[주안점] 상용로그를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

$$\text{[풀이]} \quad 10 \log \frac{63}{200} = 10 \log 0.315$$

상용로그표에서 $\log 3.15 = 0.4983$ 이므로

$$\begin{aligned}
 10 \log 0.315 &= 10 \log (3.15 \times 10^{-1}) \\
 &= 10 (\log 3.15 + \log 10^{-1}) \\
 &= 10 (0.4983 - 1) \\
 &= -5.017
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 벽의 전파 감쇠비는 -5.017 dB이다.

답 -5.017 dB

중단원 도입

화석의 나이는 방사성 탄소 동위 원소의 반감기가 매우 긴 것을 이용하여 화석에 남아 있는 탄소의 양을 지수함수로 나타내고, 현재의 양과 과거의 양을 비교하여 측정할 수 있다. 이를 계산할 때 로그함수가 이용된다.

이 단원에서는 지수함수와 로그함수 및 활용에 대하여 알아본다.