수학 Ⅰ

• 문제를 풀고 난 후, 틀린 문제에는 □ 에 √ 를 표시하고 반복하여 풀어 보세요.

Ⅰ 지수함수와 로그함수

01 □	02 □	03 □	04 □	05 □	06 □	07 □
08 □	09 □	10 □	11 □	12 □	13 □	14 □
15 □	16 □	17 □	18 □	19 □	20 □	21 □
22 □	23 □	24 □	25 □	26 □	27 □	28 □
29 □	30 □	31 □	32 □	33 □	34 □	35 □
36 □	37 □	38 □	39 □	40 □	41 □	42 □
43 □	44 □	45 □	46 □	47 □		

Ⅱ 삼각함수

01 □	02 □	03 □	04 □	05 □	06 □	07 □
08 □	09 □	10 □	11 □	12 □	13 □	14 □
15 □	16 □	17 □	18 □	19 □		

Ⅲ 수열

01 □	02 □	03 □	04 □	05 □	06 □	07 □
08 □	09 □	10 □	11 □	12 □	13 □	14 □
15 □	16 □	17 □	18 □	19 □	20 □	21 □
22 □	23 □	24 □	25 □	26 □	27 □	28 □
29 □	30 □	31 □	32 □	33 □	34 □	35 □
36 □	37 □	38 □	39 □	40 □	41 □	42 □
43 □	44 □	45 □	46 □	47 □	48 □	49 □
50 □	51 □	52 □	53 □	54 □	55 □	56 □
57 □	58 □					

4개년 수능
4점 기출 분석 & 출제 예상

수학 I

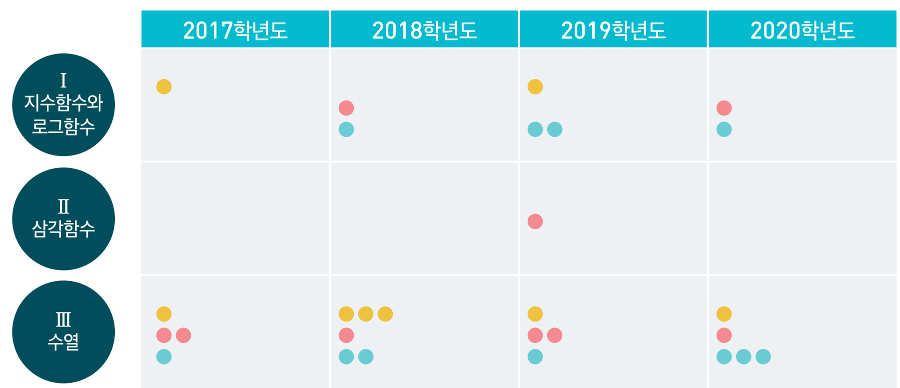
4개년 수능 분석을 통해 2021수능을 예측하고 전략적으로 공략한다!

최근 4개년 배점별 출제 경향을 단원별로 분석하여 수능 출제 빈도가 높은 핵심 개념과 출제 의도를 파악하고 그에 따른 대표 기출 유형을 정리하였습니다. 이를 바탕으로 단원별 출제가 예상되는 유형을 예측하고, 그 공략법을 유형별로 구분하여 상세히 제시하였습니다.

1 4개년 기출 분석

4개년 4점 기출 데이터

- 6월 모평 출제
- 9월 모평 출제
- 수능 출제



위의 ● ● ● 의 개수는 6월 모평, 9월 모평, 수능 출제 문항수입니다.

Ⅰ **지수함수와 로그함수 |** 매년 1~2문항이 출제되는데 지수와 로그의 성질을 이용한 계산 문제, 지수나 로그를 포함한 방정식 또는 부등식을 푸는 문제, 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하는 문제가 출제되고 있다. 최근에는 고난도 문제보다는 평이한 문제들이 주로 출제되는 편이다.

Ⅱ **삼각함수 |** 이 단원에서는 문제가 많이 출제되지 않은 것처럼 생각될 수 있지만 교육과정이 바뀌면서 향후 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식, 삼각함수와 관련된 도형의 활용 문제, 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제들이 출제될 수 있다. 또한, 사인법칙과 코사인법칙을 이용한 도형의 활용 문제가 고난도 문제로 출제될 것으로 예상된다.

Ⅲ **수열 |** 매년 1~3문항이 출제되는데 대부분 수열의 합과 수열의 귀납적 정의에서 출제되고 있다. $\sum$의 뜻과 성질의 이해도를 묻는 문제, 함수와 관련지어 해결하는 문제, 귀납적으로 정의된 수열에서 규칙을 발견하여 특정한 항의 값을 구하는 문제 등이 자주 출제된다.

2 출제 예상 및 전략

단원명	공략법
Ⅰ 지수함수와 로그함수	❶ 지수와 로그의 성질을 이용하는 문제 | 지수와 로그를 활용한 실생활 문제로 주로 출제되는데, 지수 또는 로그에 대한 관계식이 주어지면 관계식을 만족시키는 조건들을 찾아내어 새로운 관계식을 만들 수 있어야 한다. 다양한 문제를 통해 문제를 해석하는 연습을 하도록 한다.
	❷ 상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 성질을 이용하는 문제 | 상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 성질은 구분하여 알아두어야 한다. 이때 상용로그는 10의 거듭제곱 꼴의 수를 기준으로 범위를 나누어 각각의 범위에서 문제를 해석할 수 있어야 하므로 기출 문제를 통해 다양한 경우의 풀이를 익혀 두도록 한다.
	❸ 다른 단원의 개념이 포함된 통합형 문제 | 도형의 방정식(부등식의 영역) 또는 수열 단원과 통합되어 여러 가지 조건을 따져서 최대·최소를 구하거나 규칙성을 찾아야 하는 고난도 문제가 출제되는 경우가 있다. 지수함수나 로그함수의 성질보다는 다른 단원의 개념이 좀 더 비중있게 다루어지므로 이를 정확하게 익혀두는 것이 좋다.
	❹ 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용한 개수 세기 문제 | 우선 지수함수와 로그함수의 그래프를 그리고 해석할 수 있어야 하고, 특히 지수함수와 로그함수는 서로 역함수 관계에 있으므로 이와 관련된 다양한 성질을 활용할 수 있어야 한다. 다양한 기출 문제를 통해 경우를 나누고 각각의 경우에서 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍을 빠짐없이 세는 연습을 충분히 한다.
Ⅱ 삼각함수	❶ 삼각함수의 정의와 성질을 이용하는 문제 | 삼각함수의 정의와 성질을 이용하여 주어진 도형에서의 식의 값을 구하거나 삼각함수의 그래프를 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제가 출제될 가능성이 있다. 문제를 쉽고 빠르게 해결하기 위해 주어진 조건에서 각의 크기를 어떻게 정해야 하는지 다방면으로 생각하는 연습을 하도록 한다.
	❷ 도형에서 변의 길이나 내각의 크기를 구하는 문제 | 일반적으로 사인법칙과 코사인법칙을 이용하는 문제이나 이를 적용하기 위해 중학교에서 배운 도형의 성질을 정확히 알아 두어야 한다. 또한, 여러 가지 경우에서 보조선을 통해 선분의 길이를 삼각함수를 이용하여 나타내는 연습을 충분히 하는 것이 좋다.
Ⅲ 수열	❶ 여러 가지 수열의 규칙을 추론하는 문제 | 여러 가지 수열의 규칙을 찾아 특정한 항의 값을 구하는 문제는 각 항의 값을 차례로 나열하는 것부터 풀이가 시작되니 부담 없이 계산을 시작하도록 한다. 단순히 결과만을 놓고 일반항을 찾기보다는 값을 구하는 과정에서 수열의 규칙성을 빨리 찾아낼 수 있어야 한다. 이때 공차 또는 공비 등의 조건들을 찾아내는 연습을 하는 것이 좋다.
	❷ 수학적 귀납법을 이용하여 증명을 완성하는 문제 | 수학적 귀납법의 원리는 반드시 이해하도록 한다. 그리고 $k=n+1$일 때 주어진 식이 성립하는지를 확인하기 위해 식을 어떻게 변형해야 할지 많은 문제를 통해 충분히 연습한다. 증명 완성 문제는 흐름을 잘 따라가면 앞뒤의 관계를 따져서 해결할 수 있으므로 기출 문제를 통해 다양하게 접해 보는 것이 좋다.

수능잡는
핵심 개념 & 1등급 전략

I 지수함수와 로그함수

A 지수

1. 거듭제곱근

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

2. 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때,

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (2) $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(5) $\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$ (6) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

참고 $a>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 값은 n의 조건에 따라 다음과 같다.

n이 홀수	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=a$
n이 짝수	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert$

3. 지수의 확장

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우**

$$a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (\text{단, } a\neq0,\ n\text{은 자연수})$$

(2) **지수가 유리수인 경우**

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\ (\text{단, } a>0,\ m,\ n\text{은 정수, } n\geq2)$$

(3) **지수법칙** : $a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때,

① $a^xa^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

⑤ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^x=\dfrac{b^x}{a^x}$

참고 x, y가 정수일 때는 $a<0$, $b<0$인 경우에도 지수법칙이 성립하지만 x, y가 정수가 아닌 실수일 때는 $a>0$, $b>0$인 경우에만 지수법칙이 성립한다.

예 $\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}}=(-3)^{2\times\frac{1}{2}}=-3$ (×)

$\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{2}}=3^{2\times\frac{1}{2}}=3$ (○)

B 로그

1. 로그

(1) **로그** : $a>0$, $a\neq1$이고 $N>0$일 때,

$$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$$

(2) **로그가 정의될 조건** : $\log_a N$이 정의되기 위해서는

① 밑은 1이 아닌 양수이어야 한다. ➡ $a>0$, $a\neq1$

② 진수는 양수이어야 한다. ➡ $N>0$

2. 로그의 성질

(1) **로그의 성질** : $a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때,

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

(2) **로그의 밑의 변환** : $a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때,

① $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

(3) $a>0$, $a\neq1$, $b>0$이고 m, n은 실수일 때,

① $\log_a b\times\log_b a=1$ (단, $b\neq1$)

② $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, $m\neq0$)

③ $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

④ $a^{\log_a b}=b$

3. 상용로그

(1) **상용로그** : 10을 밑으로 하는 로그를 **상용로그**라 하고 양수 N의 상용로그를 $\log N$과 같이 나타낸다.

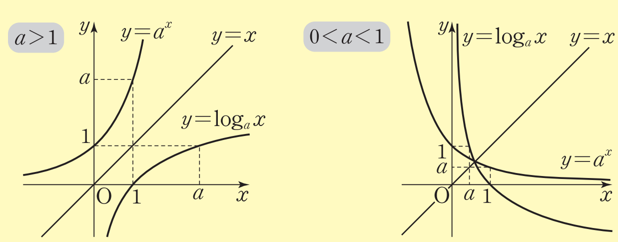
(2) **상용로그의 표현** : 양수 N의 상용로그는

$$\log N=n+\alpha\ (n\text{은 정수, } 0\leq\alpha<1)$$

꼴로 나타낼 수 있다. 이때 n은 $\log N$의 정수 부분, α는 $\log N$의 소수 부분이다.

C 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

1. 지수함수와 로그함수의 그래프와 성질



(1) **지수함수 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)의 성질**

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

③ 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나고, x축을 점근선으로 한다.

(2) **로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$)의 성질**

① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

③ 그래프는 점 $(1, 0)$을 지나고, y축을 점근선으로 한다.

④ 함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

2. 지수함수와 로그함수의 최대 · 최소

(1) 지수함수의 최대 · 최소

$m \le x \le n$에서 정의된 지수함수 $y=a^x$은

① $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 a^m, $x=n$일 때 최댓값 a^n을 갖는다.

② $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 a^m, $x=n$일 때 최솟값 a^n을 갖는다.

(2) 로그함수의 최대 · 최소

$m \le x \le n$에서 정의된 로그함수 $y=\log_a x$는

① $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 $\log_a m$, $x=n$일 때 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

② $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 $\log_a m$, $x=n$일 때 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

D 지수함수와 로그함수의 활용

1. 지수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식

(1) 지수에 미지수를 포함한 방정식의 풀이

$a>0$, $a \ne 1$일 때, $a^{x_1}=a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1=x_2$

(2) 지수에 미지수를 포함한 부등식의 풀이

① $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1>x_2$

2. 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식과 부등식

(1) 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식의 풀이

$a>0$, $a \ne 1$이고 $x_1>0$, $x_2>0$에 대하여

① $\log_a x_1=p \Longleftrightarrow x_1=a^p$

② $\log_a x_1=\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2$

(2) 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 부등식의 풀이

$a>0$, $a \ne 1$이고 $x_1>0$, $x_2>0$에 대하여

① $a>1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1>x_2$

s · t · r · a · t · e · g · y **1등급 전략**

수능 만점의 필수 코스, 격자점 세기에 도전하자!

x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라고 해. 수능에서 격자점 세기는 난이도가 높은 문제로 출제되는 유형이라 할 수 있어. 우선은 좌표평면에 그래프를 그리고 격자점이 눈에 보이도록 모눈을 그려 봐. 몇 개의 숫자를 대입해서 격자점을 찾아보면 x의 값의 범위를 어떻게 나누어야 할지 대충 짐작할 수 있을 거야.

예를 들어 주어진 함수가 $y=2^x$이면 $1 \le x < 2^1$, $2^1 \le x < 2^2$, …과 같이 밑을 이용해서 범위를 나눌 수 있어. 하지만 모든 문제를 이렇게 풀 수는 없으니 다양한 문제를 통해서 충분히 연습해야 해.

Ⅱ 삼각함수

E 삼각함수의 뜻과 그래프

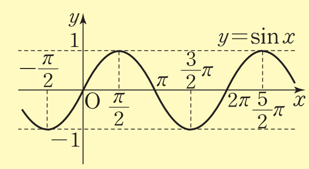
1. 삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

2. 삼각함수의 그래프와 성질

(1) 함수 $y=\sin x$의 그래프와 성질

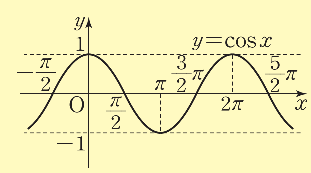


① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

② 주기가 2π인 주기함수이다.

③ $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(2) 함수 $y=\cos x$의 그래프와 성질

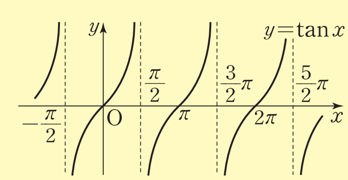


① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

② 주기가 2π인 주기함수이다.

③ $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(3) 함수 $y=\tan x$의 그래프와 성질



① 정의역은 $x \ne n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 주기가 π인 주기함수이다.

③ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

참고 삼각함수의 최대 · 최소와 주기

(1) $y=a\sin(bx+c)+d$

➡ 최댓값 : $|a|+d$, 최솟값 : $-|a|+d$, 주기 : $\dfrac{2\pi}{|b|}$

(2) $y=a\cos(bx+c)+d$

➡ 최댓값 : $|a|+d$, 최솟값 : $-|a|+d$, 주기 : $\dfrac{2\pi}{|b|}$

(3) $y=a\tan(bx+c)+d$

➡ 최댓값과 최솟값은 없다., 주기 : $\dfrac{\pi}{|b|}$

3. 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질

(1) $2n\pi+x$ (n은 정수)의 삼각함수

① $\sin(2n\pi+x)=\sin x$

② $\cos(2n\pi+x)=\cos x$

③ $\tan(2n\pi+x)=\tan x$

(2) $-x$의 삼각함수

① $\sin(-x)=-\sin x$

② $\cos(-x)=\cos x$

③ $\tan(-x)=-\tan x$

(3) $\pi\pm x$의 삼각함수 (복부호 동순)

① $\sin(\pi\pm x)=\mp\sin x$

② $\cos(\pi\pm x)=-\cos x$

③ $\tan(\pi\pm x)=\pm\tan x$

(4) $\frac{\pi}{2}\pm x$의 삼각함수 (복부호 동순)

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\cos x$

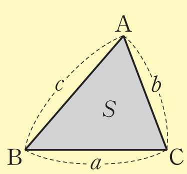
② $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\sin x$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\frac{1}{\tan x}$

F 삼각함수의 활용

1. 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면



$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

참고 사각형의 넓이

(1) 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 평행사변형의 넓이를 S라 하면

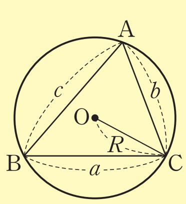
$S=ab\sin\theta$

(2) 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

2. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면



(1) 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(2) 사인법칙의 변형

① $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

② $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

③ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

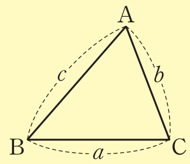
참고 삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$S=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

3. 코사인법칙

(1) 코사인법칙

삼각형 ABC에서



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

(2) 코사인법칙의 변형

삼각형 ABC에서

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

s · t · r · a · t · e · g · y 1등급 전략

중학교에서 배운 도형의 성질을 기억해!

삼각함수 단원의 문제를 학습하다 보면 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 각의 크기와 변의 길이 사이의 관계를 이해하고 삼각형의 넓이를 다양한 방법으로 구할 수 있는지를 묻는 문제를 자주 만날 거야. 이러한 문제들을 해결할 때 중학교에서 배웠던 도형의 성질이 활용되는 경우가 많아. 중학생일 때는 제대로 이해하지 못했던 것이라도 이제는 확실히 정리해 둘 필요가 있어.

중학교 1학년에서 배운 삼각형의 합동조건, 다각형의 성질, 부채꼴의 중심각과 호의 관계와 중학교 2학년에서 배운 이등변삼각형의 성질, 삼각형의 외심과 내심의 성질, 사각형의 성질, 닮은 도형의 성질, 삼각형의 닮음조건과 중학교 3학년에서 배운 피타고라스 정리, 삼각비, 원의 현에 관한 성질과 접선에 관한 성질, 원주각의 성질은 기본적으로 알고 있어야 해.

또, 삼각형의 변의 길이, 각의 크기, 삼각형의 외접원의 반지름의 길이 중 문제의 조건으로 제시된 것은 무엇인지를 생각하며 사인법칙과 코사인법칙 중 적절한 것을 이용해야 해.

이렇게 준비해 두면 사인법칙과 코사인법칙으로 활용하는 여러 가지 도형 문제가 두렵지 않을 거야.

Ⅲ 수열

G 등차수열

1. 등차수열의 일반항

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) **등차중항** : 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등차중항**이라 하고, $b=\dfrac{a+c}{2}$가 성립한다.

2. 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

3. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

H 등비수열

1. 등비수열의 일반항

(1) 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq 0)$인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=ar^{n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) **등비중항** : 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등비중항**이라 하고, $b^2=ac$가 성립한다.

2. 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq 0)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

(1) $r\neq 1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

I 수열의 합과 수학적 귀납법

1. 여러 가지 수열의 합

(1) 합의 기호 Σ의 성질

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

(2) 자연수의 거듭제곱의 합

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(3) 여러 가지 수열의 합

① 분수의 꼴로 주어진 수열의 합은 일반항을 부분분수로 변형하여 구한다.

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

② 분모에 근호가 포함된 수열의 합은 일반항의 분모를 유리화하여 구한다.

2. 수학적 귀납법

(1) 수열의 귀납적 정의

① $a_{n+1}=a_n+d$, $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 꼴

➡ 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열

② $a_{n+1}=ra_n$, $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$ 꼴

➡ 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열

③ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴

➡ n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하여 변끼리 더한다.

④ $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴

➡ n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하여 변끼리 곱한다.

(2) 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음의 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

s · t · r · a · t · e · g · y **1등급 전략**

숨어 있는 규칙을 찾자.

수열 단원의 문제를 학습하면 항의 값을 하나씩 차례로 풀어내는 문제를 종종 만나볼 수 있어. 하나씩 차례로 써 내려가는 것을 '나열하기'라고 해. 이때 나열하기는 나열은 하되 그 안에 존재하는 규칙을 발견하는 것이 핵심이지.
그렇다면 나열을 해 봤지만, 규칙을 발견하지 못한 이유는 무엇일까?
항의 값을 나열한 후, 계산 결과만으로 규칙을 찾으려고 했기 때문이야. 규칙은 각 항의 값을 구하는 과정을 차례로 나열하는 과정에서 발견될 가능성이 커. 처음부터 계산을 하지 말고, 계산 과정을 나타내는 식으로부터 규칙성을 발견해 보도록 하자.

I 지수함수와 로그함수

4점 기출 » 집중하기

A 지수

01

[2016학년도 **수능** A형 16번, B형 10번]

어느 금융상품에 초기자산 W_0을 투자하고 t년이 지난 시점에서의 기대자산 W가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W=\frac{W_0}{2}10^{at}(1+10^{at})$$

(단, $W_0>0$, $t\geq 0$이고, a는 상수이다.)

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배일 때, 실수 k의 값은? (단, $w_0>0$)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

02

[2014학년도 6월 **평가원** A형 15번]

지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

$$V_2=V_1\times\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1<H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.)

A지역에서 지면으로부터 12 m와 36 m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고, B지역에서 지면으로부터 10 m와 90 m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 양수이다.)

① 10 ② 13 ③ 16
④ 19 ⑤ 22

03

[2013학년도 **수능** 나형 26번]

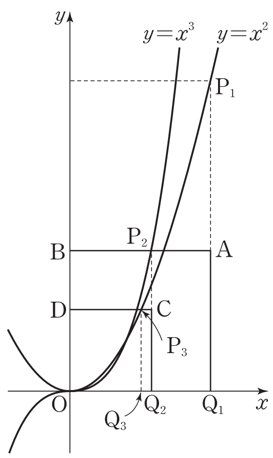
$2\leq n\leq 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

04

[2017학년도 3월 **교육청** 나형 15번]

그림과 같이 좌표평면에 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $P_1(a, f(a))(a>1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_1이라 하자. 선분 OQ_1을 한 변으로 하는 정사각형 OQ_1AB의 한 변 AB가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 P_2, 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_2라 하자. 선분 OQ_2를 한 변으로 하는 정사각형 OQ_2CD의 한 변 CD가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 P_3, 점 P_3에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_3이라 하자. 두 점 Q_2, Q_3의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $bc=2$가 되도록 하는 점 P_1의 y좌표의 값은?

(단, O는 원점이고, 두 점 A, C는 제1사분면에 있다.)



① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

B 로그

05

[2020학년도 9월 **평가원** 나형 28번]

네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오.

(가) $3^a=5^b=k^c$
(나) $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

06

[2019학년도 **수능** 나형 15번]

2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 34　② 38　③ 42　④ 46　⑤ 50

해설편 p. 2

07

[2018학년도 **수능** 나형 16번]

1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{\sqrt{3}} a = \log_9 ab$$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

08

[2016학년도 **수능** B형 20번]

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$라 하자.

$$f(n+10)=f(n)+1$$

을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

09

[2016학년도 9월 **평가원** A형 16번]

고속철도의 최고소음도 $L(\mathrm{dB})$을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 $d(\mathrm{m})$, 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 $v(\mathrm{km/h})$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{d}{25}$$

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때, 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A, L_B라 하자. L_B-L_A의 값은?

① $14-28\log 3$ ② $28-56\log 3$ ③ $28-28\log 3$ ④ $56-84\log 3$ ⑤ $56-56\log 3$

10

[2016학년도 6월 **평가원** A형 20번]

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$라 할 때,

$$f(ab)=f(a)f(b)+2$$

를 만족시키는 20 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은?

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

11

[2016학년도 6월 **평가원** B형 20번]

양수 t에 대하여 $\log t$의 소수 부분을 $f(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 t의 개수를 a_n이라 할 때, a_4+a_5의 값은?

(가) $1\le t<100$ (나) $f(t^n)+2f(t)=1$

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

12

[2015학년도 6월 **평가원** A형 15번]

세대당 종자의 평균 분산거리가 D이고 세대당 종자의 증식률이 R인 나무의 10세대 동안 확산에 의한 이동거리를 L이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L^2=100D^2\times\log_3 R$$

세대당 종자의 평균 분산거리가 20이고 세대당 종자의 증식률이 81인 나무의 10세대 동안 확산에 의한 이동거리 L의 값은? (단, 거리의 단위는 m이다.)

① 400　② 500　③ 600　④ 700　⑤ 800

13

[2014학년도 **수능** A형 14번]

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다. 물음에 답하시오.

$$f(n)=\begin{cases}\log_3 n & (n\text{이 홀수})\\ \log_2 n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

20 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 220　② 230　③ 240　④ 250　⑤ 260

14

[2014학년도 **수능** B형 20번]

1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2번째 수를 a, 6번째 수를 b라 하자. $\log ab$의 값은?

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

해설편 p. 4

15

[2014학년도 9월 **평가원** A형 17번, B형 10번]

질량 a(g)의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 c(%)인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A가 흡착되는 염료 B의 질량 b(g)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log \frac{b}{a} = -1 + k \log c \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

10 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4 g이다. 20 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량(g)은? (단, 각 용액의 양은 충분하다.)

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

16

[2014학년도 9월 **평가원** A형 20번]

자연수 n에 대하여 실수 a가 $10^n < a < 10^{n+1}$을 만족시킨다. $\log a$의 소수 부분과 $\log \sqrt[n]{a}$의 소수 부분의 합이 정수이고 $(n+1)\log a = n^2+8$일 때, $\frac{\log a}{n}$의 값은?

① $\frac{57}{56}$ ② $\frac{22}{21}$ ③ $\frac{11}{10}$
④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

17

[2014학년도 6월 **평가원** A형 30번]

자연수 k에 대하여 $\log k$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

(가) $1 \leq m < n < 100$
(나) $\overline{P_m P_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$

18

[2013학년도 6월 **평가원** 나형 21번]

양수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라 할 때, $f(2x) \leq f(x)$를 만족시키는 100보다 작은 자연수 x의 개수는?

① 55 ② 57 ③ 59
④ 61 ⑤ 63

19

[2012학년도 9월 **평가원** 나형 17번]

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은?

> (가) $f(x)+3g(x)$의 값은 정수이다.
> (나) $f(x)+f(x^2)=6$

① 10^4 ② $10^{\frac{13}{3}}$ ③ $10^{\frac{14}{3}}$
④ 10^5 ⑤ $10^{\frac{16}{3}}$

20

[2012학년도 6월 **평가원** 가형 30번, 나형 30번]

100 이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n\in S$에 대하여 집합

$\{k\,|\,k\in S$이고 $\log_2 n-\log_2 k$는 정수$\}$

의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$이고 $f(99)=1$이다. 이때 $f(n)=1$인 n의 개수를 구하시오.

21

[2010학년도 6월 **평가원** 나형 10번]

100보다 작은 두 자연수 a, b $(a<b)$에 대하여 $\log a$의 소수 부분과 $\log b$의 소수 부분의 합이 1이 되는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

22

[2008학년도 6월 **평가원** 나형 10번]

2 이상인 두 자연수 a, b에 대하여 $R(a, b)$를 $R(a, b)=\sqrt[a]{b}$로 정의할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> **보기**
> ㄱ. $R(16, 4)=R(8, 2)$
> ㄴ. $R(a, 5)\cdot R(b, 5)=R(a+b, 5)$
> ㄷ. $R(a, b)=k$이면 $a=\log_k b$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설편 p. 9

23

[2017학년도 3월 **교육청** 나형 29번]

2 이상의 자연수 x에 대하여

$\log_x n$ (n은 $1\le n\le 300$인 자연수)

가 자연수인 n의 개수를 $A(x)$라 하자. 예를 들어, $A(2)=8$, $A(3)=5$이다.

집합 $P=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 대응 f를

$f(x)=A(x)$ $(x\in X)$

로 정의하면 어떤 대응 f는 함수가 된다. 함수 f가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오.

C 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

24

[2020학년도 **수능** 가형 15번]

지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 B$(4,\ 0)$에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

(단, O는 원점이다.)

① $3^{\frac{1}{3}}$ ② $3^{\frac{2}{3}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

25

[2019학년도 6월 **평가원** 가형 14번]

직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\text{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

26

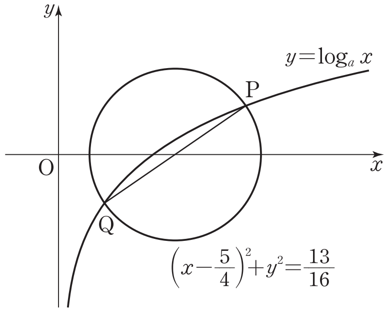
[2018학년도 9월 **평가원** 가형 16번]

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와

원 C : $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자.

선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



27

[2016학년도 6월 **평가원** A형 15번]

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$일 때, 상수 a의 값은?

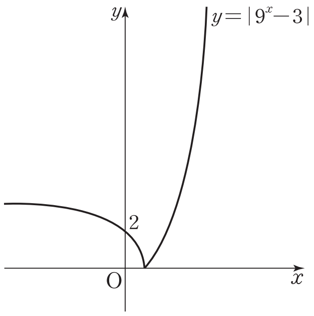
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

28

[2016학년도 6월 **평가원** B형 18번]

좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



29

[2015학년도 6월 **평가원** A형 20번, B형 19번]

$0<a<1<b$인 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a(bx-1),\quad g(x)=\log_b(ax-1)$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점이 곡선 $y=g(x)$의 점근선 위에 있도록 하는 a와 b 사이의 관계식과 a의 범위를 옳게 나타낸 것은?

① $b=-2a+2\ \left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

② $b=2a\ \left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

③ $b=2a\ \left(\frac{1}{2}<a<1\right)$

④ $b=2a+1\ \left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

⑤ $b=2a+1\ \left(\frac{1}{2}<a<1\right)$

해설편 p. 13

30

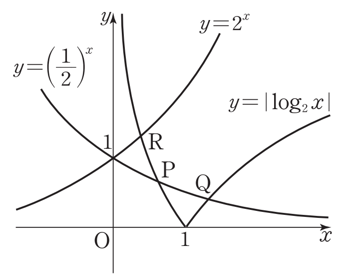
[2014학년도 **수능** A형 30번]

좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오.

31

[2011학년도 **수능** 가형 16번, 나형 16번]

좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3, y_3)$이라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$

ㄴ. $x_2y_2-x_3y_3=0$

ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$

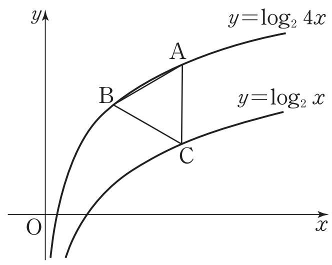
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

32

[2011학년도 9월 **평가원** 가형 15번, 나형 15번]

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2\times 2^q$의 값은?



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

33

[2010학년도 **수능** 가형 16번, 나형 16번]

자연수 n $(n\geq 2)$에 대하여 직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=|\log_2 x|$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 a_n, b_n $(a_n<b_n)$이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a_2<\dfrac{1}{4}$

ㄴ. $0<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$

ㄷ. $1-\dfrac{\log_2 n}{n}<\dfrac{b_n}{n}<1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설편 p. 16

34

[2010학년도 9월 **평가원** 나형 24번]

좌표평면에서 세 점 $(15, 4)$, $(15, 1)$, $(64, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

35

[2010학년도 6월 **평가원** 나형 9번]

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1 \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$$

이다. 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

36

[2009학년도 **수능** 나형 11번]

$0<a<\frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 (p, p), 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 (q, q)라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다.
ㄴ. $p<q$
ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D 지수함수와 로그함수의 활용

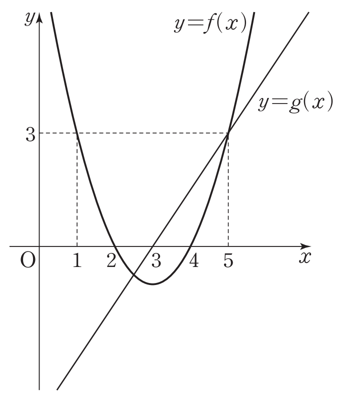
37

[2019학년도 **수능** 가형 14번]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?



① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

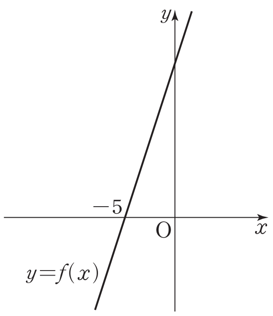
38

[2016학년도 6월 **평가원** A형 28번]

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(-5)=0$이다. 부등식

$$2^{f(x)} \leq 8$$

의 해가 $x \leq -4$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.



해설편 p. 19

39

[2015학년도 **수능** A형 15번]

부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \le 5^{x+4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

40

[2015학년도 **수능** A형 30번]

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

> (가) 점 A의 좌표는 $(-2,\ 3^n)$이다.
> (나) 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b \le \log_2 a$를 만족시킨다.
> (다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

41

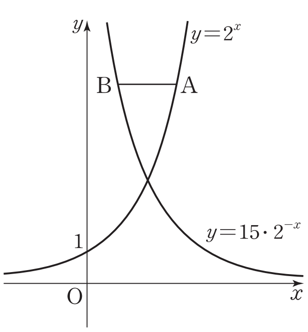
[2014학년도 6월 **평가원** A형 27번]

방정식 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

42

[2014학년도 6월 **평가원** A형 20번, B형 17번]

그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $1<\overline{\text{AB}}<100$을 만족시키는 2 이상의 자연수 a의 개수는?



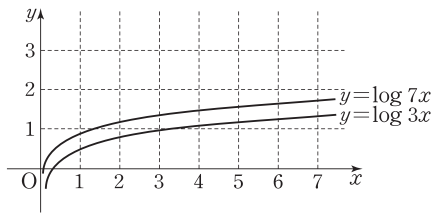
① 40 ② 43 ③ 46
④ 49 ⑤ 52

43

[2013학년도 9월 **평가원** 가형 30번, 나형 30번]

좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오.

> (가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
> (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



44

[2013학년도 6월 **평가원** 나형 29번]

방정식

$$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$$

이 실근을 갖기 위한 양수 a의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

45

[2012학년도 6월 **평가원** 나형 16번]

부등식 $\log_2 x^2-\log_2|x|\le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설편 p. 21

최고 난도

4점 기출 » 도전하기

46

[2017학년도 6월 **평가원** 나형 30번]

다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
> $0<b-a\le\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

47

[2012학년도 **수능** 가형 30번, 나형 30번]

자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t$ $(t\ge1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.
예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $2\le a\le10$, $2\le b\le10$
> (나) $t\ge1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}\le10$이다.

해설편 p. 25

수학 I

I 지수함수와 로그함수

pp. 16~30

01 ②	02 ③	03 16	04 ⑤	05 75
06 ①	07 ③	08 ⑤	09 ②	10 ③
11 ③	12 ①	13 ①	14 ⑤	15 ⑤
16 ④	17 12	18 ①	19 ②	20 25
21 ③	22 ③	23 7	24 ②	25 ②
26 ③	27 ④	28 ②	29 ③	30 15
31 ③	32 ③	33 ④	34 63	35 ②
36 ⑤	37 ④	38 15	39 ⑤	40 120
41 4	42 ④	43 79	44 36	45 ⑤
46 78	47 39			

01

정답률 59%

수능 유형 › 지수법칙의 활용 정답 ②

어느 금융상품에 초기자산 W_0을 투자하고 t년이 지난 시점에서의 기대자산 W가 다음과 같이 주어진다고 한다.

1

$$W=\frac{W_0}{2}10^{at}(1+10^{at})$$

(단, $W_0>0$, $t\geq 0$이고, a는 상수이다.)

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배일 때, 실수 k의 값은? (단, $w_0>0$) 2

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

주어진 관계식에 $W_0=w_0$, $W=3w_0$, $t=15$를 대입해서 식을 정리해.

해결 흐름

1 주어진 식에 조건을 만족시키는 값을 대입하여 식을 세워야겠다.

2 1에서 세운 식을 정리하면 k의 값을 구할 수 있겠군.

알찬 풀이

$W=\dfrac{W_0}{2}10^{at}(1+10^{at})$에서

$3w_0=\dfrac{w_0}{2}10^{15a}(1+10^{15a})$ → 주어진 관계식에 $W_0=w_0$, $W=3w_0$, $t=15$를 대입한 거야.

$\therefore 6=10^{15a}(1+10^{15a})$

$10^{15a}=X\ (X>0)$로 놓으면 $X(1+X)=6$ → 치환하면 범위에 주의해야 해. $10^{15a}>0$이므로 $X>0$이야.

$X^2+X-6=0$, $(X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=2\ (\because X>0)$ → $X=-3$ 또는 $X=2$이지만 $X>0$이므로 $X=-3$은 제외해야 해.

$\therefore 10^{15a}=2$

또, $kw_0=\dfrac{w_0}{2}10^{30a}(1+10^{30a})$이므로

$2k=10^{30a}(1+10^{30a})$ → 주어진 관계식에 $W_0=w_0$, $W=kw_0$, $t=30$을 대입한 거야.

이때 $10^{30a}=(10^{15a})^2=2^2=4$이므로

$2k=4(1+4)$에서 $2k=20$ $\quad\therefore k=10$

02

정답률 88%

수능 유형 › 지수법칙의 활용 정답 ③

지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

1

$$V_2=V_1\times\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1<H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.)

→ $H_1=12$, $H_2=36$, $V_1=2$, $V_2=8$이겠네.

A지역에서 지면으로부터 12 m와 36 m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고, 1 B지역에서 지면으로부터 10 m와 90 m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. 2 $\dfrac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 양수이다.)

① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 22

해결 흐름

1 A지역의 지면으로부터의 높이와 풍속 사이의 관계를 주어진 식에 대입하면 대기 안정도 계수 k에 대한 식을 얻을 수 있네.

2 B지역의 지면으로부터의 높이와 풍속 사이의 관계와 1에서 구한 k에 대한 식을 이용해서 $\dfrac{b}{a}$의 값을 구해야겠다.

알찬 풀이

A지역에서 지면으로부터 $H_1=12$(m)와 $H_2=36$(m)인 높이에서 풍속이 각각 $V_1=2$(m/초)와 $V_2=8$(m/초)이므로

$8=2\times\left(\dfrac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ $\quad\therefore 4=3^{\frac{2}{2-k}}$ → $V_1=2$, $V_2=8$, $H_1=12$, $H_2=36$을 주어진 식에 대입했어.

B지역에서 지면으로부터 $H_1=10$(m)와 $H_2=90$(m)인 높이에서 풍속이 각각 $V_1=a$(m/초)와 $V_2=b$(m/초)이므로

$b=a\times\left(\dfrac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}=a\times 9^{\frac{2}{2-k}}$ → $V_1=a$, $V_2=b$, $H_1=10$, $H_2=90$을 주어진 식에 대입했어.

$\therefore \dfrac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}=(3^2)^{\frac{2}{2-k}}=\left(3^{\frac{2}{2-k}}\right)^2=4^2=16$

문제 해결 TIP

육승준 | 서강대학교 영미어문학과 | 인천외국어고등학교 졸업

지수와 로그 단원에서 나오는 실생활 문제는 아주 쉬워. 관계식에 있는 미지수에 조건에 제시된 수들을 정확하게 넣고, 계산만 바르게 하면 되니까. 문제는 길지만 다 읽어 볼 필요도 없지. 괜히 문제 이해하려고 하다가 시간 뺏기지 말고, 미지수에 대입할 수부터 파악해.

03

정답률 55%

수능 유형 › 지수법칙 정답 16

$2\leq n\leq 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. 16

1 2

→ k가 자연수 x의 n제곱근이면 $k^n=x$야.

해결 흐름

1 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$을 근호를 사용하지 않고 지수가 유리수인 수로 나타내 봐야겠다.

2 1에서 구한 식이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 조건을 알아봐야겠네.

알찬 풀이

$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ (단, $a>0$이고 m, n은 2 이상의 자연수)

$(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$

3은 어떤 자연수의 제곱인 수가 아니니까 $3^{\frac{5n}{6}}$이 자연수이려면 $\frac{5n}{6}$이 자연수이어야 해.

$3^{\frac{5}{6}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되기 위해서는 $(3^{\frac{5}{6}})^n=3^{\frac{5n}{6}}$이 자연수이어야 하므로 $\frac{5n}{6}$이 자연수이어야 한다. 즉, n은 6의 배수이어야 한다.

$\frac{5n}{6}$에서 5와 6은 서로소이니까 n이 6의 배수이어야 해.

이때 n은 $2\le n\le 100$인 자연수이므로 2 이상 100 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수는 16이다.

따라서 n의 개수는 16이다.

04 수능 유형 › 지수법칙

정답률 69%

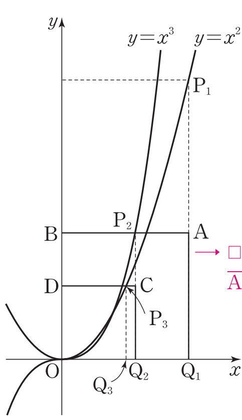
정답 ⑤

그림과 같이 좌표평면에 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $P_1(a, f(a))$ $(a>1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_1이라 하자. 선분 OQ_1을 한 변으로 하는 정사각형 OQ_1AB의 한 변 AB가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 P_2, 1 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_2라 하자. 선분 OQ_2를 한 변으로 하는 정사각형 OQ_2CD의 한 변 CD가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 P_3, 2 점 P_3에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_3이라 하자. 두 점 Q_2, Q_3의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $bc=2$가 되도록 하는 점 P_1의 y좌표의 값은?

$Q_1(a, 0)$이겠네.

각각 두 점 P_2, P_3의 x좌표와 같아.

(단, O는 원점이고, 두 점 A, C는 제1사분면에 있다.)



□OQ_1AB가 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AQ_1}$이야.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해결 흐름

1 정사각형의 성질을 이용하면 점 P_2의 좌표를 구할 수 있겠다.

연관 개념 | 점 (a, b)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이면 $b=f(a)$

2 같은 방법으로 점 P_3의 좌표도 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

$P_1(a, a^2)$이니까 $\overline{OQ_1}=a$이지.

정사각형 OQ_1AB의 한 변의 길이가 a이므로

$\overline{P_2Q_2}=a$

이때 $Q_2(b, 0)$이므로 $P_2(b, b^3)$

즉, $\overline{P_2Q_2}=b^3$이므로 $b^3=a$

$\therefore b=\sqrt[3]{a}$ …… ㉠

$b^3=a$에서 $(b^3)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$이니까 $b=\sqrt[3]{a}$야.

정사각형 OQ_2CD의 한 변의 길이가 b이므로

$\overline{P_3Q_3}=b$

$\overline{OQ_2}=b$이기 때문이지.

이때 $Q_3(c, 0)$이므로 $P_3(c, c^2)$

즉, $\overline{P_3Q_3}=c^2$이므로 $c^2=b$

$\therefore c=\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

b, c를 a의 거듭제곱근의 꼴로 나타낼 수 있어.

$bc=\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}=a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}=2$

따라서 $a=4$이므로 $P_1(4, 16)$에서 점 P_1의 y좌표의 값은 16이다.

점 P_1은 곡선 $y=x^2$ 위의 점이기 때문이야.

05 수능 유형 › 로그의 성질

정답률 18%

정답 75

네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. 75

(가) $3^a=5^b=k^c$ 2

(나) $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$ 1

해결 흐름

1 로그의 성질을 이용하여 식을 정리한 후, a, b, c 사이의 관계식을 구해야겠다.

2 $3^a=5^b=k^c=t$ $(t>0)$라 하고, 로그의 정의를 이용하여 a, b, c의 값을 구해야겠다.

연관 개념 | $a>0$, $a\ne 1$, $N>0$일 때

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

알찬 풀이

조건 (나)에서

$\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

$\log c=\log\frac{2ab}{2a+b}$

로그의 성질

$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

$\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$

$c=\frac{2ab}{2a+b}$

$\therefore \frac{1}{c}=\frac{2a+b}{2ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}$ …… ㉠

조건 (가)에서 $3^a=5^b=k^c=t$ $(t>1)$라 하면

$a=\log_3 t$, $b=\log_5 t$, $c=\log_k t$

a, b, c의 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{\log_k t}=\frac{1}{\log_5 t}+\frac{1}{2\log_3 t}$

로그의 밑의 변환

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$\log_t k=\log_t 5+\frac{1}{2}\log_t 3$

$\log_t k=\log_t 5\sqrt{3}$

$\log_t 5+\log_t 3^{\frac{1}{2}}$
$=\log_t 5+\log_t \sqrt{3}$
$=\log_t 5\sqrt{3}$

따라서 $k=5\sqrt{3}$이므로 $k^2=75$이다.

다른 풀이 조건 (나)에서 $\log c=\log\dfrac{2ab}{2a+b}$이므로

$c=\dfrac{2ab}{2a+b}$, 즉 $\dfrac{1}{c}=\dfrac{2a+b}{2ab}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a}$이다.

조건 (가)에서 $3^a=5^b=k^c=A\ (A>0)$라 하면

$A^{\frac{1}{a}}=3,\ A^{\frac{1}{b}}=5,\ A^{\frac{1}{c}}=k$ → $a^x=k\ (a>0)$일 때, $a=k^{\frac{1}{x}}$이야.

$$\begin{aligned}\therefore k&=A^{\frac{1}{c}}\\&=A^{\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}}\\&=A^{\frac{1}{b}}\times A^{\frac{1}{2a}}\\&=A^{\frac{1}{b}}\times\left(A^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=5\times 3^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$\therefore k^2=5^2\times 3=75$

문제 해결 TIP

인준영 | 서울대학교 국어교육과 | 대원외국어고등학교 졸업

다른 사람들도 그런지는 모르겠지만 나는 개인적으로 지수와 로그 부분이 제일 어려웠어. 지수와 로그 부분의 문제를 풀 때 늘 마음속에 새겨 두어야 할 것은 결국 기본적인 성질을 얼마나 잘 활용할 수 있는지를 묻는다는 거야. 다들 지수와 로그 공식은 대충 외웠겠지만, 혹시라도 이 문제를 풀지 못했다면 로그의 정의와 성질을 활용해서 다시 한 번 풀어 봐!
참고로 $3^a=5^b=k^c$과 같이 각각의 숫자들로 나타나 있을 때는 하나의 미지수를 더 설정하여 그 수를 중심으로 형태를 모두 통일해 주어야 해! 예를 들어, $3^a=5^b=k^c=\alpha$라고 하면 $\log_3\alpha=a$, $\log_5\alpha=b$, $\log_k\alpha=c$로 진수가 모두 α인 세 개의 로그를 만들 수 있어! 이제 다시 한번 도전해 보자!

06

정답률 80%

수능 유형 › 로그의 뜻과 성질 정답 ①

2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

1

✓① 34 ② 38 ③ 42
④ 46 ⑤ 50

해결 흐름

1 로그의 정의를 이용하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하면 되겠다.

연관 개념 | $a>0,\ a\neq 1,\ N>0$일 때
$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

알찬 풀이

$5\log_n 2=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$\log_n 2=\dfrac{k}{5}$에서 $2=n^{\frac{k}{5}}$ $\quad\therefore n=2^{\frac{5}{k}}$

$p>0,\ n>0$이고, x가 0이 아닌 정수이면 $p=n^{\frac{1}{x}} \Longleftrightarrow p^x=n$

이때 n이 2 이상의 자연수이므로 k의 값은 1 또는 5이다.

→ n이 2 이상의 자연수이므로 $\dfrac{5}{k}$도 자연수야. 그러니까 k는 5의 약수겠지?

따라서 $k=1$일 때 $n=2^5=32$,

$k=5$일 때 $n=2$이므로

모든 n의 값의 합은

$32+2=34$

07

정답률 81%

수능 유형 › 로그의 성질 정답 ③

1보다 큰 두 실수 $a,\ b$에 대하여

$\log_{\sqrt{3}} a=\log_9 ab$ 1

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은?

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

해결 흐름

1 주어진 등식에서 두 로그의 밑을 같게 한 후, $a,\ b$ 사이의 관계식을 구해야겠다.

알찬 풀이

$\log_{\sqrt{3}} a=2\log_3 a$ → $=\log_{3^{\frac{1}{2}}} a=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_3 a$

$\log_9 ab=\log_{3^2} ab=\dfrac{1}{2}\log_3 ab=\dfrac{1}{2}\log_3 a+\dfrac{1}{2}\log_3 b$

이므로 $2\log_3 a=\dfrac{1}{2}\log_3 a+\dfrac{1}{2}\log_3 b$에서 ← 로그의 밑을 3으로 변형했어.

$\dfrac{3}{2}\log_3 a=\dfrac{1}{2}\log_3 b$, $3\log_3 a=\log_3 b$

$\therefore \log_a b=\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=\dfrac{3\log_3 a}{\log_3 a}=3$

로그의 밑의 변환
$\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

다른 풀이 $\log_{\sqrt{3}} a=2\log_3 a=4\log_9 a=\log_9 a^4$ → 로그의 밑을 9로 변형했어.

이므로 $\log_9 a^4=\log_9 ab$에서

$a^4=ab,\ a(a^3-b)=0$

$\therefore b=a^3$ → 문제의 조건에서 $a>1$이라고 했으니까 $a\neq 0$이야.

$\therefore \log_a b=\log_a a^3=3\log_a a=3$

실전 적용 key

$a>0,\ a\neq 1,\ A>0,\ B>0$일 때, 실수 k에 대하여
$\log_a A=k\log_a B$이면 $A=B^k$이 성립한다.

08

정답률 88%

수능 유형 › 상용로그의 정수 부분 정답 ⑤

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$라 하자.

$f(n+10)=f(n)+1$

을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는?

→ 밑이 10이니까 10의 거듭제곱으로 나누어 $f(x)$를 유추해 봐. 1 2

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ✓⑤ 19

해결 흐름

1 n이 100 이하의 자연수이니까 $f(n)$의 값은 0, 1, 2이겠네.

2 $f(n)$의 값이 0, 1, 2일 때로 각각 나눠서
$f(n+10)=f(n)+1$을 만족시키는 100 이하의 자연수 n을 찾아봐야겠다.

알찬 풀이

$1\le n\le 100$이므로 $f(n)$은 $0\le f(n)\le 2$인 정수이다.

→ $\log 1=0$ → $\log 100=2$

(i) $f(n)=0$, 즉 $1\le n\le 9$일 때,

$f(n+10)=1$이어야 하므로 → $1\le \log(n+10)<2$에서 $10^1\le n+10<10^2$

$10\le n+10<100$에서

$0\le n<90$

$\therefore 1\le n\le 9$

(ii) $f(n)=1$, 즉 $10\le n\le 99$일 때,

$f(n+10)=2$이어야 하므로 → $2\le \log(n+10)<3$에서 $10^2\le n+10<10^3$

$100\le n+10<1000$에서

$90\le n<990$

$\therefore 90\le n\le 99$

(iii) $f(n)=2$, 즉 $n=100$일 때,

$f(n+10)=f(110)=2$이므로

$f(n+10)=3$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n의 개수는

$9+10=19$

09 수능 유형 › 로그의 활용

정답률 87% 정답 ②

고속철도의 최고소음도 $L(\text{dB})$을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 $d(\text{m})$, 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 $v(\text{km/h})$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{d}{25}$$

→ $d=75$로 일정해.

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때,[1] 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A, L_B라 하자.[2] L_B-L_A의 값은?

① $14-28\log 3$ ✓② $28-56\log 3$
③ $28-28\log 3$ ④ $56-84\log 3$
⑤ $56-56\log 3$

해결 흐름

1. 열차 B가 가까운 선로 중앙 지점 P를 통과할 때의 속력을 v라 하면 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력을 알 수 있겠군.
2. 가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리와 두 열차 A, B의 속력을 주어진 식에 각각 대입해서 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 구해야겠다.

알찬 풀이

열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v라 하면 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력은 $0.9v$이고 $d=75$이므로

$$L_A=80+28\log\frac{0.9v}{100}-14\log\frac{75}{25} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$L_B=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{75}{25} \quad \cdots\cdots ㉡$$

주어진 조건을 이용하여 L_A, L_B를 각각 나타낼 수 있어.

㉡－㉠에서

$$L_B-L_A=28\left(\log\frac{v}{100}-\log\frac{0.9v}{100}\right)$$

$$=28\log\frac{\frac{v}{100}}{\frac{0.9v}{100}}$$

$$=28\log\frac{10}{9}$$

$$=28(1-\log 9)$$

$$=28(1-2\log 3)$$

$$=28-56\log 3$$

로그의 성질
$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$
$\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$

$\log 9=\log 3^2=2\log 3$

10 수능 유형 › 상용로그의 정수 부분

정답률 68% 정답 ③

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분을 $f(x)$라 할 때,

$$f(ab)=f(a)f(b)+2$$

를 만족시키는 20 이하의 두 자연수 a, b의[1] 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은?[2]

→ $f(a)$, $f(b)$의 값은 0 또는 1이겠네.

① 19 ② 20 ✓③ 21
④ 22 ⑤ 23

해결 흐름

1. a, b의 값에 따라 $\log a$의 정수 부분과 $\log b$의 정수 부분이 각각 달라지니까 a, b의 값의 범위를 나눠서 생각해야겠다.
2. a, b의 값의 범위에 따라 $\log ab$의 정수 부분이 될 수 있는 모든 경우를 찾아야겠네.

알찬 풀이

(i) $1\le a\le 9$, $1\le b\le 9$인 경우,

$f(a)=f(b)=0$이므로 → $\log 1=0$, $\log 10=1$이니까 $\log a$와 $\log b$의 정수 부분은 모두 0이야.

$f(ab)=f(a)f(b)+2=0\times 0+2=2$

이때 $1\le ab\le 81$이므로 $f(ab)=2$인 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

→ $f(ab)=2$이면 $100\le ab\le 999$이어야 해.

(ii) $1\le a\le 9$, $10\le b\le 20$인 경우,

$f(a)=0$, $f(b)=1$이므로 → $\log a$의 정수 부분은 0, $\log b$의 정수 부분은 1이야.

$f(ab)=f(a)f(b)+2$

$\quad=0\times 1+2=2$

이때 $10\le ab\le 180$이므로 $f(ab)=2$이려면 $100\le ab\le 180$이어야 한다.

→ $\log ab$의 정수 부분이 2이면 ab는 세 자리 자연수이어야 해.

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(5, 20)$,

$(6, 17)$, $(6, 18)$, $(6, 19)$, $(6, 20)$,

$(7, 15)$, $(7, 16)$, $\cdots$, $(7, 20)$,

$(8, 13)$, $(8, 14)$, $\cdots$, $(8, 20)$,

$(9, 12)$, $(9, 13)$, $\cdots$, $(9, 20)$

이므로 $a+b$의 최솟값은 21이다.

(iii) $10\le a\le 20$, $1\le b\le 9$인 경우,

$f(a)=1$, $f(b)=0$이므로 → $\log a$의 정수 부분은 1, $\log b$의 정수 부분은 0이야.

$f(ab)=f(a)f(b)+2$

$\qquad =1\times 0+2=2$

이때 $10\le ab\le 180$이므로 $f(ab)=2$이려면 $100\le ab\le 180$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(12, 9)$,

$(13, 8)$, $(13, 9)$,

$(14, 8)$, $(14, 9)$,

$(15, 7)$, $(15, 8)$, $(15, 9)$,

$(16, 7)$, $(16, 8)$, $(16, 9)$,

$(17, 6)$, $(17, 7)$, $(17, 8)$, $(17, 9)$,

$(18, 6)$, $(18, 7)$, $(18, 8)$, $(18, 9)$,

$(19, 6)$, $(19, 7)$, $(19, 8)$, $(19, 9)$,

$(20, 5)$, $(20, 6)$, $(20, 7)$, $(20, 8)$, $(20, 9)$

이므로 $a+b$의 최솟값은 21이다.

(iv) $10\le a\le 20$, $10\le b\le 20$인 경우,

$f(a)=f(b)=1$이므로 → $\log a$와 $\log b$의 정수 부분이 모두 1이야.

$f(ab)=f(a)f(b)+2$

$\qquad =1\times 1+2=3$

이때 $100\le ab\le 400$이므로 $f(ab)=3$인 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

→ $\log ab$의 정수 부분이 3이면 ab는 네 자리 자연수이어야 해.

이상에서 $a+b$의 최솟값은 21이다.

문제 해결 TIP

강유나 | 고려대학교 생명공학과 | 창덕여자고등학교 졸업

a와 b가 20 이하의 자연수이니까 $f(a)$, $f(b)$의 값은 0과 1 중에 하나야. 그리고 $f(ab)$의 값은 가장 클 때가 $f(400)=2$이므로 $f(ab)$는 0, 1, 2 중 하나야.

그런데 $f(ab)$는 $f(a)f(b)$에 2를 더한 값이므로 2 또는 3일 수밖에 없어. 정리해 보면 $f(ab)=2$이고, $f(a)f(b)=0$이야.

만약 $f(a)$와 $f(b)$가 동시에 0이 된다고 하면 a, b는 모두 한 자리 자연수라는 거고, $f(ab)=2$이니까 ab는 세 자리 자연수라는 건데, 한 자리 자연수 두 개를 곱해서 세 자리 자연수가 되는 경우는 없으니까 $f(a)$와 $f(b)$가 동시에 0이 될 수는 없어.

$f(a)$만 0일 때, $f(ab)=2$이기 위한 b의 값을 찾아보면 순서쌍 (a, b)는 $(9, 12)$, $(8, 13)$, $(7, 15)$, $(6, 17)$, $(5, 20)$이 가능하지. 이때 순서쌍 $(9, 13)$, $(8, 14)$, …도 가능하지만 $a+b$의 최솟값을 구하는 문제이니까 a와 b의 합이 더 커지는 순서쌍은 굳이 구하지 않아도 돼.

$f(b)$만 0인 경우도 마찬가지로 풀 수 있어. (순서쌍에서 a와 b의 값만 서로 바뀌겠지?) 따라서 $a+b$의 최솟값은 21임을 구할 수 있어.

생생 수험 Talk

문제의 난이도가 높아질수록 문제에서 준 조건으로 문제 풀이를 해 나가는 것이 중요하고, 그 조건들을 적절한 순서를 가지고 잘 활용하는 것이 중요해! 이런 문제 풀이를 할 때, 어떻게 풀어야 하는지 한 번에 보이지 않는다면 일단 문제를 풀고 나서 답을 구한 후에 스스로 또는 해설을 보면서 문제 풀이의 순서를 정립하는 것이 좋아!

정답률 53%

11 수능 유형 › 상용로그의 정수 부분과 소수 부분 정답 ③

양수 t에 대하여 $\log t$의 소수 부분을 $f(t)$[1]라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 t의 개수를 a_n이라 할 때, a_4+a_5의 값은?

> (가) $1\le t<100$ → $\log t$의 정수 부분은 0 또는 1이겠네.
> (나) $f(t^n)+2f(t)=1$[2]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해결 흐름

1 소수 부분은 원래의 수에서 정수 부분을 빼서 구할 수 있어.

연관 개념 | $\log x$의 소수 부분은 $\log x-[\log x]$

2 $1\le t<100$에서 t의 값에 따라 $\log t$의 정수 부분이 달라지므로 t의 값의 범위를 나누어서 생각해야겠군.

알찬 풀이

$\log t$의 소수 부분은 $\log t-[\log t]$이므로

$f(t^n)=\log t^n-[\log t^n]$ → $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이니까 $[x]$는 x의 정수 부분을 나타내.

위의 식에서 $n=4$이면

(i) $1\le t<10$일 때, $0\le \log t<1$이므로 $[\log t]=0$이고,

$0\le 4\log t<4$에서 $[4\log t]=0, 1, 2, 3$

조건 (나)에서 $\log t^4-[\log t^4]+2\log t=1$

$4\log t-[4\log t]+2\log t=1$

로그의 성질 $\log M^k=k\log M$

$6\log t=[4\log t]+1$

$\therefore \log t=\dfrac{[4\log t]+1}{6}$ …… ㉠

이때 $[4\log t]=0$이면 $0\le \log t<\dfrac{1}{4}$ …… ㉡

→ $0\le 4\log t<1$이니까 $0\le \log t<\dfrac{1}{4}$이야.

㉠에서 $\log t=\dfrac{0+1}{6}=\dfrac{1}{6}$이므로 ㉡을 만족시킨다.

같은 방법으로 $[4\log t]=1, 2$일 때도 조건을 만족시킨다.

→ $3\le 4\log t<4$이니까 $\dfrac{3}{4}\le \log t<1$이야.

그런데 $[4\log t]=3$이면 $\dfrac{3}{4}\le \log t<1$ …… ㉢

이때 ㉠에서 $\log t=\dfrac{3+1}{6}=\dfrac{2}{3}$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 양수 t의 개수는 3이다.

(ii) $10\le t<100$일 때, $1\le \log t<2$이므로 $[\log t]=1$이고,

$4\le 4\log t<8$에서 $[4\log t]=4, 5, 6, 7$

조건 (나)에서 $\log t^4-[\log t^4]+2(\log t-[\log t])=1$

$4\log t-[4\log t]+2(\log t-1)=1$

$6\log t-[4\log t]-2=1$

$\therefore \log t=\dfrac{[4\log t]+3}{6}$

$[4\log t]=4$이면 $\log t=\dfrac{7}{6}$,

$[4\log t]=5$이면 $\log t=\dfrac{4}{3}$,

$[4\log t]=6$이면 $\log t=\dfrac{3}{2}$

이때 (i)과 같은 방법으로 풀면

$[4\log t]=4, 5, 6$일 때 조건을 만족시키고,

$[4\log t]=7$일 때 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 양수 t의 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 $a_4=3+3=6$

또, $n=5$이면

(iii) $1\le t<10$일 때, $0\le \log t<1$이므로 $[\log t]=0$이고,

$0 \le 5\log t < 5$에서 $[5\log t]=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

조건 (나)에서 $\log t^5 - [\log t^5] + 2\log t = 1$

$5\log t - [5\log t] + 2\log t = 1$

$\therefore \log t = \dfrac{[5\log t]+1}{7}$ ······ ㉣

이때 $[5\log t]=0$이면 $0 \le \log t < \dfrac{1}{5}$ ······ ㉤

㉣에서 $\log t = \dfrac{0+1}{7} = \dfrac{1}{7}$이므로 ㉤을 만족시킨다.

같은 방법으로 $[5\log t]=1,\ 2$일 때도 조건을 만족시킨다.

그런데 $[5\log t]=3$이면 $\dfrac{3}{5} \le \log t < \dfrac{4}{5}$ ······ ㉥

이때 ㉣에서 $\log t = \dfrac{3+1}{7} = \dfrac{4}{7}$이므로 ㉥을 만족시키지 않는다.

같은 방법으로 $[5\log t]=4$일 때도 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 양수 t의 개수는 3이다.

(iv) $10 \le t < 100$일 때, $1 \le \log t < 2$이므로 $[\log t]=1$이고,

$5 \le 5\log t < 10$에서 $[5\log t]=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

조건 (나)에서 $\log t^5 - [\log t^5] + 2(\log t - [\log t]) = 1$

$5\log t - [5\log t] + 2(\log t - 1) = 1$

$7\log t - [5\log t] - 2 = 1$

$\therefore \log t = \dfrac{[5\log t]+3}{7}$

$5 \le 5\log t < 10$이니까 $[5\log t]=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$이지.

이때 (iii)과 같은 방법으로 풀면 $[5\log t]=5,\ 6,\ 7$일 때 조건을 만족시키고, $[5\log t]=8,\ 9$일 때 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 양수 t의 개수는 3이다.

(iii), (iv)에서 $a_5=3+3=6$

$\therefore a_4+a_5=6+6=12$

수능 핵심 개념 상용로그의 정수 부분

$N>1$일 때, $\log N$의 정수 부분이 n이다.

$\Longleftrightarrow n \le \log N < n+1$

$\Longleftrightarrow 10^n \le N < 10^{n+1}$

12

정답률 93%

수능 유형 › 로그의 활용 　정답 ①

세대당 종자의 평균 분산거리가 D이고 세대당 종자의 증식률이 R인 나무의 10세대 동안 확산에 의한 이동거리를 L이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

1

$$L^2 = 100D^2 \times \log_3 R$$

$D=20$이네.

세대당 종자의 평균 분산거리가 20이고 세대당 종자의 증식률이 81인 나무의 10세대 동안 확산에 의한 이동거리 L의 값은? (단, 거리의 단위는 m이다.)

$R=81$이야.

① 400 　② 500 　③ 600 　④ 700 　⑤ 800

해결 흐름

1 주어진 관계식에 세대당 종자의 평균 분산거리 D, 세대당 종자의 증식률 R의 값을 대입해야겠다.

알찬 풀이

주어진 조건에서 $D=20$, $R=81$이므로 주어진 관계식에 대입하면

$L^2 = 100 \times 20^2 \times \log_3 81$

$= 100 \times 20^2 \times \log_3 3^4$

$= 100 \times 20^2 \times 4 = 400^2$

문장이 길지만 주어진 식에 조건을 대입하면 간단하게 해결돼.

$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$임을 이용했어.

이때 이동거리 L은 $L>0$이므로

$L=400$

13

정답률 53%

수능 유형 › 로그의 성질과 여러 가지 계산 　정답 ①

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다. 물음에 답하시오.

1

$$f(n) = \begin{cases} \log_3 n & (n\text{이 홀수}) \\ \log_2 n & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

20 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

2

① 220 　② 230 　③ 240 　④ 250 　⑤ 260

해결 흐름

1 m, n이 짝수인지, 홀수인지에 따라 $f(m)$, $f(n)$의 값이 달라지므로 m, n의 값의 범위를 각각 1, 1이 아닌 홀수, 짝수로 나누어 $f(mn)=f(m)+f(n)$에 대입해야겠다.

2 구하는 순서쌍의 개수는 모든 순서쌍의 개수에서 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키지 않는 순서쌍의 개수를 빼면 되겠네.

알찬 풀이

(i) m 또는 n이 1일 때,

$m=1$이면

$f(m)=\log_3 1=0$이지.

좌변은 $f(mn)=f(n)$

우변은 $f(m)+f(n)=\log_3 1+f(n)=f(n)$

따라서 $f(mn)=f(m)+f(n)$이 성립한다.

$n=1$일 때도 마찬가지로 $f(mn)=f(m)+f(n)$이 성립한다.

(ii) m, n이 모두 1이 아닌 홀수일 때,

mn은 홀수이므로

(홀수)×(홀수)=(홀수)

좌변은 $f(mn)=\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$

우변은 $f(m)+f(n)=\log_3 m+\log_3 n$

따라서 $f(mn)=f(m)+f(n)$이 성립한다.

로그의 성질

$\log_a MN$

$=\log_a M+\log_a N$

(iii) m은 1이 아닌 홀수, n은 짝수일 때,

mn은 짝수이므로

(홀수)×(짝수)=(짝수)

좌변은 $f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

우변은 $f(m)+f(n)=\log_3 m+\log_2 n$

따라서 $f(mn)\ne f(m)+f(n)$이다.

(iv) m은 짝수, n은 1이 아닌 홀수일 때도 (iii)과 마찬가지로 $f(mn)\ne f(m)+f(n)$이다.

(v) m, n이 모두 짝수일 때,

mn은 짝수이므로

(짝수)×(짝수)=(짝수)

좌변은 $f(mn)=\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

우변은 $f(m)+f(n)=\log_2 m+\log_2 n$

따라서 $f(mn)=f(m)+f(n)$이 성립한다.

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는 모든 순서쌍의 개수에서 (iii), (iv)를 만족시키는 순서쌍의 개수를 제외하여야 한다.

m, n은 20 이하의 자연수이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$20\times20=400$

(iii)을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$9\times10=90$ ⟶ m은 3, 5, 7, ⋯, 19의 9개, n은 2, 4, 6, ⋯, 20의 10개야.

(iv)를 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times9=90$ ⟶ m은 2, 4, 6, ⋯, 20의 10개, n은 3, 5, 7, ⋯, 19의 9개야.

따라서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$400-2\times90=220$

정답률 64%

14 수능 유형 › 상용로그의 정수 부분과 소수 부분 정답 ⑤

$\log x=f(x)+g(x)$야.

1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 1 $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 2 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2번째 수를 a, 6번째 수를 b라 하자. $\log ab$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 16

해결 흐름

1 $\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면 $3f(x)+5g(x)$를 n, α에 대한 식으로 나타낼 수 있겠군.

연관 개념 | 양수 N에 대하여 상용로그 $\log N$의 값은

$\log N=n+\log a$ (n은 정수, $0\le\log a<1$)

꼴로 나타낼 수 있다.

2 $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수임을 이용해서 n, α의 값을 각각 구할 수 있겠다.

알찬 풀이

$f(x)=n$, $g(x)=\alpha$이지.

$\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

$3f(x)+5g(x)=3n+5\alpha$가 10의 배수이므로

자연수 k에 대하여 $3n+5\alpha=10k$이어야 한다.

(i) $k=1$일 때, 즉 $3n+5\alpha=10$일 때

n은 정수, $0\le\alpha<1$이라는 조건을 이용해서 등식을 만족시키는 n, α의 값을 찾아야 해.

$n=2$, $\alpha=\dfrac{4}{5}$이면

$\log x=2+\dfrac{4}{5}=\dfrac{14}{5}$ $\therefore x=10^{\frac{14}{5}}$

$n=3$, $\alpha=\dfrac{1}{5}$이면

$\log x=3+\dfrac{1}{5}=\dfrac{16}{5}$ $\therefore x=10^{\frac{16}{5}}$

(ii) $k=2$일 때, 즉 $3n+5\alpha=20$일 때

$n=6$, $\alpha=\dfrac{2}{5}$이면

$\log x=6+\dfrac{2}{5}=\dfrac{32}{5}$ $\therefore x=10^{\frac{32}{5}}$

(iii) $k=3$일 때, 즉 $3n+5\alpha=30$일 때

$n=9$, $\alpha=\dfrac{3}{5}$이면

$\log x=9+\dfrac{3}{5}=\dfrac{48}{5}$ $\therefore x=10^{\frac{48}{5}}$

$n=10$, $\alpha=0$이면

$\log x=10$ $\therefore x=10^{10}$

(iv) $k=4$일 때, 즉 $3n+5\alpha=40$일 때

$n=12$, $\alpha=\dfrac{4}{5}$이면

$\log x=12+\dfrac{4}{5}=\dfrac{64}{5}$ $\therefore x=10^{\frac{64}{5}}$

$n=13$, $\alpha=\dfrac{1}{5}$이면

$\log x=13+\dfrac{1}{5}=\dfrac{66}{5}$ $\therefore x=10^{\frac{66}{5}}$

⋮

이상에서 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$10^{\frac{14}{5}}$, $10^{\frac{16}{5}}$, $10^{\frac{32}{5}}$, $10^{\frac{48}{5}}$, 10^{10}, $10^{\frac{64}{5}}$, $10^{\frac{66}{5}}$, ⋯

지수가 작은 것부터 차례로 나열하면 돼.

따라서 $a=10^{\frac{16}{5}}$, $b=10^{\frac{64}{5}}$이므로

$\log ab=\log\left(10^{\frac{16}{5}}\cdot10^{\frac{64}{5}}\right)=\log 10^{\frac{16}{5}+\frac{64}{5}}$

$=\log 10^{16}=16$

지수법칙 $a^m\times a^n=a^{m+n}$을 이용했어.

다른 풀이 $\log x=$(정수 부분)$+$(소수 부분)이므로

$\log x=f(x)+g(x)$

x는 1보다 큰 실수이므로 $f(x)$는 음이 아닌 정수이고, $g(x)$는

$0\le g(x)<1$ ⋯⋯ ㉠

을 만족시킨다. 또, $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수이므로

$3f(x)+5g(x)=10, 20, 30, \cdots$ ⋯⋯ ㉡

$x>1$이므로 $\log x>0$이야. 즉, $f(x)=g(x)=0$인 경우는 없으니까 0은 제외해야 해.

이라 할 수 있다.

이때 $3f(x)$가 음이 아닌 정수이므로 $5g(x)$도 정수이어야 한다.

㉠에서 $0\le5g(x)<5$이므로 $5g(x)=0, 1, 2, 3, 4$

$\therefore g(x)=0, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$

(i) $g(x)=0$일 때,

㉡에서 $3f(x)=10, 20, 30, \cdots$이므로

$f(x)=\dfrac{10}{3}, \dfrac{20}{3}, 10, \dfrac{40}{3}, \dfrac{50}{3}, \cdots$

이때 $f(x)$는 음이 아닌 정수이므로

$f(x)=10, 20, 30, \cdots$

즉, $\log x=10, 20, 30, \cdots$이므로

$x=10^{10}, 10^{20}, 10^{30}, \cdots$

(ii) $g(x)=\dfrac{1}{5}$일 때,

㉡에서 $3f(x)+1=10, 20, 30, 40, \cdots$이므로

$f(x)=3, \dfrac{19}{3}, \dfrac{29}{3}, 13, \cdots$

이때 $f(x)$는 음이 아닌 정수이므로

$f(x)=3, 13, \cdots$

즉, $\log x=3+\dfrac{1}{5}, 13+\dfrac{1}{5}, \cdots$이므로

$x=10^{3+\frac{1}{5}}, 10^{13+\frac{1}{5}}, \cdots$

(iii) $g(x)=\frac{2}{5}$일 때,

㉡에서 $3f(x)+2=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ \cdots$이므로

$f(x)=\frac{8}{3},\ 6,\ \frac{28}{3},\ \frac{38}{3},\ 16,\ \cdots$

이때 $f(x)$는 음이 아닌 정수이므로

$f(x)=6,\ 16,\ \cdots$

즉, $\log x=6+\frac{2}{5},\ 16+\frac{2}{5},\ \cdots$이므로

$x=10^{6+\frac{2}{5}},\ 10^{16+\frac{2}{5}},\ \cdots$

(iv) $g(x)=\frac{3}{5}$일 때,

㉡에서 $3f(x)+3=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ \cdots$이므로

$f(x)=\frac{7}{3},\ \frac{17}{3},\ 9,\ \frac{37}{3},\ \frac{47}{3},\ 19\ \cdots$

이때 $f(x)$는 음이 아닌 정수이므로

$f(x)=9,\ 19,\ \cdots$

즉, $\log x=9+\frac{3}{5},\ 19+\frac{3}{5},\ \cdots$이므로

$x=10^{9+\frac{3}{5}},\ 10^{19+\frac{3}{5}},\ \cdots$

(v) $g(x)=\frac{4}{5}$일 때,

㉡에서 $3f(x)+4=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ \cdots$이므로

$f(x)=2,\ \frac{16}{3},\ \frac{26}{3},\ 12,\ \cdots$

이때 $f(x)$는 음이 아닌 정수이므로

$f(x)=2,\ 12,\ \cdots$

즉, $\log x=2+\frac{4}{5},\ 12+\frac{4}{5},\ \cdots$이므로

$x=10^{2+\frac{4}{5}},\ 10^{12+\frac{4}{5}},\ \cdots$

이상에서 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$10^{2+\frac{4}{5}},\ 10^{3+\frac{1}{5}},\ 10^{6+\frac{2}{5}},\ 10^{9+\frac{3}{5}},\ 10^{10},\ 10^{12+\frac{4}{5}},\ \cdots$

따라서 $a=10^{3+\frac{1}{5}}=10^{\frac{16}{5}}$, $b=10^{12+\frac{4}{5}}=10^{\frac{64}{5}}$이므로

$\log ab=\log\left(10^{\frac{16}{5}}\cdot 10^{\frac{64}{5}}\right)=\log 10^{\frac{16}{5}+\frac{64}{5}}=\log 10^{16}=16$

→ $\log 10^{16}=16\log 10=16$

수능 핵심 개념 지수의 대소 비교

(1) $a>1$일 때

$x_1<x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$

(2) $0<a<1$일 때

$x_1<x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$

생생 수험 Talk

나는 정말 잠이 많은 편이야. 정말 졸릴 때는 잠을 이겨내려는 것보다 20분 정도 낮잠을 자고 시작하는 게 더 효율적이었어.

그리고 깨어 있는 시간 동안 열심히 공부한다면 충분히 잠을 자는 것도 다음 날 공부를 위해 컨디션 조절에 더 좋더라. 나만의 생활 리듬에 맞게 최대한 효율적으로 공부하는 것이 좋은 것 같아. 무조건 잠을 줄인다고 좋은 게 아니야!

정답률 A형 83%, B형 94%

15 수능 유형 › 로그의 활용 정답 ⑤

질량 a(g)의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 c(%)인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A가 흡착되는 염료 B의 질량 b(g)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

1 $\log\frac{b}{a}=-1+k\log c$ (단, k는 상수이다.)

→ $a=10$, $c=8$, $b=4$일 때 주어진 등식이 성립해.

10 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4 g이다. 20 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량(g) 2 은? (단, 각 용액의 양은 충분하다.)

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ✓⑤ 18

해결 흐름

1 10 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4 g임을 이용해서 k의 값을 구해야겠다.

2 20 g의 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 x라 하면 $a=20$, $b=x$, $c=27$이라는 것을 알 수 있으므로 k의 값만 알면 x의 값을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

$a=10$, $c=8$일 때, $b=4$이므로

→ 조건을 주어진 식에 대입하면 k의 값을 구할 수 있어.

$\boxed{\log\frac{4}{10}}=-1+k\log 8$

→ 로그의 성질 $\log\frac{n}{m}=\log n-\log m$을 이용했어.

$\boxed{2\log 2-\log 10}+1=3k\log 2$

$2\log 2=3k\log 2$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

$a=20$, $c=27$일 때, $b=x$라 하면

→ 구하는 염료 B의 질량을 x로 두고 앞에서 구한 k의 값을 이용하면 x를 구할 수 있어.

$\log\frac{x}{20}=-1+\frac{2}{3}\log 27$

$\log\left(\frac{x}{2}\times\frac{1}{10}\right)+1=\frac{2}{3}\times 3\log 3$

$\log\frac{x}{2}-\log 10+1=2\log 3$

$\log\frac{x}{2}=2\log 3=\log 9$

따라서 $\frac{x}{2}=9$이므로 $x=18$

정답률 58%

16 수능 유형 › 상용로그의 정수 부분과 소수 부분 정답 ④

자연수 n에 대하여 실수 a가 $10^n<a<10^{n+1}$ 1 을 만족시킨다. $\log a$의 소수 부분과 $\log\sqrt[n]{a}$의 소수 부분의 합이 정수 2 이고 $(n+1)\log a=n^2+8$일 때, $\frac{\log a}{n}$의 값은?

→ $\log a$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있겠네.

① $\frac{57}{56}$ ② $\frac{22}{21}$ ③ $\frac{11}{10}$
✓④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

해결 흐름

1 $10^n < a < 10^{n+1}$에서 $\log a$의 정수 부분은 n이므로 $\log a = n + \alpha\ (0 < \alpha < 1)$로 놓을 수 있네.

2 $\log a = n + \alpha\ (0 < \alpha < 1)$임을 이용해서 $\log \sqrt[n]{a}$의 소수 부분을 구하고, $\log a$의 소수 부분과 $\log \sqrt[n]{a}$의 소수 부분의 합이 정수임을 이용해서 식을 세워야겠군.

알찬 풀이

$10^n < a < 10^{n+1}$에서 $n < \log a < n+1$이므로 → $\log a$의 정수 부분이 n임을 알 수 있어.

$\log a = n + \alpha\ (0 < \alpha < 1)$라 하면

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a = \frac{1}{n}(n+\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{n}$$

$\log a$의 소수 부분과 $\log \sqrt[n]{a}$의 소수 부분의 합이 정수이므로

$\alpha + \frac{\alpha}{n} = 1$ → $0<\alpha<1$, $0<\frac{\alpha}{n}<1$이므로 $0<\alpha+\frac{\alpha}{n}<2$에서 $\alpha+\frac{\alpha}{n}$의 값이 될 수 있는 정수는 1뿐이야.

$\therefore \alpha = \frac{n}{n+1}$ ...... ㉠

또, $(n+1)\log a = n^2+8$에서

$(n+1)(n+\alpha) = n^2+8$

$(n+1)\left(n+\frac{n}{n+1}\right) = n^2+8$ ($\because$ ㉠)

$2n = 8 \quad \therefore n = 4$ → 이 식을 전개하면 $(n+1)n+(n+1)\times\frac{n}{n+1}=n^2+8$이니까 $n^2+2n=n^2+8$이 되겠네.

㉠에서 $\alpha = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$이므로

$$\frac{\log a}{n} = \frac{4+\frac{4}{5}}{4} = \frac{6}{5}$$

정답률 13%

17 수능 유형 › 상용로그의 정수 부분과 소수 부분

정답 12

자연수 k에 대하여 $\log k$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. **12**

→ 점 P_k의 x좌표는 정수, y좌표는 0 이상 1 미만의 수이겠네.

(가) $1 \le m < n < 100$ → $0 \le \log m < \log n < 2$이겠네.

(나) $\overline{P_mP_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$

해결 흐름

1 $\log m$, $\log n$의 정수 부분을 각각 n_1, n_2, 소수 부분을 각각 α_1, α_2라 하면 $\overline{P_mP_n}$의 길이를 구할 수 있겠군.

연관 개념 | 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2 조건 (나)의 $\overline{P_mP_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$에서 정수 부분과 소수 부분의 성질을 이용하면 n_1과 n_2, α_1과 α_2의 대소 관계를 파악할 수 있으니까 순서쌍 (m, n)을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

두 자연수 m, $n(m<n)$에 대하여

$\log m$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 n_1, α_1,

$\log n$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 n_2, α_2

라 하면 $P_m(n_1, \alpha_1)$, $P_n(n_2, \alpha_2)$ → P_k($\log k$의 정수 부분, $\log k$의 소수 부분)

조건 (나)에서 $\overline{P_mP_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$이므로

$\overline{P_mP_n}^2 = 1+(\log 2)^2$

$(n_2-n_1)^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2 = 1+(\log 2)^2$

이때 n_1, n_2는 정수이고

$0 \le \alpha_1 < 1$, $0 \le \alpha_2 < 1$이므로

$(n_2-n_1)^2 = 1$, $(\alpha_2-\alpha_1)^2 = (\log 2)^2$ → $0<\log 2<1$이니까 $0<(\log 2)^2<1$이야.

$|n_2-n_1| = 1$, $|\alpha_2-\alpha_1| = \log 2$

$m<n$이므로 $n_2 = n_1+1$ → $m<n$이니까 $n_2>n_1$이어야 해.

(i) $\alpha_2 > \alpha_1$일 때,

$\alpha_2 = \alpha_1 + \log 2$이므로

$\log m = n_1 + \alpha_1$ ...... ㉠

$\log n = n_1 + 1 + \alpha_1 + \log 2$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면

$\log \frac{n}{m} = 1 + \log 2$

$\log \frac{n}{m} = \log 20$, $\frac{n}{m} = 20$

$\therefore n = 20m$

이 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(1, 20)$, $(2, 40)$, $(3, 60)$, $(4, 80)$

의 4개이다. → $0 \le \log m < \log n < 2$이고 $n_2 = n_1+1$이니까 $\log m$의 정수 부분은 0, $\log n$의 정수 부분은 1이야. 즉, $1 \le m \le 9$, $10 \le n \le 99$이지.

(ii) $\alpha_2 < \alpha_1$일 때,

$\alpha_2 = \alpha_1 - \log 2$이므로

$\log m = n_1 + \alpha_1$ ...... ㉢

$\log n = n_1 + 1 + \alpha_1 - \log 2$ ...... ㉣

㉣−㉢을 하면

$\log \frac{n}{m} = 1 - \log 2$

$\log \frac{n}{m} = \log 5$, $\frac{n}{m} = 5$

$\therefore n = 5m$

이 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(2, 10)$, $(3, 15)$, $(4, 20)$, $(5, 25)$, $(6, 30)$, $(7, 35)$, $(8, 40)$, $(9, 45)$ → $1 \le m \le 9$, $10 \le n \le 99$를 만족시키는 자연수 m, n 중에서 골라야 해.

의 8개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$4+8=12$

오답 Clear

$n_2 = n_1+1$이므로 (ii)에서 순서쌍 (m, n)을 구할 때, $1 \le m \le 9$, $10 \le n < 100$을 만족시켜야 한다. 그러므로 순서쌍 $(1, 5)$는 제외해야 한다.

문제 해결 TIP

박하연 | 연세대학교 치의예과 | 현대고등학교 졸업

조건 (나)로부터 $\log m$, $\log n$의 정수 부분의 차가 1, 소수 부분의 차가 $\log 2$임을 알 수 있어.

그런데 $m<n$이기 때문에 $\log m$, $\log n$의 정수 부분은 각각 0, 1이어야 해. 즉, $1 \le m \le 9$, $10 \le n < 100$이지.

그러니까 $\log m$, $\log n$의 소수 부분은 각각 $\log m$, $\log n - 1$이고 소수 부분의 차가 $\log 2$이니까 $\log m - (\log n - 1) = \pm\log 2$가 성립하지.

두 식을 정리하면 $\frac{m}{n} = \frac{1}{5}$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{20}$의 식이 나오니까 이 식을 이용해서 m과 n의 범위에 맞게 순서쌍의 개수를 구하면 돼.

정답률 64%

18 수능 유형 › 상용로그의 정수 부분과 소수 부분

정답 ①

양수 x에 대하여 $\log x$의 소수 부분을 $f(x)$라 할 때, $f(2x) \le f(x)$를 만족시키는 100보다 작은 자연수 x의 개수는?

$1 \le x < 100$이니까 $0 \le \log x < 2$이겠네.

① 55 ② 57 ③ 59 ④ 61 ⑤ 63

해결 흐름

1 $f(x)$, $f(2x)$는 각각 $\log x$, $\log 2x$의 소수 부분이니까 $\log 2x$의 값이 정수가 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나눠서 $f(x)$, $f(2x)$를 구해야겠군.

2 1에서 구한 $f(x)$, $f(2x)$를 $f(2x) \le f(x)$에 대입해서 부등식을 만족시키는 x의 값을 조사해야겠네.

알찬 풀이

(i) $1 \le x < 5$일 때, $2 \le 2x < 10$이므로

$f(x) = \log x$ — $\log x$와 $\log 2x$의 정수 부분은 모두 0이야.

$f(2x) = \log 2x$

$= \log 2 + \log x$

따라서 $f(2x) > f(x)$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $5 \le x < 10$일 때, $10 \le 2x < 20$이므로

$f(x) = \log x$ — $\log x$의 정수 부분은 0, $\log 2x$의 정수 부분은 1이야.

$f(2x) = -1 + \log 2x$ — (소수 부분)=(원래의 수)−(정수 부분)이므로 $f(2x) = \log 2x - 1$임을 알 수 있어.

$= -1 + \log 2 + \log x$

이때 $f(2x) \le f(x)$에서

$-1 + \log 2 + \log x \le \log x$

$\therefore \log 2 < 1$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(iii) $10 \le x < 50$일 때, $20 \le 2x < 100$이므로

$f(x) = -1 + \log x$ — $\log x$와 $\log 2x$의 정수 부분은 모두 1이야.

$f(2x) = -1 + \log 2x$

$= -1 + \log 2 + \log x$

따라서 $f(2x) > f(x)$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(iv) $50 \le x < 100$일 때, $100 \le 2x < 200$이므로

$f(x) = -1 + \log x$ — $\log x$의 정수 부분은 1, $\log 2x$의 정수 부분은 2야.

$f(2x) = -2 + \log 2x$

$= -2 + \log 2 + \log x$

이때 $f(2x) \le f(x)$에서

$-2 + \log 2 + \log x \le -1 + \log x$

$\therefore \log 2 < 1$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

이상에서 $f(2x) < f(x)$를 만족시키는 자연수 x는

$\underbrace{5, 6, 7, 8, 9}_{5 \le x < 10}$와 $\underbrace{50, 51, 52, \cdots, 99}_{50 \le x < 100}$의 55개이다.

정답률 55%

19 수능 유형 › 상용로그의 정수 부분과 소수 부분

정답 ②

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은? — $\log x = f(x) + g(x)$이겠네.

> (가) $f(x) + 3g(x)$의 값은 정수이다.
> (나) $f(x) + f(x^2) = 6$

① 10^4 ② $10^{\frac{13}{3}}$ ③ $10^{\frac{14}{3}}$ ④ 10^5 ⑤ $10^{\frac{16}{3}}$

해결 흐름

1 $f(x)$는 $\log x$의 정수 부분이니까 $f(x) + 3g(x)$의 값이 정수이려면 $3g(x)$의 값도 정수이어야겠군. 또 $0 \le g(x) < 1$에서 $0 \le 3g(x) < 3$이므로 $3g(x) = 0, 1, 2$이어야겠네.

2 1에서 구한 $g(x)$의 값과 조건 (나)를 이용하여 x의 값을 구해야겠다.

알찬 풀이

양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$이므로

$f(x) = n$ (n은 음이 아닌 정수), $0 \le g(x) < 1$ …… ㉠

또, 조건 (가)에서 $f(x) + 3g(x)$의 값이 정수이므로 $3g(x)$의 값도 정수이어야 한다.

즉, ㉠에서 $0 \le 3g(x) < 3$이므로 — 이 범위 안에 있는 정수는 0, 1, 2의 3개야.

$3g(x) = 0, 1, 2$

$\therefore g(x) = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

(i) $g(x) = 0$일 때,

$\log x^2 = 2\log x = 2n$이므로 $f(x^2) = 2n$ — $\log x^2$의 정수 부분이야.

조건 (나)에서

$f(x) + f(x^2) = n + 2n = 6 \quad \therefore n = 2$

즉, $\log x = 2 + 0$이므로 $x = 10^2$

(ii) $g(x) = \frac{1}{3}$일 때, — $\log x = n + \frac{1}{3}$이야.

$\log x^2 = 2\log x = 2n + \frac{2}{3}$이므로 $f(x^2) = 2n$

조건 (나)에서

$f(x) + f(x^2) = n + 2n = 6 \quad \therefore n = 2$

즉, $\log x = 2 + \frac{1}{3}$이므로 $x = 10^{2+\frac{1}{3}} = 10^{\frac{7}{3}}$ — 로그의 정의 $\log_a N = x \Longleftrightarrow N = a^x$을 이용했어.

(iii) $g(x) = \frac{2}{3}$일 때,

$\log x^2 = 2\log x = 2n + \frac{4}{3} = 2n + 1 + \frac{1}{3}$이므로

$f(x^2) = 2n + 1$

조건 (나)에서

$f(x) + f(x^2) = n + (2n+1) = 6 \quad \therefore n = \frac{5}{3}$

이때 n은 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$10^2 \times 10^{\frac{7}{3}} = 10^{\frac{13}{3}}$

정답률 가형 42%, 나형 34%

20 수능 유형 › 로그의 성질과 여러 가지 계산 정답 25

100 이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n \in S$에 대하여 집합

$\{k \mid k \in S$이고 $\log_2 n - \log_2 k$는 정수$\}$ → S의 부분집합이겠네.

의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$이고 $f(99)=1$이다. 이때 $f(n)=1$인 n의 개수를 구하시오. 25

해결 흐름

1 $\log_2 n - \log_2 k = \log_2 \frac{n}{k}$=(정수)이므로 $\frac{n}{k}$은 2의 거듭제곱 꼴이어야겠네.

2 $\log_2 \frac{n}{k}$의 값이 정수가 될 때 두 수 n과 k 사이의 관계를 생각해 봐야겠다.

알찬 풀이

S는 100 이하의 자연수 전체의 집합이므로 n과 k는 100 이하의 자연수이고

$\log_2 n - \log_2 k = \log_2 \frac{n}{k}$ → 로그의 성질 $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$을 이용했어.

이 정수이어야 하므로 $\frac{n}{k}$이 $\cdots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \cdots$,

즉, 2^a (a는 정수)으로 나타내어지도록 하는 k의 값을 구해야 한다.

$f(n)=1$을 만족시키는 k에 대하여

(i) n이 $1 \le n \le 50$일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1$

$k=2n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=2^{-1}$

$k=n$과 $k=2n$ 모두 주어진 조건을 만족시키므로 k는 적어도 2개 이상이다. ← $f(n) \ge 2$이니까 $f(n) \ne 1$이야.

(ii) n이 50보다 큰 짝수일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1$

$k=\frac{n}{2}$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{\frac{n}{2}}=2$

$k=n$과 $k=\frac{n}{2}$ 모두 주어진 조건을 만족시키므로 k는 적어도 2개 이상이다. → $f(n) \ge 2$이니까 $f(n) \ne 1$이야.

(iii) n이 50보다 큰 홀수일 때,

$\frac{n}{k}=2^m$ (m은 정수), 즉 $k=\frac{n}{2^m}$을 만족시키는 정수 m은 0뿐이다.

$\therefore f(n)=1$

(i), (ii), (iii)에서 $f(n)=1$을 만족시키는 n은 50보다 큰 홀수이므로 51, 53, $\cdots$, 99의 25개이다.

실전 적용 key

$\log_2 n - \log_2 k = \log_2 \frac{n}{k}$=(정수)이므로 $\frac{n}{k}=2^a$ (a는 정수) 꼴이어야 한다. 예를 들어 $n=10$일 때, $\frac{10}{k}=2^a$을 만족시키는 k의 값을 구하면 $k=5, 10, 20, 40, 80$이므로 $f(10)=5$이다.

이런 방법으로 일일이 모두 구할 수 없으므로 n의 값을 기준으로 $\frac{n}{k}$의 값이 2^a (a는 정수)가 되도록 하는 n과 k의 값의 관계를 이용하여 $f(n)=1$인 경우를 찾아야 한다.

정답률 36%

21 수능 유형 › 상용로그의 정수 부분과 소수 부분 정답 ③

→ $1 \le a < b < 100$이니까 $0 \le \log a < 2$, $0 \le \log b < 2$이겠네.

100보다 작은 두 자연수 a, b ($a<b$)에 대하여 $\log a$의 소수 부분과 $\log b$의 소수 부분의 합이 1이 되는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

해결 흐름

1 $\log a$의 소수 부분과 $\log b$의 소수 부분의 합이 1이니까 $\log a + \log b$=(정수)이겠네.
$\log a + \log b = \log ab$=(정수)이니까 ab는 10의 거듭제곱의 꼴이겠네.

알찬 풀이

$\log a = n + \alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<1$),

$\log b = m + \beta$ (m은 정수, $0<\beta<1$)

라 하면 $\log a$와 $\log b$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\alpha+\beta=1$

즉, $\log a + \log b = \log ab = n+m+1$이므로

$\log ab$는 정수이다. → $\log ab = k$ (k는 정수)로 두면 $ab=10^k$이 되므로 ab가 10의 거듭제곱의 꼴임을 알 수 있어.

그러므로 ab는 10의 거듭제곱의 꼴이고, a, b는 각각 100보다 작은 자연수이므로 ab의 값은 10, 10^2, 10^3이 될 수 있다. → $1 \le a < 100$, $1 \le b < 100$이므로 $1 \le ab < 10000$, 즉 ab의 값이 될 수 있는 수는 10, 10^2, 10^3뿐이야.

$a<b$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는

(i) $ab=10$일 때,
$(2, 5)$의 1개

(ii) $ab=10^2$일 때,
$(2, 50)$, $(4, 25)$, $(5, 20)$의 3개

(iii) $ab=10^3$일 때,
$(20, 50)$, $(25, 40)$의 2개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $1+3+2=6$

오답 Clear

$ab=10$일 때, $a=1$, $b=10$이면 $\log a=0$이므로 $\alpha=0$

이때 $\log a$와 $\log b$의 소수 부분의 합이 1이므로 $\beta=1$이 된다. 즉, β는 소수 부분이라는 조건을 만족시키지 않으므로 순서쌍 $(1, 10)$은 제외시켜야 한다.

정답률 75%

22 수능 유형 › 지수법칙 + 로그의 성질과 여러 가지 계산 정답 ③

2 이상인 두 자연수 a, b에 대하여 $R(a, b)$를 $R(a, b)=\sqrt[a]{b}$로 정의할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $R(16, 4)=R(8, 2)$ → $\sqrt[16]{4}=\sqrt[8]{2}$가 성립하는지 알아봐야겠네.
ㄴ. $R(a, 5) \cdot R(b, 5) = R(a+b, 5)$
ㄷ. $R(a, b)=k$이면 $a=\log_k b$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해결 흐름

1 $R(a, b)$의 a, b에 주어진 수를 대입해서 등식이 성립하는지 확인해야겠다.

알찬 풀이

ㄱ. $R(16, 4)=\sqrt[16]{4}=\sqrt[8]{2}=R(8, 2)$ (참)

$\sqrt[16]{4}=\sqrt[16]{2^2}=\sqrt[8]{2}$야.

ㄴ. $R(a, 5)\cdot R(b, 5)=\sqrt[a]{5}\cdot\sqrt[b]{5}=5^{\frac{1}{a}}\cdot 5^{\frac{1}{b}}$

$=5^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=5^{\frac{a+b}{ab}}$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$이기 때문이야.

한편, $R(a+b, 5)=\sqrt[a+b]{5}=5^{\frac{1}{a+b}}$이므로

$R(a, 5)\cdot R(b, 5)\neq R(a+b, 5)$ (거짓)

ㄷ. $R(a, b)=\sqrt[a]{b}=k$이면 $b^{\frac{1}{a}}=k$

$\therefore b=k^a$

따라서 로그의 정의에 의하여

$a=\log_k b$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

로그의 정의
$a>0$, $a\neq 1$, $N>0$일 때
$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

23

정답률 24%

수능 유형 › 로그의 성질과 여러 가지 계산 정답 7

2 이상의 자연수 x에 대하여

$\log_x n$ (n은 $1\leq n\leq 300$인 자연수)

가 자연수인 n의 개수를 $A(x)$라 하자. 예를 들어,

$A(2)=8$, $A(3)=5$이다. $\log_3 n$이 자연수인 n은 3, 3^2, $\cdots$, 3^5의 5개야.

집합 $P=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 대응 f를

$f(x)=A(x)$ $(x\in X)$

로 정의하면 어떤 대응 f는 함수가 된다. 함수 f가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오. 7

해결 흐름

1 $\log_x n$의 값이 자연수가 될 조건을 먼저 생각해야겠다.

2 함수 f가 일대일대응이 될 조건을 생각해 보자.

알찬 풀이

$\log_x n=k$ (k는 자연수)이면 $n=x^k$이기 때문이야.

$\log_x n$이 자연수가 되려면 n은 x의 거듭제곱이어야 하므로 $A(x)$의 값은 1부터 300 사이의 자연수 중 x의 거듭제곱으로 나타내어지는 수의 개수이다.

$\underbrace{2^8}_{=256}<300<\underbrace{2^9}_{=512}$이므로 $A(2)=8$

이와 같은 방법으로 2 이상의 자연수 x에 대하여 $A(x)$의 값을 구하면

$4^4<300<4^5$이니까 $A(4)=4$야.

$A(2)=8$, $A(3)=5$, $A(4)=4$, $A(5)=3$, $A(6)=3$,

$A(7)=2$, $A(8)=2$, $\cdots$

$5^3<300<5^4$이니까 $A(5)=3$이야.

전체집합 P의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 대응 f가 일대일대응이 되려면 집합 X는 집합

$\{2, 3, 4, 5, 8\}$

의 부분집합이어야 하고

2와 8, 3과 5는 각각 동시에 원소로 가져야 한다.

일대일대응
함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일함수이고, (치역)$=$(공역)이면 함수 f는 일대일대응이다.

따라서 함수 $f: X \longrightarrow X$가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X는

$\{4\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 5\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5, 8\}$, $\{2, 3, 4, 5, 8\}$의 7개이다.

24

정답률 84%

수능 유형 › 지수함수의 그래프 + 로그방정식의 활용 정답 ②

$y=\sqrt{3}$을 $y=a^x$에 대입하면 점 A의 좌표를 구할 수 있어.

지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 $\mathrm{B}(4, 0)$에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

(단, O는 원점이다.)

① $3^{\frac{1}{3}}$ ② $3^{\frac{2}{3}}$ ③ 3
④ $3^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

해결 흐름

1 로그의 정의를 이용하여 점 A의 좌표를 구해야겠다.

2 두 직선 OA와 OB의 기울기를 구해서 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용하면 되겠네.

알찬 풀이

지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점이 A이므로

$\sqrt{3}=a^x$ $\quad\therefore x=\log_a\sqrt{3}$

$\therefore \mathrm{A}(\log_a\sqrt{3}, \sqrt{3})$

로그의 정의
$a>0$, $a\neq 1$, $N>0$일 때, $a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

직선 OA의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}$,

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}$

두 점을 지나는 직선의 기울기
두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$)

이때 두 직선 OA와 AB가 서로 수직이 되려면 두 직선 OA와 AB의 기울기의 곱이 -1이어야 하므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}=-1$, $\log_a\sqrt{3}(\log_a\sqrt{3}-4)=-3$

$(\log_a\sqrt{3})^2-4\log_a\sqrt{3}+3=0$, $(\log_a\sqrt{3}-1)(\log_a\sqrt{3}-3)=0$

$\log_a\sqrt{3}=1$ 또는 $\log_a\sqrt{3}=3$

$a=\sqrt{3}$ 또는 $a^3=\sqrt{3}$

$\therefore a=3^{\frac{1}{2}}$ 또는 $a=3^{\frac{1}{6}}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$

지수법칙
$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때
① $a^xa^y=a^{x+y}$
② $a^x\div a^y=a^{x-y}$
③ $(a^x)^y=a^{xy}$
④ $(ab)^x=a^xb^x$

25

정답률 62%

수능 유형 › 로그함수의 그래프 정답 ②

$x=k$를 대입하면 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있어.

직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$)

조건이 주어졌으니 주의해야겠다.

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

해결 흐름

1 두 점 A, B의 x좌표가 모두 k임을 이용하면 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있겠네.

2 $\overline{\mathrm{AB}}=2$임을 이용해서 k의 값을 구해 봐야겠다.

알찬 풀이

두 점 A, B의 x좌표가 같으니까 이 두 점 사이의 거리는 두 점의 y좌표의 차의 절댓값과 같아.

$\mathrm{A}(k,\ \log_2 k)$, $\mathrm{B}(k,\ -\log_2 (8-k))$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

$|\log_2 k+\log_2 (8-k)|=2$

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때, $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

$|\log_2 k(8-k)|=2$

$\therefore \log_2 k(8-k)=-2$ 또는 $\log_2 k(8-k)=2$

(i) $\log_2 k(8-k)=-2$일 때,

$k(8-k)=\frac{1}{4},\ 4k^2-32k+1=0 \qquad \therefore k=\frac{8\pm3\sqrt{7}}{2}$

이때 $0<k<8$이므로

$k=\frac{8-3\sqrt{7}}{2}$ 또는 $k=\frac{8+3\sqrt{7}}{2}$

약 0.03

약 7.97

로그의 정의
$a>0,\ a\neq1$일 때, 임의의 양수 N에 대하여 $x=\log_a N \Longleftrightarrow a^x=N$

(ii) $\log_2 k(8-k)=2$일 때,

로그의 정의를 이용했어.

$k(8-k)=4,\ k^2-8k+4=0 \qquad \therefore k=4\pm2\sqrt{3}$

이때 $0<k<8$이므로

$k=4-2\sqrt{3}$ 또는 $k=4+2\sqrt{3}$

약 0.54

약 7.46

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$\frac{8-3\sqrt{7}}{2}\times\frac{8+3\sqrt{7}}{2}\times(4-2\sqrt{3})\times(4+2\sqrt{3})=\frac{1}{4}\times4=1$

곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용했어.

26

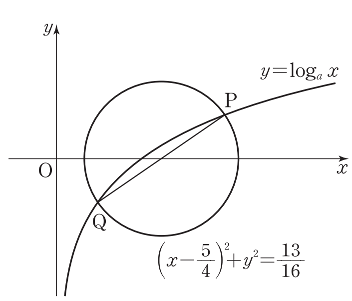
정답률 73%

수능 유형 › 로그함수의 그래프 정답 ③

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 C: $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

원 C의 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$이고 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{13}}{4}$이야.



해결 흐름

1 선분 PQ의 중점이 원 C의 중심이겠네.

연관 개념 | 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

2 원 C의 중심의 좌표와 지름의 길이를 이용해서 a의 값을 구해야겠다.

알찬 풀이

원 C는 중심의 좌표가 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{\frac{13}{16}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$이다.

두 점 P, Q의 좌표를 $\mathrm{P}(p,\ \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_a q)$ $(p>q)$라 하면 선분 PQ의 중점이 원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$과 일치하므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4},\ \frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$

$\log_a p+\log_a q=\log_a pq$이니까 $\log_a pq=0$에서 $pq=1$이야.

$\therefore p+q=\frac{5}{2},\ pq=1$

$p,\ q$를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0,\ 2t^2-5t+2=0,\ (2t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉, $p=2,\ q=\frac{1}{2}$

주어진 그림에서 (점 P의 x좌표)>(점 Q의 x좌표)이기 때문이야.

이때 $\mathrm{P}(2,\ \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ -\log_a 2\right)$이고, 선분 PQ의 길이가 원 C의 지름의 길이 $\frac{\sqrt{13}}{2}$과 같으므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2$

$=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$(\log_a 4)^2=1$

$a>1$이므로

$\log_a 4=1 \qquad \therefore a=4$

27

정답률 82%

수능 유형 › 지수함수와 로그함수의 그래프 정답 ④

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$일 때, 상수 a의 값은?

$y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동한 후 그 역함수를 구해서 이 식과 비교하면 돼.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해결 흐름

1 먼저 평행이동한 그래프를 나타내는 함수 $f(x)$의 식을 구해야겠어.

연관 개념 | 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은 $y-n=f(x-m)$

2 $y=f(x)$에서 x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구해야지.

알찬 풀이

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은

x 대신 $x-a$, y 대신 $y-2$를 대입해.

$y=\log_3 (x-a)+2$ …… ㉠

즉, $f(x)=\log_3 (x-a)+2$

㉠을 x에 대하여 풀면

$y-2=\log_3(x-a)$, $3^{y-2}=x-a$

$x=3^{y-2}+a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3^{x-2}+a$

즉, $f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$

이때 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$이므로

$a=4$

로그의 정의
$a>0$, $a\neq1$일 때, 임의의 양수 N에 대하여
$x=\log_a N \Longleftrightarrow a^x=N$

다른 풀이 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)$이므로 $f^{-1}(x)$의 역함수는 $f(x)$이다. $\to (f^{-1})^{-1}=f$

$f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$에서 $y=f^{-1}(x)$라 하면

$y=3^{x-2}+4$ → $y=3^{x-2}+4$의 역함수의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동한 것과 같아.

위의 식을 x에 대하여 풀면

$y-4=3^{x-2}$

$x-2=\log_3(y-4)$

$x=\log_3(y-4)+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_3(x-4)+2$

즉, $f(x)=\log_3(x-4)+2$

이때 함수 $y=\log_3(x-4)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a=4$

빠른 풀이 $f(x)=\log_3(x-a)+2$ …… ㉠

이때 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$이므로

이 식에 $x=2$를 대입하면 → 특정한 값을 대입해서 함숫값을 구할 수 있어. 꼭 $x=2$가 아니라 다른 값을 대입해도 돼.

$f^{-1}(2)=3^0+4=5$

$\therefore f(5)=2$

따라서 ㉠에서 $f(5)=\log_3(5-a)+2=2$

$\log_3(5-a)=0$, $5-a=1$ $\qquad\therefore a=4$

해결 흐름

1 곡선 $y=|9^x-3|$과 x축의 교점의 x좌표를 구해서 x축에서 2의 위치를 먼저 찾아야지.

연관 개념 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=0$의 해와 같다.

2 조건을 만족시키도록 곡선 $y=2^{x+k}$을 그려 봐야겠다.

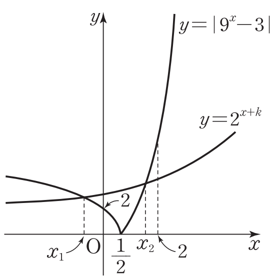
알찬 풀이

곡선 $y=|9^x-3|$과 x축의 교점의 x좌표는

$|9^x-3|=0$에서 $9^x-3=0$이므로

$9^x=3^{2x}=3$, $2x=1$ $\qquad\therefore x=\dfrac{1}{2}$

따라서 두 곡선 $y=|9^x-3|$, $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$가 $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키려면 곡선 $y=2^{x+k}$이 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이때 $f(x)=|9^x-3|$, $g(x)=2^{x+k}$이라 하면

$f(0)<g(0)$

이어야 하므로

$|9^0-3|<2^{0+k}$, $2^k>2$ → $9^0-3=1-3=-2$이니까 $|9^0-3|=2$

$\therefore k>1$ …… ㉠

또, $f(2)>g(2)$이어야 하므로

$|9^2-3|>2^{2+k}$, $2^{2+k}<78$

$2^6=64$, $2^7=128$이므로 $2+k<7$

$\therefore k<5$ → $k\le4$로 적어도 괜찮아. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1<k<5$이므로 구하는 자연수 k는

2, 3, 4

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$2+3+4=9$

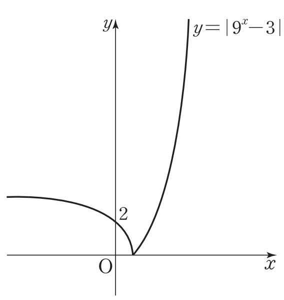
---

28 수능 유형 › 두 함수의 그래프의 교점 　정답률 74% 　정답 ②

좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

→ 이 범위에서 교점이 각각 존재하도록 $y=2^{x+k}$의 그래프를 그려 봐.

① 8 　② 9 　③ 10 　④ 11 　⑤ 12



29 수능 유형 › 로그함수의 그래프 　정답률 A형 63%, B형 70% 　정답 ③

$0<a<1<b$인 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a(bx-1),\quad g(x)=\log_b(ax-1)$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점이 곡선 $y=g(x)$의 점근선 위에 있도록 하는 a와 b 사이의 관계식과 a의 범위를 옳게 나타낸 것은?

b를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $0<a<1<b$를 이용해.

① $b=-2a+2$ $\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$

② $b=2a$ $\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$

③ $b=2a$ $\left(\dfrac{1}{2}<a<1\right)$

④ $b=2a+1$ $\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$

⑤ $b=2a+1$ $\left(\dfrac{1}{2}<a<1\right)$

해결 흐름

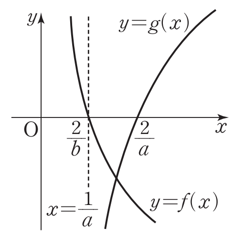
1 $0<a<1<b$이니까 함수 $y=f(x)$는 감소하는 함수이고, 함수 $y=g(x)$는 증가하는 함수구나.

연관 개념 | 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$에 대하여
① $0<a<1$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.
② $a>1$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.

2 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표를 구하고, 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식을 구해야지.

3 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표가 곡선 $y=g(x)$의 점근선과 x축의 교점의 x좌표와 일치함을 이용하면 되겠어.

알찬 풀이



곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는
$\log_a(bx-1)=0$에서 $bx-1=1$
$bx=2 \qquad \therefore x=\dfrac{2}{b}$
따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의
좌표는 $\left(\dfrac{2}{b},\ 0\right)$

$$g(x)=\log_b(ax-1)=\log_b a\left(x-\frac{1}{a}\right)=\log_b\left(x-\frac{1}{a}\right)+\log_b a$$

도형의 평행이동
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a,\ y-b)=0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{a}$
그런데 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점이 곡선 $y=g(x)$의 점근선 위에 있어야 하므로

곡선이 평행이동하면 점근선도 곡선이 평행이동한 만큼 평행이동해.

$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a} \qquad \therefore b=2a$
이때 $0<a<1<b$이므로 $0<a<1<2a \qquad \therefore \dfrac{1}{2}<a<1$
따라서 a와 b 사이의 관계식과 a의 범위는
$b=2a\ \left(\dfrac{1}{2}<a<1\right)$

빠른 풀이 평행이동을 이용하지 않아도 다음과 같이 로그함수의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.
곡선 $y=\log_b(ax-1)$의 점근선의 방정식은
$ax-1=0$에서 $ax=1 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{a}$

실전 적용 key
로그함수 $y=\log_a f(x)$에서 $f(\alpha)=0$일 때, 로그함수 $y=\log_a f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=\alpha$이다.

문제 해결 TIP
조성욱 | 연세대학교 치의예과 | 서라벌고등학교 졸업
지수함수와 로그함수에 대한 개념에서 가장 중요한 것을 뽑으라면 바로 점근선이 존재한다는 사실이야. 항상 그래프를 그릴 때 점근선을 빠놓지 않고 그려야 해.
이렇게 점근선에 대해서 직접적으로 묻는 문제도 있지만 간접적으로 묻는 경우가 훨씬 많아. 물론 밑의 범위에 따라 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 줄도 알아야 해.

정답률 14%

30 수능 유형 › 두 함수의 그래프의 교점 + 개수 세기 정답 15

곡선 $y=a^{-x+4}$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(4,\ 1)$을 지나니까 이 점을 지나도록 $y=a^{-x+4}$의 그래프를 그려 봐.

좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. **15**

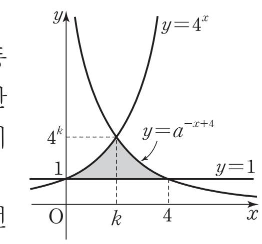
해결 흐름

1 먼저 문제에서 주어진 영역을 좌표평면에 나타내 봐야지.

2 그런데 교점의 위치에 따라 조건을 만족시키는 점의 개수가 달라지는데?

3 경우를 나누어서 생각해야겠네.

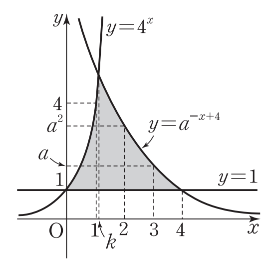
알찬 풀이



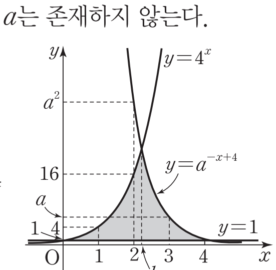
함수 $y=a^{-x+4}=a^{-(x-4)}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 이 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(4,\ 1)$을 지난다.
따라서 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같다.

교점의 x좌표의 위치에 따라 경우를 나눠 봐.

이때 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$의 교점의 x좌표를 k라 하자.



(i) $1\le k<2$일 때, 조건을 만족시키는 점의 x, y좌표는 다음과 같다.
x좌표가 0일 때, y좌표는 1
x좌표가 1일 때, y좌표는 1, 2, 3, 4
x좌표가 2일 때, y좌표는
1, 2, 3, $\cdots$, a^2
$y=a^{-x+4}$에서 $y=a^{-2+4}=a^2$
x좌표가 3일 때, y좌표는
1, 2, 3, $\cdots$, a
$y=a^{-x+4}$에서 $y=a^{-3+4}=a$
x좌표가 4일 때, y좌표는 1
따라서 조건을 만족시키는 점의 개수는
$1+4+a^2+a+1=a^2+a+6$
이때 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되어야 하므로
$20\le a^2+a+6\le 40$
a가 자연수이니까 이웃하는 두 수의 곱의 범위로 생각해.
$14\le a(a+1)\le 34$
$\therefore a=4$ 또는 $a=5$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠
그래프에서 $x=2$일 때 $a^{-2+4}<4^2$이므로 $a^2<16$임을 알 수 있어.
그런데 $a^2<16$이어야 하므로 $a<4$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.



(ii) $2\le k<3$일 때, 조건을 만족시키는 점의 x, y좌표는 다음과 같다.
x좌표가 0일 때, y좌표는 1
x좌표가 1일 때, y좌표는 1, 2, 3, 4
x좌표가 2일 때, y좌표는
1, 2, 3, $\cdots$, 16
$y=4^x$에서 $y=4^2=16$
x좌표가 3일 때, y좌표는
1, 2, 3, $\cdots$, a
$y=a^{-x+4}$에서 $y=a^{-3+4}=a$
x좌표가 4일 때, y좌표는 1

따라서 조건을 만족시키는 점의 개수는

$1+4+16+a+1=a+22$

이때 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되어야 하므로

$20\le a+22\le 40$

$\therefore -2\le a\le 18$ …… ㉢

그런데 $a^2\ge 16$이어야 하므로 $a\ge 4$ …… ㉣

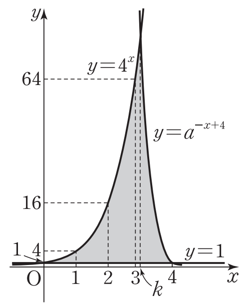
→ 그래프에서 $a^2\ge 16$임을 알 수 있어.

㉢, ㉣에서 $4\le a\le 18$

따라서 자연수 a의 개수는

$18-4+1=15$

(iii) $3\le k<4$일 때, 조건을 만족시키는 점의 x, y좌표는 다음과 같다.



x좌표가 0일 때, y좌표는 1

x좌표가 1일 때, y좌표는 1, 2, 3, 4

x좌표가 2일 때, y좌표는

1, 2, 3, $\cdots$, 16

x좌표가 3일 때, y좌표는

1, 2, 3, $\cdots$, 64

x좌표가 4일 때, y좌표는 1

따라서 조건을 만족시키는 점의 개수는

$1+4+16+64+1=86>40$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 a의 개수는 15이다.

다른 풀이 곡선 $y=4^x$은 점 $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 16)$, $(3, 64)$, $(4, 256)$을 지나고, 곡선 $y=a^{-x+4}$은 점 $(0, a^4)$, $(1, a^3)$, $(2, a^2)$, $(3, a)$, $(4, 1)$을 지난다.

→ 알찬 풀이의 그래프에서 주어진 영역에서 가능한 x좌표는 0, 1, 2, 3, 4뿐임을 알 수 있어.

(i) $a=2$ 또는 $a=3$일 때,

$a^4>1$, $a^3>4$, $a^2<16$, $a<64$, $1<256$

이므로 곡선 $y=4^x$과 곡선 $y=a^{-x+4}$의 교점의 x좌표를 c라 하면 사잇값의 정리에 의하여 c는 열린구간 $(1, 2)$에 존재한다.

이때 조건을 만족시키는 점의 개수는

$1+4+a^2+a+1=a^2+a+6$

그런데 $a=2$ 또는 $a=3$일 때, $a^2+a+6<20$이므로

$a\ne 2$, $a\ne 3$

(ii) $a=4$일 때,

$a^4>1$, $a^3>4$, $a^2=16$, $a<64$, $1<256$

이므로 곡선 $y=4^x$과 곡선 $y=a^{-x+4}$의 교점의 x좌표는 2이다.

이때 조건을 만족시키는 점의 개수는

$1+4+16+4+1=26$

(iii) $a\ge 5$일 때,

$a^4>1$, $a^3>4$, $a^2>16$, $a<64$, $1<256$

이므로 곡선 $y=4^x$과 곡선 $y=a^{-x+4}$의 교점의 x좌표를 c라 하면 사잇값의 정리에 의하여 c는 열린구간 $(2, 3)$에 존재한다.

이때 조건을 만족시키는 점의 개수는

$1+4+16+a+1=a+22$

점의 개수가 40 이하가 되어야 하므로

$a+22\le 40$

$\therefore a\le 18$

그런데 $a\ge 5$이므로 $5\le a\le 18$

(i), (ii), (iii)에서 $4\le a\le 18$

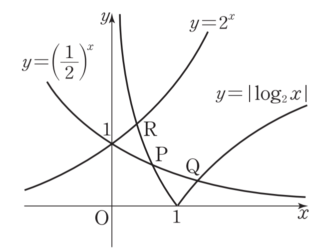
따라서 구하는 자연수 a의 개수는 $18-4+1=15$

31

정답률 가형 45%, 나형 40%

수능 유형 › 두 함수의 그래프의 교점 정답 ③

좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $R(x_3, y_3)$이라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$ → x좌표가 $\frac{1}{2}$인 점을 찾아봐.

ㄴ. $x_2y_2-x_3y_3=0$ → 두 점 Q, R 사이의 관계를 통해 확인할 수 있어.

ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$ → 직선의 기울기를 이용해.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해결 흐름

1 로그함수의 밑이 2이고, 지수함수의 밑이 각각 $\frac{1}{2}$, 2이니까 역함수 관계에 있는 두 함수를 찾을 수 있겠어.

연관 개념 | 로그함수 $y=\log_a x$와 지수함수 $y=a^x$은 서로 역함수 관계이다.

2 세 점 P, Q, R의 위치와 두 점 $(0, 1)$, $(1, 0)$의 위치를 비교해서 점의 좌표를 이용하여 보기의 참, 거짓을 알아보면 되겠구나.

알찬 풀이

ㄱ. 주어진 그림에서 곡선 $y=|\log_2 x|$ 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$과 점 $P(x_1, y_1)$의 위치를 비교하면 $y_1<1$이므로

$\frac{1}{2}<x_1<1$ (참)

→ 두 함수 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$은 서로 역함수 관계이고, 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=-\log_2 x$는 서로 역함수 관계야.

ㄴ. 두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=-\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 교점 $Q(x_2, y_2)$와 두 곡선 $y=2^x$, $y=-\log_2 x$의 교점 $R(x_3, y_3)$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, $x_2=y_3$, $y_2=x_3$

$\therefore x_2y_2-x_3y_3=0$ (참)

ㄷ. $S(1, 0)$이라 하면

$(\text{직선 RS의 기울기})=\frac{y_3}{x_3-1}$

$(\text{직선 PS의 기울기})=\frac{y_1}{x_1-1}$

두 점을 지나는 직선의 기울기
두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\ne x_2$)

이때 (직선 RS의 기울기)<(직선 PS의 기울기)이므로

$\frac{y_3}{x_3-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$ …… ㉠

ㄴ에서 $x_2=y_3$, $y_2=x_3$이므로 ㉠에 대입하면

$$\frac{x_2}{y_2-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$$

주어진 그래프에서 $x_1-1<0$, $y_2-1<0$이므로

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

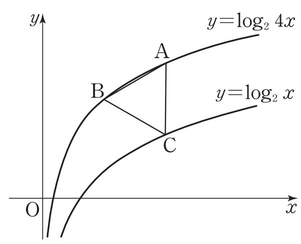
정답률 가형 84%, 나형 65%

32 수능 유형 › 로그함수의 그래프

정답 ③

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2\times 2^q$의 값은?

선분 AC의 길이는 두 점 A, C의 y좌표의 차와 같아.



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$

④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

해결 흐름

1 삼각형 ABC가 정삼각형이니까 세 변의 길이가 같아.

2 선분 AC의 길이를 구하면 정삼각형의 높이를 이용해서 점 B의 좌표도 구할 수 있겠구나.

알찬 풀이

선분 AC가 y축에 평행하므로 두 점 A, C의 x좌표는 같다.

$A(t, \log_2 4t)$, $C(t, \log_2 t)$ $(t>1)$라 하면

$$\overline{AC}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$$

$\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$

즉, 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 선분 AC의 중점을 M이라 하면

$\overline{BM}$은 정삼각형 ABC의 높이야.

$$\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$$

따라서 $B(t-\sqrt{3}, \log_2 4(t-\sqrt{3}))$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$$

$$=\sqrt{3+\left(\log_2\frac{t-\sqrt{3}}{t}\right)^2}=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AB}=\overline{AC}=2$

㉠의 양변을 제곱하면

$$3+\left(\log_2\frac{t-\sqrt{3}}{t}\right)^2=4,\ \left(\log_2\frac{t-\sqrt{3}}{t}\right)^2=1$$

$$\therefore \log_2\frac{t-\sqrt{3}}{t}=\pm 1$$

그런데 $t>1$이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2\frac{t-\sqrt{3}}{t}=-1$이므로

$$\frac{t-\sqrt{3}}{t}=2^{-1}=\frac{1}{2},\ 2(t-\sqrt{3})=t$$

$\therefore t=2\sqrt{3}$

$\therefore B(\sqrt{3}, \log_2 4\sqrt{3})$

따라서 $p=\sqrt{3}$, $q=\log_2 4\sqrt{3}$이므로

$$p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}$$

$$=3\times 4\sqrt{3}$$

$$=12\sqrt{3}$$

$a^{\log_a M}=M$

다른 풀이 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 선분 AC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3},$$

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 2=1$$

즉, 점 B의 x좌표는 점 A보다 $\sqrt{3}$만큼 작고 y좌표는 1만큼 작다.

$\therefore B(t-\sqrt{3}, \log_2 4t-1)$

이때 점 B는 함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 점이므로

$\log_2 4t-1=\log_2\{4(t-\sqrt{3})\}$

$2+\log_2 t-1=2+\log_2(t-3)$

$\log_2 t-\log_2(t-3)=1$

$\log_2\frac{t}{t-3}=1$

$\frac{t}{t-3}=2$

$t=2t-2\sqrt{3}$

$\therefore t=2\sqrt{3}$

$\therefore B(\sqrt{3}, \log_2 4\sqrt{3})$

$\log_2 8\sqrt{3}-1=\log_2\frac{8\sqrt{3}}{2}=\log_2 4\sqrt{3}$

정답률 가형 59%, 나형 51%

33 수능 유형 › 로그함수의 그래프

정답 ④

자연수 n $(n\ge 2)$에 대하여 직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=|\log_2 x|$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 a_n, b_n $(a_n<b_n)$이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

a_n, b_n은 방정식 $-x+n=|\log_2 x|$의 해야.

보기

ㄱ. $a_2<\frac{1}{4}$

ㄴ. $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

ㄷ. $1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해결 흐름

1 먼저 함수 $y=|\log_2 x|$의 그래프를 그려 봐야지.

연관 개념 | 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후, x축보다 아래쪽에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

2 직선 $y=-x+n$을 그려서 보기의 참, 거짓을 알아봐야겠다.

알찬 풀이

$y=|\log_2 x|$에서 $y=\begin{cases}\log_2 x & (x\ge1)\\ -\log_2 x & (0<x<1)\end{cases}$

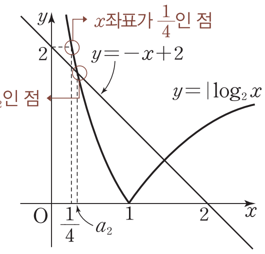
절댓값의 성질 $|a|=\begin{cases}a & (a\ge0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

ㄱ. $x=\frac{1}{4}$일 때,

$y=-\log_2\frac{1}{4}=2$이므로

곡선 $y=|\log_2 x|$는 점 $\left(\frac{1}{4},\ 2\right)$를 지난다.

이때 오른쪽 그림과 같이



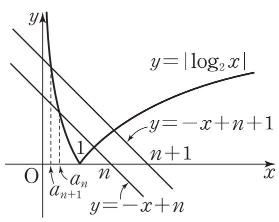
$\frac{1}{4}<x<1$일 때, 곡선 $y=|\log_2 x|$와 직선 $y=-x+2$의 교점은 1개이므로

$a_2>\frac{1}{4}$ (거짓)

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 자연수 $n\ (n\ge2)$에 대하여

$0<a_{n+1}<a_n$이므로

$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ (참)

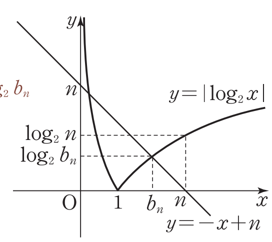


ㄷ. 오른쪽 그림과 같이

$\log_2 b_n<\log_2 n$이고,

점 $(b_n,\ \log_2 b_n)$은 직선 $y=-x+n$ 위의 점이므로

$y=-x+n$에 $x=b_n$, $y=\log_2 b_n$을 대입해.



$\log_2 b_n=-b_n+n$에서

$0=b_n-n+\log_2 b_n$

$<b_n-n+\log_2 n$ ($\because b_n<n$)

$\therefore n-\log_2 n<b_n$

양변을 n으로 나누면 $1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}$ → n은 자연수이니까 양변을 n으로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않아.

한편, $b_n<n$이므로 $\frac{b_n}{n}<1$

$\therefore 1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

34

정답률 40%

수능 유형 › 로그함수의 그래프 정답 63

좌표평면에서 세 점 $(15,\ 4)$, $(15,\ 1)$, $(64,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형[1]과 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프[2]가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. 63

→ k의 값의 범위를 구해 봐.

해결 흐름

1 먼저 좌표평면에서 삼각형의 세 꼭짓점의 위치를 찾아봐야겠다.

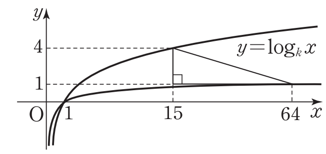
2 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프가 주어진 점을 지날 때, k의 값을 구하면 되겠네.

알찬 풀이

k가 자연수이므로 로그함수 $y=\log_k x$는 증가하는 함수이고, k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 0)$을 지난다. → $x=1$을 대입하면 $y=\log_k 1=0$

$1<k_1<k_2$일 때, 1보다 큰 임의의 실수 a에 대하여

$\log_{k_1} a>\log_{k_2} a$이므로 오른쪽 그림과 같이 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프가 점 $(15,\ 4)$를 지날 때 k의 값이 최소가 되고, 점 $(64,\ 1)$을 지날 때 k의 값이 최대가 된다.



(i) $4=\log_k 15$에서 $k^4=15$

$\therefore k=15^{\frac{1}{4}}<16^{\frac{1}{4}}=2$

(ii) $1=\log_k 64$에서 $k=64$

(i), (ii)에서 $2\le k\le64$ ($\because k$는 자연수)

따라서 자연수 k의 개수는 $64-2+1=63$

35

정답률 37%

수능 유형 › 지수함수의 그래프 정답 ②

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$[2]를 만족시키고,

→ $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$으로 나누어 $f(x)$를 나타내.

$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\ \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$$

이다. 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점[1]의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 7 ② 9 ③ 11

④ 13 ⑤ 15

해결 흐름

1 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프의 교점이 몇 개인지 직접 세어 봐야지.

2 함수 $y=f(x)$가 주기함수임을 이용해서 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 그 위에 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프를 그려야겠다.

연관 개념 | 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=f(x+p)$를 만족시키는 최소의 자연수 p를 함수 $f(x)$의 주기라 한다.

알찬 풀이

$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\ \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$에서

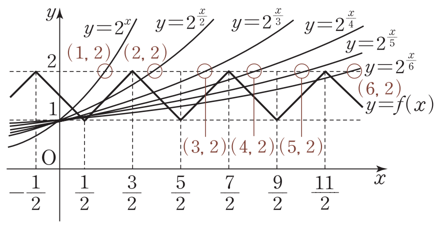
$$f(x)=\begin{cases}-x+\frac{3}{2} & \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)\\ x+\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

→ $x-\frac{1}{2}<0$이므로 $f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)+1=-x+\frac{3}{2}$

→ $x-\frac{1}{2}\ge0$이므로 $f(x)=x-\frac{1}{2}+1=x+\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키므로 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이다.

또, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프는 점 $(n,\ 2)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 위의 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되려면 $n=4$ 또는 $n=5$이어야 한다.

따라서 모든 n의 값의 합은

$4+5=9$

36

정답률 36%

수능 유형 › 로그함수의 그래프 　 정답 ⑤

$0<a<\frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 $(p,\ p)$, 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 $(q,\ q)$라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

$p=\log_a p$에서 $a^p=p$이고
$q=\log_{2a} q$에서 $(2a)^q=q$야.

보기

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다.

ㄴ. $p<q$

ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

① ㄱ 　 ② ㄱ, ㄴ 　 ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ 　 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해결 흐름

1 교점의 위치를 확인하기 위해 그래프부터 그려 봐야지.

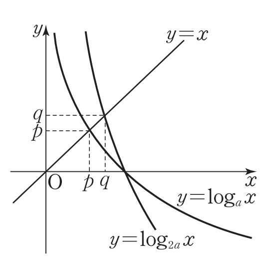
2 $0<a<\frac{1}{2}$이니까 두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_{2a} x$는 감소하는 함수야.

알찬 풀이

$0<a<2a<1$

$0<a<\frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여

직선 $y=x$와 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{2a} x$는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 점 $(p,\ p)$는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로 $p=\log_a p$에서

$a^p=p$

$p=\frac{1}{2}$이면 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ 　 양변을 제곱해.

$\therefore a=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서 $p<q$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $a^p=p$이고 점 $(q,\ q)$는 곡선 $y=\log_{2a} x$ 위의 점이므로 $q=\log_{2a} q$에서

$(2a)^q=q$

즉, $a^q=\frac{q}{2^q}$이므로

$a^{p+q}=a^p\times a^q$

$=p\times\frac{q}{2^q}$

$=\frac{pq}{2^q}$ (참)

> **지수법칙**
> $a>0,\ b>0$이고 $x,\ y$가 실수일 때
> ① $a^x a^y=a^{x+y}$
> ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$
> ③ $(a^x)^y=a^{xy}$
> ④ $(ab)^x=a^x b^x$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

문제 해결 TIP

조성욱 | 연세대학교 치의예과 | 서라벌고등학교 졸업

지수함수와 로그함수의 그래프와 관련해서 합답형 문제는 굉장히 중요한 유형이야. 단순한 대소 비교부터 기울기의 비교, 때로는 넓이의 비교까지 묻는 경우도 있어. 기출 문제들을 쭉 풀면서 각각의 문항들이 무엇을 묻는 것인지 알고 새로운 문제를 풀 때, 이전에 풀었던 문제들을 이용해서 빠르게 적용해야 해.

생생 수험 Talk

수학 공부에서 가장 중요한 점은 문제를 많이 풀어 보는 거야! 내신을 대비하면서 기본 개념과 간단한 기본 문제들을 완벽히 익혀 놓고, 수능을 대비하면서 기출 문제를 많이 풀어 보는 거지! 그리고 문제를 풀 때, 한 눈에 풀이 방법이 보이지 않는다고 해서 절대 포기하면 안 돼. 충분히 고민하고 여러 가지 방법을 시도해 보면서 공부해야 실력이 느는 것 같아.

37

정답률 60%

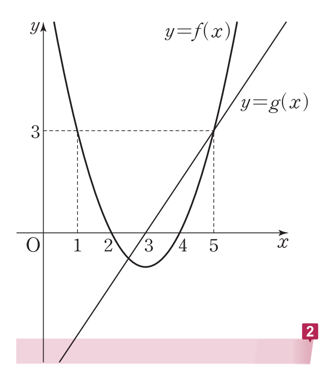
수능 유형 › 지수함수의 활용 – 부등식 　 정답 ④

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$이니까 밑을 $\frac{1}{2}$로 통일할 수 있어.

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?



① 7 　 ② 9 　 ③ 11

④ 13 　 ⑤ 15

해결 흐름

1 밑을 $\frac{1}{2}$로 같게 만들어서 지수끼리 비교하면 되겠구나.

연관 개념 | ① $a>1$일 때, $a^{f(x)}>a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

② $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}>a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$

2 주어진 두 함수의 그래프를 이용하여 **1**에서 구한 부등식을 풀어야겠네.

알찬 풀이

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

이때 (밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로 $f(x)g(x) \leq 3g(x)$

→ 밑이 1보다 작으니까 부등호의 방향이 바뀌었어.

$\therefore \{f(x)-3\}g(x) \leq 0$

(i) $f(x)-3 \geq 0$, $g(x) \leq 0$일 때,

즉, $f(x) \geq 3$, $g(x) \leq 0$이면

$f(x) \geq 3$에서 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$ → 주어진 그림에서 $y=f(x)$의 그래프가 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$일 때 $f(x) \geq 3$이 돼.

$g(x) \leq 0$에서 $x \leq 3$ → 주어진 그림에서 $y=g(x)$의 그래프가 $x \leq 3$일 때 $g(x) \leq 0$이 돼.

$\therefore x \leq 1$

(ii) $f(x)-3 \leq 0$, $g(x) \geq 0$일 때,

즉, $f(x) \leq 3$, $g(x) \geq 0$이면

$f(x) \leq 3$에서 $1 \leq x \leq 5$ → 주어진 그림에서 $y=f(x)$의 그래프가 $1 \leq x \leq 5$일 때 $f(x) \leq 3$이 돼.

$g(x) \geq 0$에서 $x \geq 3$ → 주어진 그림에서 $y=g(x)$의 그래프가 $x \geq 3$일 때 $g(x) \geq 0$이 돼.

$\therefore 3 \leq x \leq 5$

(i), (ii)에서 x의 값의 범위는 $x \leq 1$ 또는 $3 \leq x \leq 5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+3+4+5=13$

다른 풀이 주어진 그래프에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(2, 0)$, $(4, 0)$을 지나므로

$f(x)=a(x-2)(x-4)$ $(a>0)$로 놓으면

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$a(1-2)(1-4)=3$, $3a=3$ $\quad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x-2)(x-4)$

주어진 그래프에서 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(3, 0)$, $(5, 3)$을 지나므로

$y=\frac{3-0}{5-3}(x-3)$, $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$ $\qquad \therefore g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

이때 (밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로

$f(x)g(x) \leq 3g(x)$

$\therefore \{f(x)-3\}g(x) \leq 0$

위의 식에 $f(x)=(x-2)(x-4)$, $g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$를 대입하면

$\boxed{\{(x-2)(x-4)-3\}\left(\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\right) \leq 0}$

$\boxed{\frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-5) \leq 0}$

$\{(x-2)(x-4)-3\}\left(\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\right) \leq 0$

$(x^2-6x+5) \times \frac{3}{2}(x-3) \leq 0$

$(x-1)(x-5) \times \frac{3}{2}(x-3) \leq 0$

$\frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-5) \leq 0$

$\therefore x \leq 1$ 또는 $3 \leq x \leq 5$

→ $y=\frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-5)$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 찾으면 돼.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+3+4+5=13$

오답 Clear

부등식 $f(x)g(x) \leq 3g(x)$에서 $g(x)$의 부호를 생각하지 않고 양변을 $g(x)$로 나누지 않도록 주의한다.

정답률 72%

38 수능 유형 › 지수함수의 활용 – 부등식

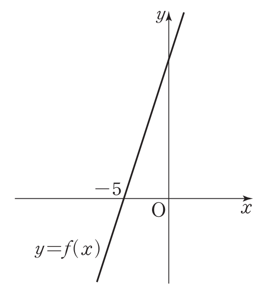
정답 15

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(-5)=0$이다. **1**

부등식

$2^{f(x)} \leq 8$ → 주어진 그림에서 함수 $f(x)$의 식을 구해서 대입해 봐.

의 해가 $x \leq -4$ **2** 일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. **15**



해결 흐름

1 $f(x)$가 일차함수이고 $f(-5)=0$이니까 $f(x)=a(x+5)$로 놓을 수 있겠네.

2 **1**의 식을 부등식에 대입하여 얻은 해가 $x \leq -4$임을 이용해야겠다.

알찬 풀이

$f(-5)=0$이므로 $f(x)=a(x+5)$ $(a>0)$로 놓자.

→ 주어진 그림에서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 위로 향하니까 $a>0$이라고 할 수 있어.

부등식 $2^{f(x)} \leq 8$에서 $2^{a(x+5)} \leq 2^3$

이때 (밑)$=2>1$이므로 $a(x+5) \leq 3$

→ 부등호의 방향이 그대로야.

$a>0$이므로 양변을 a로 나누면

$x+5 \leq \frac{3}{a}$ $\qquad \therefore x \leq \frac{3}{a}-5$

그런데 주어진 부등식의 해가 $x \leq -4$이므로

$\frac{3}{a}-5=-4$, $\frac{3}{a}=1$ $\qquad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x+15$이므로

$f(0)=15$

정답률 92%

39 수능 유형 › 지수함수의 활용 – 부등식

정답 ⑤

부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \leq 5^{x+4}$ **1** 을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

→ $\frac{1}{5}=5^{-1}$이니까 밑을 5로 통일할 수 있어.

① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

해결 흐름

1 밑을 5로 같게 만들어서 지수끼리 비교하면 되겠구나.

연관 개념 | ① $a>1$일 때, $a^{f(x)}>a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

② $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}>a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$

알찬 풀이

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}=5^{2x-1}$이므로 주어진 부등식은

$5^{2x-1} \leq 5^{x+4}$

→ $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}=(5^{-1})^{1-2x}=5^{-(1-2x)}=5^{2x-1}$

이때 (밑)$=5>1$이므로

$2x-1 \leq x+4$ $\qquad \therefore x \leq 5$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$

$\sum_{k=1}^{5} k=\frac{5\times6}{2}=15$로 계산할 수도 있어.

정답률 21%

40 수능 유형 › 로그함수의 활용 – 부등식 + 개수 세기 정답 120

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) **120**

$n=1, 2, 3$일 때의 $f(n)$의 값을 각각 구해.

(가) 점 A의 좌표는 $(-2, 3^n)$이다.
(나) 점 B의 좌표를 (a, b)라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b\le\log_2 a$를 만족시킨다.
(다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

좌표평면 위에 두 점 A, B를 나타낸 후, 넓이를 이용해서 식을 세워 봐.

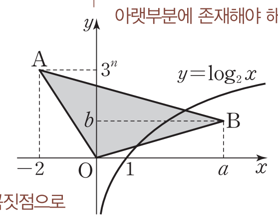
해결 흐름

1 삼각형 OAB의 개수를 구해야 하니까 일단 삼각형 OAB의 모양부터 살펴봐야지.
2 좌표평면에 두 점 A, B를 표시해야지. n이 정해지면 점 A는 하나로 정해지니까 결국 점 B의 개수가 삼각형 OAB의 개수와 같아지겠네.
3 조건 (나)에서 점 B는 곡선 $y=\log_2 x$의 아랫부분에 있어야 하겠네.

알찬 풀이

점 B는 곡선 $y=\log_2 x$의 아랫부분에 존재해야 해.

조건 (가), (나)를 만족시키도록 두 점 A, B를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3^n+b)\times(a+2)$ ← 네 점 $(-2, 0)$, A, B, $(a, 0)$을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이야.

$-\frac{1}{2}\times2\times3^n-\frac{1}{2}\times a\times b$ ← 세 점 O, B, $(a, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이야. / 세 점 O, A, $(-2, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이야.

$=\frac{a}{2}\times3^n+b$

조건 (다)에서 삼각형 OAB의 넓이가 50 이하이므로

$\frac{a}{2}\times3^n+b\le50$ $\quad\therefore 3^na+2b\le100$ …… ㉠

또, 조건 (나)에서 $b\le\log_2 a$ …… ㉡

따라서 $f(n)$은 ㉠, ㉡을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수와 같다.

그런데 $a=1$이면 ㉡을 만족시키는 자연수 b가 존재하지 않으므로

$a\ge2$

$a=1$이면 ㉡에서 $b\le\log_2 1=0$이야.

(i) $n=1$일 때,

㉠에서 $3a+2b\le100$

이때 a, b는 자연수이므로 $a=2, 3, 4, \cdots, 32$

$2^1\le a<2^2$일 때, $b=1$

$2^2\le a<2^3$일 때, $b=1, 2$

$2^3\le a<2^4$일 때, $b=1, 2, 3$

$2^4\le a\le30$일 때, $b=1, 2, 3, 4$

$a=31$일 때, $b=1, 2, 3$

$a=32$일 때, $b=1, 2$

$b\le\log_2 a$에서 로그의 밑이 2이니까 b의 값을 구하기 쉽도록 a의 값의 범위를 2의 거듭제곱을 이용해서 나눴어.

$\therefore f(1)=(2^2-2^1)\times1+(2^3-2^2)\times2+(2^4-2^3)\times3$
$\qquad+(30-2^4+1)\times4+3+2$
$\qquad=99$

(ii) $n=2$일 때,

㉠에서 $9a+2b\le100$

이때 a, b는 자연수이므로 $a=2, 3, 4, \cdots, 10$

$2^1\le a<2^2$일 때, $b=1$

$2^2\le a<2^3$일 때, $b=1, 2$

$2^3\le a\le10$일 때, $b=1, 2, 3$

$\therefore f(2)=(2^2-2^1)\times1+(2^3-2^2)\times2+(10-2^3+1)\times3$
$\qquad=19$

(iii) $n=3$일 때,

㉠에서 $27a+2b\le100$

이때 a, b는 자연수이므로 $a=2, 3$

$a=2$일 때, $b=1$

$a=3$일 때, $b=1$

$\therefore f(3)=2$

(i), (ii), (iii)에서

$f(1)+f(2)+f(3)=99+19+2$
$\qquad=120$

문제 해결 TIP

배지민 | 서울대학교 건축학과 | 화성고등학교 졸업

이 문제는 우선 좌표평면에 주어진 점을 그려서 삼각형 OAB를 이해해야 해. 특히 조건 (나)에서 점 (a, b)는 로그함수의 그래프보다 아랫부분에 있어야 하지. 일단 삼각형을 찾고 나면 삼각형의 넓이를 구하는 건 전혀 어렵지 않아. 그런데 문제는 이제부터 시작이야. 구해야 하는 값이 $f(1)+f(2)+f(3)$이니까 $n=1, 2, 3$일 때로 나누어서 $f(n)$를 구해야 해. 가장 이용하기 쉬운 힌트는 로그함수의 밑이 2라는 거지. 보통 이럴 때는 범위를 2의 거듭제곱 꼴의 수를 기준으로 나누어 주면 돼. 만약에 밑이 2가 아니라 3이나 5였다면 범위를 3의 거듭제곱, 5의 거듭제곱 꼴의 수를 기준으로 나누는 거고. 몇 번 문제를 풀다 보니 이런 규칙은 익숙해지더라. 그 다음은 개수를 빠짐없이 세야 해. 시간이 많이 걸리는 문제인 만큼 지칠 수 있겠지만 포기하지 말고 끝까지 풀어 본다면 반드시 좋은 결과가 있을 거야.

정답률 74%

41 수능 유형 › 로그함수의 활용 – 방정식 정답 4

방정식 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. **4**

양변에 밑이 2인 로그를 취해서 풀어.

해결 흐름

1 지수에 로그가 있으니까 양변에 로그를 취해서 풀면 되겠구나.

알찬 풀이

로그의 밑과 진수의 조건
$\log_a N$에서
① 밑의 조건 : $a>0$, $a\ne1$ ② 진수의 조건 : $N>0$

진수의 조건에서 $x>0$

주어진 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$

$(\log_2 x)^2=3+2\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 치환하면

$\log_2 8x^2=\log_2 8+\log_2 x^2$
$=\log_2 2^3+2\log_2 x$
$=3+2\log_2 x$

$t^2=3+2t$

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉, $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2^3=8$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=8$ 또는 $\alpha=8$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha\beta=\frac{1}{2}\times 8=4$ → $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=8$ 또는 $\alpha=8$, $\beta=\frac{1}{2}$일 때, $\alpha\beta$의 값은 같아.

다른풀이 $(\log_2 x)^2=3+2\log_2 x$ …… ㉠

$\log_2 x=t$로 치환하면

$t^2=3+2t$

$t^2-2t-3=0$ …… ㉡

이때 ㉠의 두 실근이 α, β이므로 ㉡의 두 실근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$

$\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=2^2=4$

이차방정식의 근과 계수의 관계
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

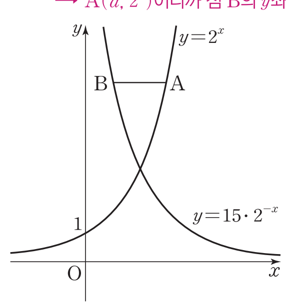
42

정답률 A형 69%, B형 76%

수능 유형 › 로그함수의 활용 – 부등식 정답 ④

그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $1<\overline{AB}<100$을 만족시키는 2 이상의 자연수 a의 개수는?

→ $A(a,\ 2^a)$이니까 점 B의 y좌표가 2^a임을 알 수 있어.



① 40 ② 43 ③ 46
④ 49 ⑤ 52

해결 흐름

1 $\overline{AB}$의 길이는 두 점 A, B의 x좌표의 차와 같으니까 점 B의 x좌표를 구하면 되겠군.

2 두 점 A, B의 y좌표가 같으니까 점 A의 y좌표를 이용하여 점 B의 x좌표를 구해야겠어.

알찬 풀이

점 A는 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이고, x좌표가 a이므로 점 A의 좌표는 $(a,\ 2^a)$이다.

이때 두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 점 B의 x좌표는

$2^a=15\cdot 2^{-x}$에서 $2^a=\frac{15}{2^x}$ → 점 B는 곡선 $y=15\cdot 2^{-x}$ 위의 점이니까 $2^a=15\cdot 2^{-x}$이 성립해.

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 2^a=\log_2\frac{15}{2^x}$ — $\log_2 2^a=\log_2\frac{15}{2^x}$에서 $a\log_2 2=\log_2 15-\log_2 2^x$이므로 $a=\log_2 15-x$야.

$a=\log_2 15-x$

$\therefore x=\log_2 15-a$

따라서 $B(\log_2 15-a,\ 2^a)$이므로

$\overline{AB}=a-(\log_2 15-a)$

$=2a-\log_2 15$ → $\overline{AB}$의 길이는 점 A의 x좌표에서 점 B의 x좌표를 뺀 값이야.

$1<\overline{AB}<100$에서

$1<2a-\log_2 15<100$

$1+\log_2 15<2a<100+\log_2 15$

이때 $3<\log_2 15<4$이므로

$4<2a<104$

$\therefore 2<a<52$

따라서 자연수 a는 3, 4, 5, …, 51의 49개이다.

다른풀이 $15\cdot 2^{-x}=2^{-x+\log_2 15}=2^{-(x-\log_2 15)}$ ($15=15^{\log_2 2}=2^{\log_2 15}$)

이므로 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\log_2 15$만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 두 함수 $y=2^x$, $y=2^{-x}$의 그래프는 y축, 즉 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=2^x$, $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}\log_2 15$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\frac{1}{2}\overline{AB}=a-\frac{1}{2}\log_2 15$이므로 $1<\overline{AB}<100$에서

→ 점 A와 직선 $x=\frac{1}{2}\log_2 15$ 사이의 거리와 같아.

$\frac{1}{2}<a-\frac{1}{2}\log_2 15<50$

$\therefore \frac{1}{2}(1+\log_2 15)<a<50+\frac{1}{2}\log_2 15$ …… ㉠

$\frac{1}{2}(1+\log_2 15)=\frac{1}{2}\log_2 30=\log_2\sqrt{30}$이고

$2^2<\sqrt{30}<2^3$이므로 $2<\log_2\sqrt{30}<3$ …… ㉡

$\frac{1}{2}\log_2 15=\log_2\sqrt{15}$이고

$2<\sqrt{15}<2^2$이므로 $1<\log_2\sqrt{15}<2$

→ 각 변에 밑이 2인 로그를 취했어.

$51<50+\frac{1}{2}\log_2 15<52$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의하여 ㉠에서

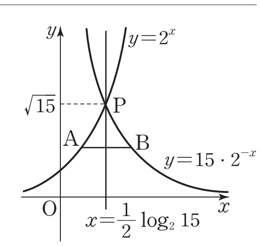
$2<a<52$

따라서 자연수 a는 3, 4, 5, …, 51의 49개이다.

실전 적용 key

함수 $y=2^x$의 그래프와 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}\log_2 15$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=2^x$의 그래프와 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프가 만나는 점을 P라 하면

$P\left(\frac{1}{2}\log_2 15,\ \sqrt{15}\right)$



만약 $a=1$이면 $A(1,\ 2)$가 되어 오른쪽 그림과 같이 문제에서 주어진 그림과 다른 상황이기 때문에 혼란을 막기 위해 '2 이상의 자연수 a'라는 조건이 제시된 것으로 볼 수 있다.

43

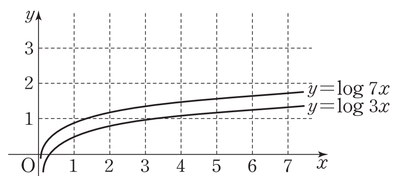
정답률 가형 18%, 나형 15%

수능 유형 › 로그함수의 활용 – 부등식 **정답 79**

좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오. **79**

정사각형의 한 꼭짓점의 좌표를 (n, k)라 하고 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 n, k에 대하여 나타내 봐.

> (가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다. 1
> (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다. 2



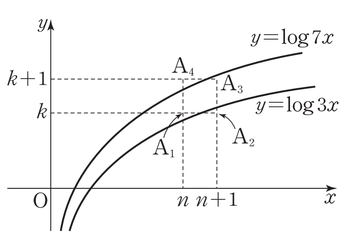
해결 흐름

1 두 함수의 그래프와 모두 만나도록 한 변의 길이가 1인 정사각형을 그려 봐야지.

2 조건을 만족시키도록 정사각형의 꼭짓점의 y좌표가 가져야 하는 성질을 찾아 봐야겠어.

알찬 풀이

두 자연수 n, k에 대하여 오른쪽 그림과 같이 네 점 $A_1(n, k)$, $A_2(n+1, k)$, $A_3(n+1, k+1)$, $A_4(n, k+1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형이 두 함수



$y=\log 3x$, $y=\log 7x$의 그래프와 모두 만나기 위해서는

$\log 7n\le k+1$, $\log 3(n+1)\ge k$ → 정사각형이 두 함수와 모두 만나야 하므로 두 부등식을 모두 만족시켜야 해.

를 만족시켜야 한다.

$\log 7n\le k+1$에서

$7n\le 10^{k+1}$ $\quad\therefore n\le \dfrac{10^{k+1}}{7}$ ······ ㉠

$\log 3(n+1)\ge k$에서

$3(n+1)\ge 10^k$, $n+1\ge \dfrac{10^k}{3}$ $\quad\therefore n\ge \dfrac{10^k}{3}-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{10^k}{3}-1\le n\le \dfrac{10^{k+1}}{7}$

또, 조건 (나)에서 $n+1\le 100$이므로 $n\le 99$

→ $n+1$도 꼭짓점의 x좌표이니까 100 이하여야 해.

즉, $\dfrac{10^k}{3}-1\le 99$이므로 $10^k\le 300$

→ $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$이니까 $k=1$ 또는 $k=2$야.

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$

(i) $k=1$일 때, $\dfrac{10}{3}-1\le n\le \dfrac{100}{7}$ → $\dfrac{10^k}{3}-1\le n\le \dfrac{10^{k+1}}{7}$에 $k=1$을 대입한 거야.

따라서 자연수 n은 3, 4, …, 14의 12개이다.

(ii) $k=2$일 때, $\dfrac{100}{3}-1\le n\le \dfrac{1000}{7}$ → $\dfrac{10^k}{3}-1\le n\le \dfrac{10^{k+1}}{7}$에 $k=2$를 대입한 거야.

그런데 $n\le 99$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 n은 33, 34, …, 99의 67개이다.

(i), (ii)에서 구하는 정사각형의 개수는 $12+67=79$

44

정답률 48%

수능 유형 › 지수함수의 활용 – 방정식 **정답 36**

방정식 → 치환을 이용할 수 있도록 식을 변형해.

$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$ 2 3

이 실근을 갖기 위한 1 양수 a의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. **36**

해결 흐름

1 방정식이 실근을 갖도록 하는 조건을 구하는 문제구나.

2 x가 실수이니까 2^x-2^{-x}을 t로 치환하면 t도 실수가 되겠어.

3 치환해서 t에 대한 방정식으로 생각해 봐야지.

알찬 풀이

$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$ ······ ㉠

에서 $(2^x-2^{-x})^2+a(2^x-2^{-x})+9=0$

$2^x-2^{-x}=t$로 치환하면

→ $(2^x-2^{-x})^2=4^x+4^{-x}-2$이니까 $4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$에서 $(2^x-2^{-x})^2+a(2^x-2^{-x})+9=0$

$t^2+at+9=0$ ······ ㉡

㉠이 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉡도 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=a^2-36\ge 0$

$(a+6)(a-6)\ge 0$

$\therefore a\le -6$ 또는 $a\ge 6$

> **이차방정식의 근의 판별**
> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면
> ① $D>0 \iff$ 서로 다른 두 실근
> ② $D=0 \iff$ 중근(실근)
> ③ $D<0 \iff$ 서로 다른 두 허근

따라서 양수 a의 최솟값은 6이므로

$m=6$

$\therefore m^2=36$

실전 적용 key

함수 $f(x)=2^x-2^{-x}$에 대하여

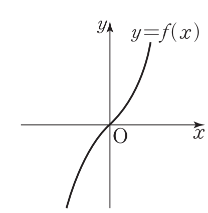
$f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})$

$\qquad=-f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x}=0$

이므로 x의 값이 한없이 커질 때, 2^x-2^{-x}의 값도 한없이 커짐을 알 수 있다.



따라서 함수 $f(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이고, 그래프는 위의 그림과 같다.

즉, $2^x-2^{-x}=t$로 치환했을 때, t의 값의 범위는 실수 전체이다.

45

정답률 65%

수능 유형 › 로그함수의 활용 – 부등식 **정답 ⑤**

부등식 $\log_2 x^2-\log_2|x|\le 3$을 1 2 만족시키는 정수 x의 개수는?

→ $x^2=|x|^2$임을 이용하여 주어진 식을 변형해.

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

해결 흐름

1 먼저 진수의 조건을 고려해야지.

연관 개념 | ① $\log_a N$이 정의되려면

① 밑의 조건 : $a>0$, $a\ne 1$

② 진수의 조건 : $N>0$

2 로그의 성질을 이용해서 부등식의 좌변을 간단히 하면 부등식을 쉽게 풀 수 있겠네.

알찬 풀이

진수의 조건에서

$x^2>0$, $|x|>0$ $\quad\therefore x\neq 0$

$x^2=|x|^2$이므로

$\log_2 x^2 - \log_2|x| \le 3$에서

$2\log_2|x| - \log_2|x| \le 3$

$\log_2|x| \le 3$, $|x|\le 8$ → $|x|\le 8$에서 $-8\le x\le 8$인데 진수의 조건에서 $x\neq 0$이니까 0은 제외해야 해.

$\therefore -8\le x<0$ 또는 $0<x\le 8$

따라서 정수 x는 $-8, -7, \cdots, -1, 1, 2, \cdots, 8$의 16개이다.

→ $\log_2 x^2 = \log_2|x|^2 = 2\log_2|x|$야.

정답률 4%

46 수능 유형 › 로그의 뜻과 성질 정답 78

다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. 78

> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수[1]이고
> $0<b-a\le \frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재[2]한다.

해결 흐름

1 $\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$($k$는 자연수)라 하고 로그의 성질을 이용해서 $a+b$, ab의 값을 n, k에 대한 식으로 나타내 봐야겠군.

2 a, b를 근으로 갖는 이차방정식과 $0<b-a\le\frac{n}{2}$을 이용하면 n^2의 값의 범위를 구할 수 있겠어.

알찬 풀이

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)$이므로

$na-a^2=nb-b^2$ ← $\log_a M=\log_a N \iff M=N$임을 이용했어.

$a^2-b^2-n(a-b)=0$

$(a-b)(a+b)-n(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-n)=0$

이때 $b-a>0$이므로 $a+b=n$ → 즉 $a-b\neq 0$을 뜻하지. $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_2(na-a^2)=k$ (k는 자연수)라 하고, ㉠을 대입하면

$\log_2\{(a+b)a-a^2\}=k$

$\log_2 ab=k$ $\quad\therefore ab=2^k$ $\cdots\cdots$ ㉡

즉, $a+b=n$, $ab=2^k$이므로 x에 대한 이차방정식

$x^2-nx+2^k=0$은 서로 다른 실수 a, b를 두 근으로 갖는다.

이때 이차방정식 $x^2-nx+2^k=0$의 판별식을 D라 하면

$D>0$이므로 → 서로 다른 두 실근 a, b를 가지니까 $D>0$

$n^2-4\cdot 2^k>0$ $\quad\therefore n^2>4\cdot 2^k$ $\cdots\cdots$ ㉢

또, 조건에서 $b-a\le\frac{n}{2}$이므로

$(b-a)^2=(b+a)^2-4ab=n^2-4\cdot 2^k$ ($\because$ ㉠, ㉡)에서

$b-a=\sqrt{n^2-4\cdot 2^k}$ ($\because b-a>0$)

$\le\frac{n}{2}$

$\sqrt{n^2-4\cdot 2^k}\le\frac{n}{2}$의 양변을 제곱하면 → 두 양수 A, B에 대하여 $A>B \iff \sqrt{A}>\sqrt{B}$ $\iff A^2>B^2$

$n^2-4\cdot 2^k\le\frac{n^2}{4}$ $\quad\therefore n^2\le\frac{16\cdot 2^k}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서

$4\cdot 2^k<n^2\le\frac{16\cdot 2^k}{3}$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)

$k=1$일 때, $8<n^2\le\frac{32}{3}$이고 n은 자연수이므로

$n^2=9$ $\quad\therefore n=3$ → $\frac{32}{3}=10.\times\times\times$

$k=2$일 때, $16<n^2\le\frac{64}{3}$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다. → $\frac{64}{3}=21.\times\times\times$

$k=3$일 때, $32<n^2\le\frac{128}{3}$이고 n은 자연수이므로

$n^2=36$ $\quad\therefore n=6$ → $\frac{128}{3}=42.\times\times\times$

$k=4$일 때, $64<n^2\le\frac{256}{3}$이고 n은 자연수이므로

$n^2=81$ $\quad\therefore n=9$ → $\frac{256}{3}=85.\times\times\times$

$k=5$일 때, $128<n^2\le\frac{512}{3}$이고 n은 자연수이므로

$n^2=144$ 또는 $n^2=169$ → $\frac{512}{3}=170.\times\times\times$

$\therefore n=12$ 또는 $n=13$

$k=6$일 때, $256<n^2\le\frac{1024}{3}$이고 n은 자연수이므로

$n^2=289$ 또는 $n^2=324$ → $\frac{1024}{3}=341.\times\times\times$

$\therefore n=17$ 또는 $n=18$

같은 방법으로 하면 $k\ge 7$일 때, $4\cdot 2^k<n^2\le\frac{16\cdot 2^k}{3}$을 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 n은

3, 6, 9, 12, 13, 17, 18

이므로 그 합은

$3+6+9+12+13+17+18=78$

다른 풀이 n^2의 값의 범위는 다음과 같이 구할 수도 있다.

진수는 양수이므로 $na-a^2>0$, $nb-b^2>0$에서

$0<a<n$, $0<b<n$ → 로그의 진수는 양수, 로그의 밑은 1이 아닌 양수임을 기억해!

또, $\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)$이므로

$na-a^2=nb-b^2$, $a^2-b^2-n(a-b)=0$

$(a-b)(a+b)-n(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-n)=0$

이때 $b-a>0$이므로 $a+b=n$

$\log_2(na-a^2)=k$ (k는 자연수)라 하면

$\log_2\{(a+b)a-a^2\}=k$

$\log_2 ab=k$

$\therefore ab=2^k$

한편, $a+b=n$에서 $b=n-a$, $a=n-b$이므로

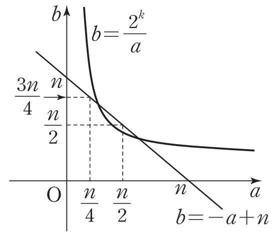
$0<b-a\le\frac{n}{2}$에서

$0<(n-a)-a\le\frac{n}{2}$ $\quad\therefore \frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2}$

$0<b-(n-b)\le\frac{n}{2}$ $\quad\therefore \frac{n}{2}<b\le\frac{3n}{4}$

a, b의 값의 범위를 n에 대한 식으로 나타냈어.

따라서 오른쪽 그림과 같이 직선 $a+b=n$과 곡선 $ab=2^k$이 $\frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2}$에서 만나는 점이 존재해야 하므로 $b=\frac{2^k}{a}$에서



$\frac{2^k}{\frac{n}{4}}\ge\frac{3n}{4}$, $\frac{2^k}{\frac{n}{2}}<\frac{n}{2}$이어야 한다.

$\frac{2^k}{\frac{n}{4}}\ge\frac{3n}{4}$에서 $2^k\ge\frac{3n^2}{16}$이므로 $n^2\le\frac{16\cdot2^k}{3}$

$\frac{2^k}{\frac{n}{2}}<\frac{n}{2}$에서 $2^k<\frac{n^2}{4}$이므로 $n^2>4\cdot2^k$

$\therefore 4\cdot2^k<n^2\le\frac{16\cdot2^k}{3}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

수능 핵심 개념 이차방정식의 작성

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

47

정답률 가형 5%, 나형 7%

수능 유형 › 지수함수의 최댓값, 최솟값 구하기 + 개수 세기 **정답 39**

자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t\ (t\ge1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. **1** 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.
예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다. **39**

두 점 P, Q의 x좌표가 t로 같으므로 $\overline{\text{PQ}}$의 길이는 y좌표의 차와 같아.

> (가) $2\le a\le10$, $2\le b\le10$
> (나) $t\ge1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{\text{PQ}}\le10$이다. **2**

해결 흐름

1 두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 직선 $x=t$와 만나는 점이 각각 P, Q이니까 $\overline{\text{PQ}}=|a^{t+1}-b^t|$이겠구나.

2 $a\ge b$인 경우와 $a<b$인 경우로 나누어 생각해 봐야겠어.

알찬 풀이

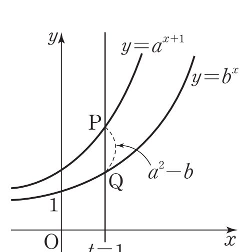
$f(x)=a^{x+1}-b^x$이라 하자.

(i) $a\ge b$일 때,

$b^x\ge2^x$이고 $\frac{a}{b}\ge1$이니까 $f(x)$는 증가하는 함수야.

$x\ge1$에서 함수 $f(x)=b^x\left\{a\times\left(\frac{a}{b}\right)^x-1\right\}$은 증가하는 함수이므로 최솟값은 $f(1)=a^2-b>0$

즉, 오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 $\overline{\text{PQ}}$의 길이가 최소가 되므로 $t>1$일 때 $\overline{\text{PQ}}=a^2-b\le10$인 어떤 실수 t가 존재하도록 하는 a, b의 값을 구하면



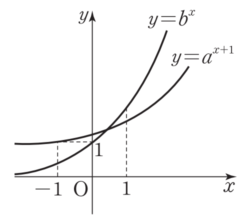
$a\ge b>1$일 때 $x\ge1$이면 곡선 $y=a^{x+1}$이 곡선 $y=b^x$보다 항상 위에 있어.

$a=2$일 때, $b=2$
$a=3$일 때, $b=2,\ 3$
$a\ge4$일 때, $a\ge b$에서
$a^2-b\ge a^2-a\ge12$ ← $a^2-b\le10$이라는 조건에 모순이야.

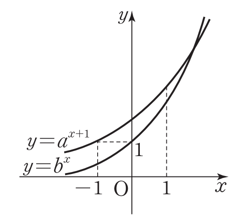
따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 2)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$의 3개이다.

(ii) $a<b$일 때,

$f(x)=0$의 근을 α라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

$\alpha<1$이면 [그림 1]에서 $|f(x)|$의 최솟값은 $f(1)$이고
$\alpha\ge1$이면 [그림 2]에서 $|f(x)|$의 최솟값은 0이다.
$f(1)<0$이면 $-10\le f(1)<0$이고, $f(1)\ge0$이면 항상 성립한다. 즉, $f(1)\ge-10$이면 항상 성립한다.
따라서 $2\le a<b\le10$에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 ${}_9\mathrm{C}_2=36$

2부터 10까지의 수 중에서 두 수를 뽑아 작은 수를 a, 큰 수를 b라 하면 되지.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$3+36=39$

문제 해결 TIP

조성욱 | 연세대학교 치의예과 | 서라벌고등학교 졸업

2년 연속으로 30번에 출제되었던 고난이도 유형이야. 이 다음 수능에서도 똑같은 유형이 나왔었거든. 아무리 수능이 쉬워도 100점 방지용 문제가 두 문제 정도 출제되는데 그 문제들 중 하나로 볼 수 있는 문제야. 조건 (나)에서 '어떤'이라는 말이 굉장히 낯설고 어렵게 느껴질 수 있어. 이런 문제를 잘 해결하기 위해선 평소에 꼼꼼히 조건을 따지고 개수를 빠짐없이 세는 연습이 충분히 되어 있어야 해.