수학 I

• 학습 계획을 세우고 3번 반복하여 공부한 후, □에 √를 표시하세요.

I 지수함수와 로그함수

II 삼각함수

III 수열

4개년 수능
3점 기출 분석 & 출제 예상

수학 I

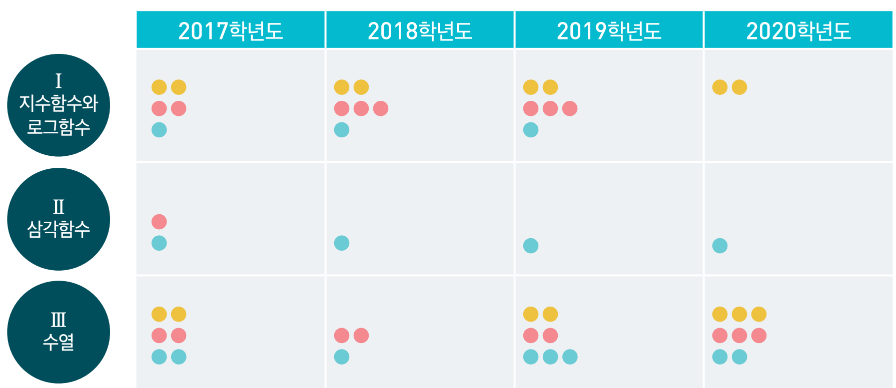
4개년 수능 분석을 통해 2021수능을 예측하고 전략적으로 공략한다!

최근 4개년 배점별 출제 경향을 단원별로 분석하여 수능 출제 빈도가 높은 핵심 개념과 출제 의도를 파악하고 그에 따른 대표 기출 유형을 정리하였습니다. 이를 바탕으로 단원별 출제가 예상되는 유형을 예측하고, 그 공략법을 유형별로 구분하여 상세히 제시하였습니다.

1 4개년 기출 분석

4개년 3점 기출 데이터

- 6월 모평 출제
- 9월 모평 출제
- 수능 출제



위의 ●●● 의 개수는 6월 모평, 9월 모평, 수능 출제 문항수입니다.

Ⅰ 지수함수와 로그함수 | 지수함수와 로그함수는 매년 1문항씩 출제되는데 기본 개념부터 실생활 활용 문제까지 다양하게 출제되고 있다. 지수와 로그의 계산 문제가 2점 문항으로, 지수법칙과 로그의 성질을 이용한 여러 가지 계산 문제, 지수함수와 로그함수의 그래프 또는 지수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식, 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식과 부등식 문제가 3점 문항으로 출제되는 편이다.

Ⅱ 삼각함수 | 삼각함수는 삼각함수의 성질을 이용하여 식을 간단히 하거나 삼각함수의 최댓값 또는 최솟값을 묻는 문제 등이 매년 1문항씩 출제되었다. 삼각함수의 값을 구하는 문제, 삼각함수를 활용하여 방정식과 부등식의 해를 구하는 문제가 2점 또는 3점 문항으로 출제되는 편이다. 또한, 사인법칙과 코사인법칙이 이번 교육과정에 들어오면서 사인법칙과 코사인법칙에 관련된 문항도 출제될 것으로 예상된다.

Ⅲ 수열 | 최근 자주 출제되는 단원인데 수능과 평가원에서는 등차수열과 등비수열의 일반항을 이용하는 문제, $\sum$의 뜻과 성질을 이용하는 문제 등이 출제되었다. 등차수열 또는 등비수열의 일반항이나 수열의 합을 구하는 문제, $\sum$의 성질을 이용하여 합을 구하는 문제가 3점 문항으로 출제되고 있다.

2 출제 예상 및 전략

단원명	공략법	N기출 3점 유형
Ⅰ 지수함수와 로그함수	❶ 지수법칙 또는 로그의 성질을 이용한 식의 값 계산 문제 | 거듭제곱근의 성질이나 지수법칙을 이용하거나 로그의 정의와 성질을 이용하여 식을 간단히 하는 계산 문제가 매년 출제되므로 계산 실수를 하지 않도록 꾸준히 연습해 둔다.	A-03 B-05
	❷ 지수와 로그의 실생활 활용 문제 | 문제에서 제시된 식의 각 문자가 나타내는 값을 적절한 위치에 대입하여 새로운 관계식을 구하고, 지수법칙, 거듭제곱근의 성질, 로그의 성질 등을 이용한다. 또, 다양한 문제를 통해 주어진 상황을 해석하는 방법을 알아 두어야 한다.	A-04 B-07
	❸ 지수함수와 로그함수의 그래프에 관한 문제 | 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 분석하고 그래프를 해석한다. 특히, 지수함수와 로그함수의 그래프가 같이 주어진 경우에는 두 함수가 서로 역함수 관계임을 이용하는 문제일 가능성이 높다.	C-07 C-08
	❹ 지수함수와 로그함수의 실생활 활용 문제 | 주어진 관계식에 알맞은 문자 또는 수를 대입하여 식을 정리한다. 이때 지수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식, 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식과 부등식이 이용되므로 지수와 로그의 기본적인 계산에 대한 연습을 충분히 한다.	D-14
Ⅱ 삼각함수	❶ 삼각함수의 값을 구하는 문제 | 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 성질을 정확히 알고 있어야 한다. 또, 중학교 과정의 삼각비와 도형의 성질 등도 다시 학습해 둔다.	E-01
	❷ 삼각함수의 그래프에 관한 문제 | 삼각함수가 포함된 함수 식을 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 성질 등을 이용하여 $\sin$ 또는 $\cos$만으로 이루어진 식으로 변형할 수 있어야 한다. 또, 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 분석하고, 그래프를 해석한다.	E-02 E-03
	❸ 삼각형에서 변의 길이나 내각의 크기를 구하는 문제 | 삼각형에서 사인법칙을 이용하는 경우와 코사인법칙을 이용하는 경우를 잘 알아두고 사인법칙과 코사인법칙에서 나오는 변형된 공식을 이해하고 정확히 기억하고 있어야 한다.	F-04
Ⅲ 수열	❶ 등차수열 또는 등비수열의 일반항이나 그 합을 구하는 문제 | 등차수열의 일반항과 합, 등비수열의 일반항과 합에 대한 문항은 수열의 형태를 정확히 이해하여 첫째항과 공차 또는 공비를 구하고, 공식에 대입하여 빠르게 해결해야 한다.	G-01 G-02 H-04 H-06
	❷ $\sum$의 뜻과 성질을 이용하는 문제 | $\sum$의 뜻과 성질, 자연수의 거듭제곱의 합 공식을 정확하게 이해하고 문제에 주어진 조건으로부터 수열의 일반항이나 합을 구하는 연습을 충분히 한다.	I-07 I-08

수능잡는 핵·심·개·념 & 기·출·유·형

I 지수함수와 로그함수

A 지수

1. 거듭제곱근

(1) **거듭제곱근 :** 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n=a$$

를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라 한다.

이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.

a는 x의 n제곱

$$\boldsymbol{x^n=a}$$

x는 a의 n제곱근

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

2. 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

(5) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

주의 $a>0$, $b>0$의 조건이 없으면 거듭제곱근의 성질이 성립하지 않는다.

예 $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$이므로 $\sqrt{-2}\sqrt{-3}\neq\sqrt{(-2)\times(-3)}$

3. 지수의 확장

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우 :** $a\neq0$이고 n이 자연수일 때

$$a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

(2) **지수가 유리수인 경우 :** $a>0$이고 m, n $(n\geq2)$이 정수일 때

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

(3) **지수법칙 :** $a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$

② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$

④ $(ab)^x=a^xb^x$

⑤ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^x=\dfrac{b^x}{a^x}$

참고 지수법칙이 성립하기 위한 지수의 범위에 따른 밑의 조건은 다음과 같다.

지수의 범위	자연수	정수	유리수	실수
밑의 조건	0이 아닌 실수		양의 실수	

주의 $a>0$, $b>0$의 조건이 없으면 지수법칙이 성립하지 않는다.

예 $\{(-2)^2\}^{\frac{1}{2}}=(-2)^{2\times\frac{1}{2}}=-2$ (×) $\{(-2)^2\}^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$ (○)

3점 기·출·유·형

A-01 거듭제곱근의 성질

근호가 여러 개인 경우, 먼저 근호 안의 식을 간단히 정리한 후 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

A-02 지수법칙

거듭제곱근을 유리수 지수로 나타낸 다음, 지수법칙을 이용한다. 이때 밑이 음수인 경우에는 지수법칙이 성립하지 않으므로 반드시 밑을 양수로 만든 후 지수법칙을 적용한다.

A-03 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

양수 a와 실수 x에 대하여

① $a^x\pm a^{-x}$ 꼴

➡ $(a^x\pm a^{-x})^2=a^{2x}+a^{-2x}\pm2$(복부호 동순)

임을 이용한다.

② $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴

➡ 분모와 분자에 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

임을 이용한다.

A-04 지수법칙의 활용

지수법칙을 이용한 실생활 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

① 문제에서 제시된 식의 각 문자가 무엇을 나타내는지 파악한다.

② 주어진 값을 각 문자에 대입한다.

③ 지수법칙을 이용하여 간단히 정리한다.

B 로그

1. 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$이고 $N>0$일 때,

$a^x=N$

을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.
이 수 x를 $\log_a N$으로 나타내고, a를 **밑**으로 하는 N의 **로그**라 한다. 이때 N을 $\log_a N$의 **진수**라 한다.

$$a^x=N \iff x=\log_a N$$

$$x=\log_{\underset{\text{밑}}{a}} \overset{\text{진수}}{N}$$

2. 로그의 성질

(1) **로그의 성질 :** $a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$ ② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ ④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

(2) **로그의 밑의 변환 :** $a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$) ② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

(3) **로그의 여러 가지 성질 :** $a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b\,\log_b a=1$ (단, $b\neq1$) ② $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, $m\neq0$)

③ $a^{\log_a b}=b$ ④ $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)

3. 상용로그

(1) **상용로그 :** 10을 밑으로 하는 로그를 **상용로그**라 한다. 양수 N의 상용로그 $\log_{10} N$은 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다.

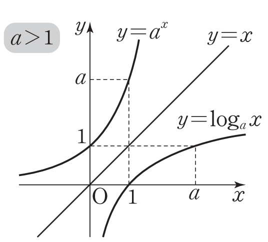
(2) **상용로그의 표현 :** 양수 N의 상용로그는

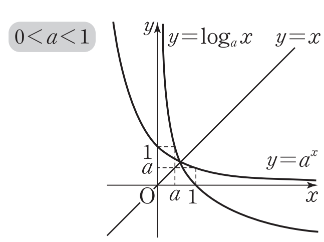
$\log N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\leq\alpha<1$)

와 같이 나타낼 수 있다. 이때 n은 $\log N$의 정수 부분, α는 $\log N$의 소수 부분이다.

C 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

1. 지수함수와 로그함수의 그래프와 성질





(1) **지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질**

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

③ 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, x축을 점근선으로 한다. 곡선이 한없이 가까워지는 직선

3점 기·출·유·형

B-05 로그의 성질과 여러 가지 계산

로그의 계산은 로그의 정의, 성질, 밑의 변환 등을 이용한다.

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $M>0$, $N>0$일 때

① $a^x=N \iff x=\log_a N$
② $\log_a a^x=x$
③ $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
④ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
⑤ $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\neq1$)
⑥ $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

B-06 로그의 활용

주어진 식의 각 문자가 나타내는 값을 적절한 위치에 대입하고, 양변에 상용로그를 취하거나 로그의 성질을 이용하여 계산한다.
또, 주어진 상황이 2개인 경우, 두 가지 서로 다른 상황을 구분하고, 두 개의 식으로 바꾸어 두 식을 빼거나 나누어 간단히 정리하여 계산한다.

C-07 지수함수와 로그함수의 그래프

지수함수와 로그함수의 그래프와 그 그래프 위의 점의 좌표가 주어질 때

(1) 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프가 점 $(\alpha,\ \beta)$를 지나면 $x=\alpha$, $y=\beta$를 대입하여 $a^\alpha=\beta$가 성립함을 이용한다.

(2) 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프가 점 $(\alpha,\ \beta)$를 지나면 $x=\alpha$, $y=\beta$를 대입하여
$\beta=\log_a \alpha \iff a^\beta=\alpha$
가 성립함을 이용한다.

C-08 지수함수와 로그함수의 역함수 관계 이용하기

$a>0$, $a\neq1$일 때, 서로 역함수 관계인 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(2) 점 $(\alpha,\ \beta)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 점 $(\beta,\ \alpha)$는 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이다. 즉, $a^\alpha=\beta \iff \log_a \beta=\alpha$

(2) **로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$)의 성질**

① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

③ 그래프는 점 $(1, 0)$을 지나고, y축을 점근선으로 한다.

④ 함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

참고 $a>0$, $a\neq1$일 때,

(1) 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 지수함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(2) 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프와 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

2. 지수함수와 로그함수의 최대 · 최소

(1) **지수함수의 최대 · 최소**

$m\leq x\leq n$에서 정의된 지수함수 $y=a^x$은

① $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 a^m, $x=n$일 때 최댓값 a^n을 갖는다.

② $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 a^m, $x=n$일 때 최솟값 a^n을 갖는다.

(2) **로그함수의 최대 · 최소**

$m\leq x\leq n$에서 정의된 로그함수 $y=\log_a x$는

① $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 $\log_a m$, $x=n$일 때 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

② $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 $\log_a m$, $x=n$일 때 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

D 지수함수와 로그함수의 활용

1. 지수에 미지수를 포함한 방정식과 부등식

(1) **지수에 미지수를 포함한 방정식의 풀이**

$a>0$, $a\neq1$일 때,

$a^{x_1}=a^{x_2} \iff x_1=x_2$

(2) **지수에 미지수를 포함한 부등식의 풀이**

① $a>1$일 때,

$a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때,

$a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1>x_2$

주의 밑의 크기에 따라 부등호의 방향이 달라진다는 것에 주의한다.

2. 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식과 부등식

(1) **로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식의 풀이**

$a>0$, $a\neq1$이고, $x_1>0$, $x_2>0$에 대하여

① $\log_a x_1=p \iff x_1=a^p$

② $\log_a x_1=\log_a x_2 \iff x_1=x_2$

(2) **로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 부등식의 풀이**

$a>0$, $a\neq1$이고, $x_1>0$, $x_2>0$에 대하여

① $a>1$일 때,

$\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때,

$\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2$

참고 구한 미지수의 값이 진수의 조건 또는 밑의 조건을 만족시키는지 반드시 확인해야 한다.

3점 기·출·유·형

C-09 지수함수와 로그함수의 최댓값, 최솟값 구하기

지수함수와 로그함수의 그래프는 모두 밑의 범위에 따라 증가하는 함수이거나 감소하는 함수이다. 따라서 어떤 x의 값에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는지를 먼저 알아내고, 이 x의 값을 함수의 식에 대입하여 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

D-10 지수함수의 활용 – 방정식

(1) 밑을 같게 할 수 있는 경우

주어진 방정식을 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 꼴로 변형한 후

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x) \quad (a>0, a\neq1)$$

를 이용한다.

(2) a^x 꼴이 반복되는 경우

$a^x=t$ $(t>0)$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

D-11 지수함수의 활용 – 부등식

$a>0$, $a\neq1$일 때, 부등식 $pa^{2x}+qa^x+r<0$은 다음과 같은 순서로 푼다. (단, p, q, r는 상수이다.)

① $a^x=t$ $(t>0)$로 치환한다. ➡ $pt^2+qt+r<0$

② $t>0$에서 부등식 ①의 해를 구한다.

③ ②에서 구한 해에 t 대신 a^x을 대입하여 x의 값의 범위를 구한다.

D-12 로그함수의 활용 – 방정식

(1) 밑을 같게 할 수 있는 경우

주어진 방정식을 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 꼴로 변형한 후

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \iff f(x)=g(x) \quad (a>0, a\neq1, f(x)>0, g(x)>0)$$

를 이용한다.

(2) $\log_a f(x)$ 꼴이 반복되는 경우

$\log_a f(x)=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

D-13 로그함수의 활용 – 부등식

로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 부등식은 (밑)>1이면 부등호의 방향이 그대로, $0<$(밑)<1이면 부등호의 방향이 바뀜에 주의하고, 구한 해가 진수의 조건 또는 밑의 조건을 만족시키는지 반드시 확인한다.

D-14 지수함수와 로그함수의 실생활에서의 활용

관계식이 주어지는 경우, 조건을 만족시키는 값을 각각 대입하여 식을 세운다.

2점 기출 » 확인하기

01

[2020학년도 9월 **평가원** 나형 1번]

$3^3 \div 81^{\frac{1}{2}}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

02

[2020학년도 6월 **평가원** 나형 1번]

$5^0 \times 25^{\frac{1}{2}}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

03

[2017학년도 **수능** 나형 1번]

8×2^{-2}의 값은?

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

04

[2016학년도 **수능** A형 2번]

$8^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{2}{3}}$의 값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

05

[2017학년도 **수능** 나형 3번]

$\log_{15} 3 + \log_{15} 5$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

06

[2017학년도 9월 **평가원** 가형 2번]

방정식 $3^{x+1} = 27$을 만족시키는 실수 x의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설편 p. 2

3점 기출 » 집중하기

유형 A-01 거듭제곱근의 성질

07 [2013학년도 9월 **평가원** 나형 6번]

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은?

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

08 [2019학년도 9월 **교육청**(고2) 가형 25번]

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$가 음수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

09 [2016학년도 3월 **교육청** 나형 24번]

100 이하의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[3]{4^n}$이 정수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

유형 A-02 지수법칙

10 [2008학년도 **수능** 나형 4번]

$a=\sqrt{2}$, $b^3=\sqrt{3}$일 때, $(ab)^2$의 값은? (단, b는 실수이다.)

① $2\cdot3^{\frac{1}{3}}$　② $2\cdot3^{\frac{2}{3}}$　③ $2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{3}}$　④ $3\cdot2^{\frac{1}{3}}$　⑤ $3\cdot2^{\frac{2}{3}}$

11 [2007학년도 9월 **평가원** 나형 20번]

세 양수 a, b, c에 대하여

$$a^6=3,\quad b^5=7,\quad c^2=11$$

일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오.

12

[2006학년도 6월 **평가원** 나형 4번]

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은?

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

유형 A-03 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

13

[2010학년도 6월 **평가원** 나형 4번]

실수 a가 $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은?

① $\dfrac{5}{2}$ ② $\dfrac{10}{3}$ ③ $\dfrac{17}{4}$
④ $\dfrac{26}{5}$ ⑤ $\dfrac{37}{6}$

14

[2009학년도 9월 **평가원** 나형 20번]

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족시킬 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오.

15

[2008학년도 9월 **평가원** 나형 4번]

다음 식을 간단히 한 것은?

$$(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2$$

① 2^{2x} ② 2^{2x+2} ③ 2^{2x+2y}
④ 2^{-2y} ⑤ 2^{-2y+2}

유형 A-04 지수법칙의 활용

16

[2011학년도 9월 **평가원** 가형 6번, 나형 6번]

양수기로 물을 끌어올릴 때, 펌프의 1분당 회전수 N, 양수량 Q, 양수할 높이 H와 양수기의 비교회전도 S 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$$

(단, N, Q, H의 단위는 각각 rpm, m^3/분, m이다.)

펌프의 1분당 회전수가 일정한 양수기에 대하여 양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때의 비교회전도를 S_1, 양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때의 비교회전도를 S_2라 하자. $\dfrac{S_1}{S_2}$의 값은?

① $2^{\frac{3}{4}}$ ② $2^{\frac{7}{8}}$ ③ 2
④ $2^{\frac{9}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{4}}$

해설편 p. 3

17
[2010학년도 **수능** 가형 10번, 나형 10번]

조개류는 현탁물을 여과한다. 수온이 t(℃)이고 개체중량이 w(g)일 때, A 조개와 B 조개가 1시간 동안 여과하는 양(L)을 각각 Q_{A}, Q_{B}라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$Q_{\mathrm{A}}=0.01t^{1.25}w^{0.25}$$
$$Q_{\mathrm{B}}=0.05t^{0.75}w^{0.30}$$

수온이 20 ℃이고 A 조개와 B 조개의 개체중량이 각각 8 g일 때, $\dfrac{Q_{\mathrm{A}}}{Q_{\mathrm{B}}}$의 값은 $2^a\times5^b$이다. $a+b$의 값은?

(단, a, b는 유리수이다.)

① 0.15　② 0.35　③ 0.55　④ 0.75　⑤ 0.95

유형 B-05 로그의 성질과 여러 가지 계산

18
[2020학년도 6월 **평가원** 나형 8번]

$\log_2 5=a$, $\log_5 3=b$일 때, $\log_5 12$를 a, b로 옳게 나타낸 것은?

① $\dfrac{1}{a}+b$　② $\dfrac{2}{a}+b$　③ $\dfrac{1}{a}+2b$　④ $a+\dfrac{1}{b}$　⑤ $2a+\dfrac{1}{b}$

19
[2019학년도 9월 **평가원** 나형 25번]

양수 a에 대하여 $a^{\frac{1}{2}}=8$일 때, $\log_2 a$의 값을 구하시오.

20
[2019학년도 6월 **평가원** 나형 13번]

좌표평면 위의 두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

21
[2018학년도 9월 **평가원** 나형 13번]

두 실수 a, b가

$$ab=\log_3 5,\quad b-a=\log_2 5$$

를 만족시킬 때, $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$의 값은?

① $\log_5 2$　② $\log_3 2$　③ $\log_3 5$　④ $\log_2 3$　⑤ $\log_2 5$

22

[2018학년도 6월 **평가원** 나형 25번]

$\log_3 \frac{9}{2} + \log_3 6$의 값을 구하시오.

23

[2017학년도 9월 **평가원** 나형 4번]

$\log_3 6 - \log_3 2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

유형 B-06 로그의 활용

24

[2015학년도 **수능** A형 10번, B형 25번]

디지털 사진을 압축할 때 원본 사진과 압축한 사진의 다른 정도를 나타내는 지표인 최대 신호 대 잡음비를 P,
원본 사진과 압축한 사진의 평균제곱오차를 E라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P = 20 \log 255 - 10 \log E \ (E > 0)$$

두 원본 사진 A, B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비를 각각 P_A, P_B라 하고, 평균제곱오차를 각각 $E_A \ (E_A > 0)$, $E_B \ (E_B > 0)$라고 하자. $E_B = 100E_A$일 때, $P_A - P_B$의 값은?

① 30 ② 25 ③ 20
④ 15 ⑤ 10

25

[2015학년도 9월 **평가원** A형 10번, B형 10번]

도로용량이 C인 어느 도로구간의 교통량을 V, 통행시간을 t라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) = k + 4 \log \frac{V}{C} \ (t > t_0)$$

(단, t_0은 도로 특성 등에 따른 기준통행시간이고, k는 상수이다.)

이 도로구간의 교통량이 도로용량의 2배일 때 통행시간은 기준통행시간 t_0의 $\frac{7}{2}$배이다. k의 값은?

① $-4 \log 2$ ② $1 - 7 \log 2$ ③ $-3 \log 2$
④ $1 - 6 \log 2$ ⑤ $1 - 5 \log 2$

해설편 p. 7

26

[2014학년도 **수능** A형 10번, B형 25번]

단면의 반지름의 길이가 R $(R<1)$인 원기둥 모양의 어느 급수관에 물이 가득 차 흐르고 있다. 이 급수관의 단면의 중심에서의 물의 속력을 v_c, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 x $(0<x\le R)$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력을 v라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{v_c}{v}=1-k\log\frac{x}{R}$$

(단, k는 양의 상수이고, 길이의 단위는 m, 속력의 단위는 m/초이다.)

$R<1$인 이 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{27}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{2}$일 때, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{3}$이다. a의 값은?

① $\frac{39}{23}$ ② $\frac{37}{23}$ ③ $\frac{35}{23}$
④ $\frac{33}{23}$ ⑤ $\frac{31}{23}$

27

[2013학년도 **수능** 가형 7번, 나형 7번]

화재가 발생한 화재실의 온도는 시간에 따라 변한다.
어떤 화재실의 초기 온도를 T_0(℃), 화재가 발생한 지 t분 후의 온도를 T(℃)라 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

$$T=T_0+k\log(8t+1) \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

초기 온도가 20 ℃인 이 화재실에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후의 온도는 365 ℃이었고, 화재가 발생한 지 a분 후의 온도는 710 ℃이었다. a의 값은?

① $\frac{99}{8}$ ② $\frac{109}{8}$ ③ $\frac{119}{8}$
④ $\frac{129}{8}$ ⑤ $\frac{139}{8}$

28

[2013학년도 9월 **평가원** 가형 7번, 나형 7번]

어떤 물질이 녹아 있는 용액에 단색광을 투과시킬 때 투과 전 단색광의 세기에 대한 투과 후 단색광의 세기의 비를 그 단색광의 투과도라 한다. 투과도를 T, 단색광이 투과한 길이를 l, 용액의 농도를 d라 할 때, 다음 관계가 성립한다.

$$\log T=-kld \text{ (단, } k\text{는 양의 상수이다.)}$$

이 물질에 대하여 투과길이가 l_0 $(l_0>0)$이고 용액의 농도가 $3d_0$ $(d_0>0)$일 때의 투과도를 T_1, 투과길이가 $2l_0$이고 용액의 농도가 $4d_0$일 때의 투과도를 T_2라 하자. $T_2=T_1^{\,n}$을 만족시키는 n의 값은?

① 2 ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

29

[2013학년도 6월 **평가원** 가형 7번, 나형 7번]

밀폐된 용기 속의 액체에서 증발과 응축이 계속하여 같은 속도로 일어나는 동적 평형 상태의 증기압을 포화 증기압이라 한다. 밀폐된 용기 속에 있는 어떤 액체의 경우 포화 증기압 P(mmHg)와 용기 속의 온도 t(℃) 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log \mathrm{P}=8.11-\frac{1750}{t+235} \quad (0<t<60)$$

용기 속의 온도가 15 ℃일 때의 포화 증기압을 P_1, 45 ℃일 때의 포화 증기압을 P_2라 할 때, $\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}$의 값은?

① $10^{\frac{1}{4}}$　② $10^{\frac{1}{2}}$　③ $10^{\frac{3}{4}}$
④ 10　⑤ $10^{\frac{5}{4}}$

30

[2012학년도 **수능** 가형 7번, 나형 7번]

누에나방 암컷은 페로몬을 분비하여 수컷을 유인한다.
누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 t초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 x인 곳에서 측정한 페로몬의 농도 y는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log y=A-\frac{1}{2}\log t-\frac{Kx^2}{t}$$

(단, A와 K는 양의 상수이다.)

누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 2인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 a이고, 분비한 후 4초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 d인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 $\frac{a}{2}$이다. d의 값은?

① 7　② 6　③ 5
④ 4　⑤ 3

31

[2011학년도 **수능** 가형 9번, 나형 9번]

지반의 상대밀도를 구하기 위하여 지반에 시험기를 넣어 조사하는 방법이 있다. 지반의 유효수직응력을 S, 시험기가 지반에 들어가면서 받는 저항력을 R라 할 때, 지반의 상대밀도 D(%)는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$$D=-98+66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$$

(단, S와 R의 단위는 metric ton/m²이다.)

지반 A의 유효수직응력은 지반 B의 유효수직응력의 1.44배이고, 시험기가 지반 A에 들어가면서 받는 저항력은 시험기가 지반 B에 들어가면서 받는 저항력의 1.5배이다. 지반 B의 상대밀도가 65(%)일 때, 지반 A의 상대밀도(%)는?

(단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

① 81.5　② 78.2　③ 74.9
④ 71.6　⑤ 68.3

해설편 p. 11

유형 C-07 지수함수와 로그함수의 그래프

32

[2019학년도 **수능** 가형 5번]

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

33

[2019학년도 9월 **평가원** 가형 7번]

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

34

[2018학년도 9월 **평가원** 가형 5번]

곡선 $y=2^x+5$의 점근선과 곡선 $y=\log_3 x+3$의 교점의 x좌표는?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

35

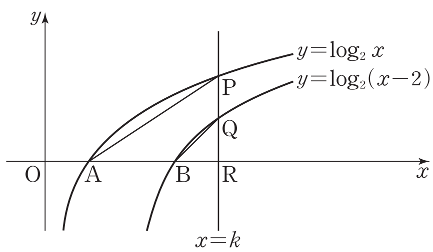
[2017학년도 9월 **평가원** 가형 23번]

곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선이 직선 $x=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

36

[2016학년도 9월 **평가원** A형 12번]

그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $x=k(k>3)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 ABQP의 넓이는?

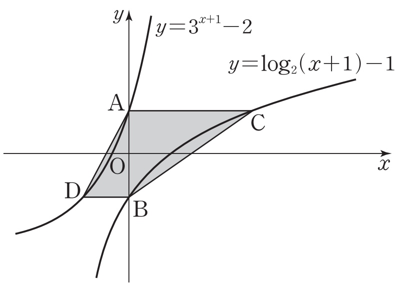


① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

37

[2015학년도 9월 **평가원** A형 11번]

그림과 같이 두 곡선 $y=3^{x+1}-2$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x+1}-2$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이는?



① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

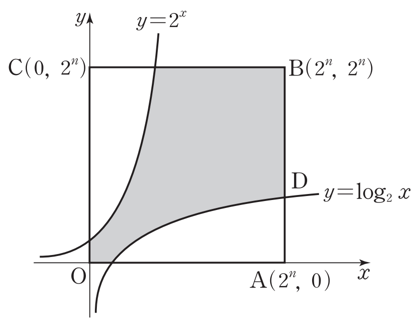
해설편 p. 14

38

[2014학년도 9월 **평가원** B형 13번]

좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 O$(0, 0)$, A$(2^n, 0)$, B$(2^n, 2^n)$, C$(0, 2^n)$인 정사각형 OABC와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(단, n은 자연수이다.)



선분 AB가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD를 $2:3$으로 내분하는 점을 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 E, 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 F라 하자. 점 F의 y좌표가 16일 때, 직선 DF의 기울기는?

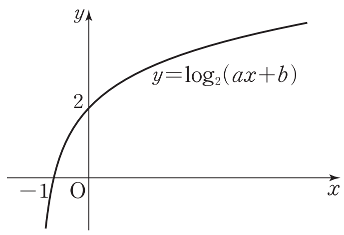
① $-\frac{13}{28}$　② $-\frac{25}{56}$　③ $-\frac{3}{7}$
④ $-\frac{23}{56}$　⑤ $-\frac{11}{28}$

39

[2012학년도 6월 **평가원** 나형 13번]

곡선 $y=\log_2(ax+b)$가 점 $(-1, 0)$과 점 $(0, 2)$를 지날 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 5　② 7　③ 9
④ 11　⑤ 13



40

[2011학년도 **수능** 나형 11번]

좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1, 4)$를 지난다. 양수 a의 값은?

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $2\sqrt{2}$
④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

41

[2011학년도 6월 **평가원** 나형 27번]

1보다 큰 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{-x-2}$과 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=8$일 때, a의 값은?

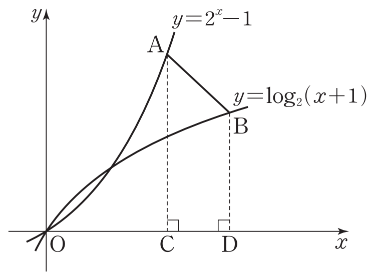
① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

유형 C-08 지수함수와 로그함수의 역함수 관계 이용하기

42

[2011학년도 6월 **평가원** 가형 8번, 나형 8번]

곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자.
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는?

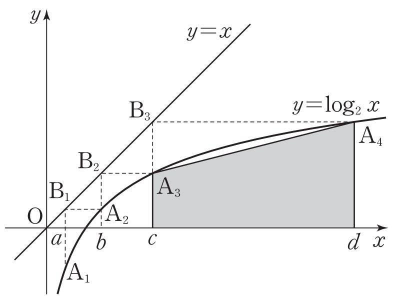


① $\dfrac{5}{2}$ ② $\dfrac{11}{4}$ ③ 3
④ $\dfrac{13}{4}$ ⑤ $\dfrac{7}{2}$

43

[2010학년도 6월 **평가원** 가형 16번, 나형 16번]

그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 한 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2로부터 점 B_2와 점 A_3을, 점 A_3으로부터 점 B_3과 점 A_4를 얻는다. 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4의 x좌표를 차례로 a, b, c, d라 하자.
네 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$, $(d, \log_2 d)$, $(c, \log_2 c)$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x)=2^x$을 이용하여 a, b로 나타낸 것과 같은 것은?



① $\dfrac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$
② $\dfrac{1}{2}\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$
③ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$
④ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$
⑤ $\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

해설편 p. 17

44

[2009학년도 9월 **평가원** 가형 15번, 나형 15번]

두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=20$이다.
ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

45

[2008학년도 **수능** 나형 10번]

지수함수 $f(x)=a^{x-m}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 1과 3일 때, $a+m$의 값은?

① $2-\sqrt{3}$ ② 2 ③ $1+\sqrt{3}$
④ 3 ⑤ $2+\sqrt{3}$

유형 C-09 지수함수와 로그함수의 최댓값, 최솟값 구하기

46

[2018학년도 **수능** 가형 5번]

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 최댓값은?

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

47

[2018학년도 9월 **평가원** 가형 7번]

$0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^x$은 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 최솟값 $\frac{5}{6}$, 최댓값 M을 갖는다. $a\times M$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

48

[2015학년도 6월 **평가원** A형 24번]

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 두 함수

$$f(x)=2^x, \quad g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

의 최댓값을 각각 a, b라 하자. ab의 값을 구하시오.

49

[2009학년도 **수능** 나형 4번]

함수 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

유형 D-10 지수함수의 활용 – 방정식

50

[2017학년도 6월 **평가원** 가형 25번]

방정식 $3^{-x+2}=\frac{1}{9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

51

[2012학년도 9월 **평가원** 나형 5번]

방정식 $2^x+2^{5-x}=33$의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

52

[2011학년도 9월 **평가원** 나형 20번]

방정식 $(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

해설편 p. 20

유형 D-11 지수함수의 활용 – 부등식

53
[2019학년도 6월 **평가원** 가형 7번]

부등식 $\dfrac{27}{9^x} \ge 3^{x-9}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

54
[2011학년도 **수능** 나형 4번]

부등식 $(3^x-5)(3^x-100)<0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

유형 D-12 로그함수의 활용 – 방정식

55
[2019학년도 9월 **평가원** 가형 23번]

방정식

$$2\log_4(5x+1)=1$$

의 실근을 α라 할 때, $\log_5\dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구하시오.

56
[2016학년도 9월 **평가원** B형 8번]

방정식 $\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

57

[2015학년도 9월 **평가원** B형 23번]

방정식 $\log_8 x-\log_8(x-7)=\frac{1}{3}$의 해를 구하시오.

58

[2014학년도 9월 **평가원** A형 25번]

방정식 $(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

59

[2012학년도 **수능** 나형 23번]

방정식 $\log_3(x-11)=3\log_3 2$를 만족시키는 x의 값을 구하시오.

유형 D-13 로그함수의 활용 – 부등식

60

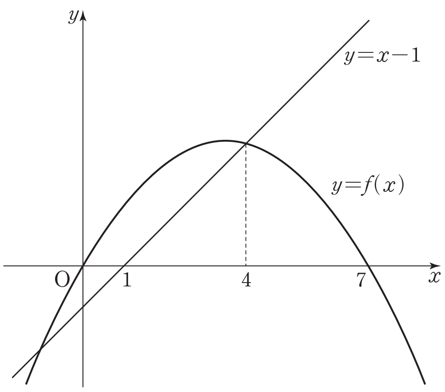
[2020학년도 6월 **평가원** 가형 24번]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

(단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$)



61

[2018학년도 6월 **평가원** 가형 8번]

부등식

$$2\log_2|x-1|\le 1-\log_2\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설편 p. 23

62

[2017학년도 6월 **평가원** 가형 10번]

부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

63

[2016학년도 **수능** A형 11번]

x에 대한 부등식

$$\log_5(x-1)\le\log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 3일 때, 자연수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

유형 D-14 지수함수와 로그함수의 실생활에서의 활용

64

[2012학년도 9월 **평가원** 가형 7번, 나형 7번]

특정 환경의 어느 웹사이트에서 한 메뉴 안에 선택할 수 있는 항목이 n개 있는 경우, 항목을 1개 선택하는 데 걸리는 시간 T(초)가 다음 식을 만족시킨다.

$$T=2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)$$

메뉴가 여러 개인 경우, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 각 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 시간을 모두 더하여 구한다. 예를 들어, 메뉴가 3개이고 각 메뉴 안에 항목이 4개씩 있는 경우, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 $3\left(2+\frac{1}{3}\log_2 5\right)$초이다. 메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n개씩 있을 때, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간이 30초 이하가 되도록 하는 n의 최댓값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

65

[2007학년도 **수능** 나형 11번]

주위가 순간적으로 어두워지더라도 사람의 눈은 그 변화를 서서히 지각하게 된다. 빛의 세기가 1000에서 10으로 순간적으로 바뀐 후 t초가 경과했을 때, 사람이 지각하는 빛의 세기 $I(t)$는

$$I(t)=10+990\times a^{-5t} \quad (\text{단, } a\text{는 } a>1\text{인 상수})$$

이라 한다. 빛의 세기가 1000에서 10으로 순간적으로 바뀐 후, 사람이 빛의 세기를 21로 지각하는 순간까지 s초가 경과했다고 할 때, s의 값은?

(단, 빛의 세기의 단위는 Td(트롤랜드)이다.)

① $\dfrac{1+2\log 3}{5\log a}$ ② $\dfrac{1+3\log 3}{5\log a}$ ③ $\dfrac{2+\log 3}{5\log a}$
④ $\dfrac{2+2\log 3}{5\log a}$ ⑤ $\dfrac{2+3\log 3}{5\log a}$

3점 같은 4점 기출 » 도전하기

66

[2016학년도 9월 **평가원** A형 16번, B형 25번]

고속철도의 최고소음도 $L(\mathrm{dB})$을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 $d(\mathrm{m})$, 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 $v(\mathrm{km/h})$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{d}{25}$$

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때, 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A, L_B라 하자. L_B-L_A의 값은?

① $14-28\log 3$　② $28-56\log 3$　③ $28-28\log 3$　④ $56-84\log 3$　⑤ $56-56\log 3$

67

[2016학년도 6월 **평가원** A형 15번]

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

68

[2015학년도 **수능** A형 15번]

부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\le 5^{x+4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설편 p. 28

수학 I

I. 지수함수와 로그함수

pp. 15~31

01 ③	02 ⑤	03 ②	04 ④	05 ①	06 ②	07 ②
08 15	09 33	10 ①	11 30	12 ①	13 ②	14 25
15 ②	16 ⑤	17 ②	18 ②	19 6	20 ①	21 ④
22 3	23 ①	24 ③	25 ④	26 ⑤	27 ①	28 ⑤
29 ③	30 ④	31 ④	32 ③	33 ④	34 ③	35 25
36 ③	37 ⑤	38 ⑤	39 ②	40 ①	41 ②	42 ①
43 ①	44 ③	45 ③	46 ②	47 ⑤	48 32	49 ③
50 4	51 ②	52 10	53 ④	54 ③	55 1	56 ②
57 14	58 27	59 19	60 15	61 ②	62 ③	63 ①
64 ①	65 ①	66 ②	67 ④	68 ⑤		

01 정답 ③ 정답률 95%

$3^3 \div 81^{\frac{1}{2}}$의 값은?

→ 밑이 3인 지수로 통일하자.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

알찬 풀이

$$3^3 \div 81^{\frac{1}{2}} = 3^3 \div \underline{(3^4)^{\frac{1}{2}}} = 3^3 \div 3^2 = 3$$

$(3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4\times\frac{1}{2}} = 3^2$

연관 개념 check

$a>0$이고 x, y가 실수일 때, $(a^x)^y = a^{xy}$

02 정답 ⑤ 정답률 93%

$5^0 \times 25^{\frac{1}{2}}$의 값은?

→ $25^{\frac{1}{2}}$만 간단히 하면 돼.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

알찬 풀이

$$5^0 \times 25^{\frac{1}{2}} = 1 \times \underline{(5^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 \times 5 = 5$$

$(5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$

연관 개념 check

$a>0$이고 x, y가 실수일 때, $(a^x)^y = a^{xy}$

03 정답 ② 정답률 92%

8×2^{-2}의 값은?

→ 밑이 2인 지수로 통일하자.

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

알찬 풀이

$$8 \times 2^{-2} = 2^3 \times 2^{-2} = 2^{3+(-2)} = 2^1 = 2$$

다른 풀이

$$8 \times 2^{-2} = 8 \times \frac{1}{4} = 2$$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (단, $a>0$, n은 실수)

연관 개념 check

$a>0$이고 x, y가 실수일 때, $a^x a^y = a^{x+y}$

04 정답 ④ 정답률 96%

$8^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{2}{3}}$의 값은?

→ $8^{\frac{1}{3}}$과 $27^{\frac{2}{3}}$을 각각 간단히 나타내어 보자.

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

알찬 풀이

$$8^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{2}{3}} = \underline{(2^3)^{\frac{1}{3}} + (3^3)^{\frac{2}{3}}} = 2 + 9 = 11$$

$(2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$, $(3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\times\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

연관 개념 check

$a>0$이고 x, y가 실수일 때, $(a^x)^y = a^{xy}$

05 정답 ① 정답률 92%

$\log_{15}3+\log_{15}5$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

로그의 성질을 이용하면 쉽게 해결할 수 있어.

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

알찬 풀이

$\log_{15}3+\log_{15}5=\log_{15}(3\times5)$
$=\log_{15}15=1$

$\log_a a=1$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

다른 풀이

$\log_{15}3=x$, $\log_{15}5=y$라 하면
로그의 정의에 의하여
$15^x=3$, $15^y=5$이므로
$15^x\times15^y=3\times5$
따라서 $15^{x+y}=15$이므로
$\log_{15}3+\log_{15}5=x+y=1$

06 정답 ② 정답률 94%

방정식 $3^{x+1}=27$을 만족시키는 실수 x의 값은?

3의 거듭제곱 꼴로 나타내 봐.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

연관 개념 check

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

알찬 풀이

$3^{x+1}=3^3$에서 $x+1=3$
$\therefore x=2$

밑이 3으로 같으니까 지수끼리 비교하면 돼.

다른 풀이

로그의 정의에 의하여
$x+1=\log_3 27=\log_3 3^3=3$
$\therefore x=2$

07 정답 ② 정답률 80%

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

연관 개념 check

$a>0$이고 x, y가 실수일 때
$a^xa^y=a^{x+y}$, $(a^x)^y=a^{xy}$

해결 흐름

1. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$임을 이용하여 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$을 간단히 나타내야겠다.
2. 간단히 나타낸 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$의 값에 이웃한 두 자연수를 찾아 이용하면 되겠네.

알찬 풀이

$$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3=(\sqrt{2\times\sqrt[3]{2^2}})^3$$
$$=\left(\sqrt{2\times2^{\frac{2}{3}}}\right)^3=\left(\sqrt{2^{\frac{5}{3}}}\right)^3$$

$2\times2^{\frac{2}{3}}=2^{1+\frac{2}{3}}=2^{\frac{3+2}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$

$$=\{(2^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^3=(2^{\frac{5}{6}})^3$$
$$=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}$$
$$=\sqrt{32}$$

이때 $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로 $(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

$\sqrt{32}=5.\times\times\times$임을 알 수 있어.

6, 7, 8, ⋯

기출 유형 POINT

거듭제곱근의 성질
근호가 여러 개인 경우, 먼저 근호 안의 식을 간단히 정리한 후 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

08 정답 15

정답률 61%

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$가 음수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. 15

연관 개념 check

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

수능 핵심 개념 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

(1) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립 ⇨ $a>0$, $D<0$

(2) 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$이 성립 ⇨ $a>0$, $D\leq0$

(3) 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 성립 ⇨ $a<0$, $D<0$

(4) 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$이 성립 ⇨ $a<0$, $D\leq0$

해결 흐름

1 세제곱근이 음수가 되어야 하므로 근호 안의 식의 부호가 음수이어야겠네.

알찬 풀이

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$가 음수가 되려면

$-x^2+2ax-6a<0$

즉, $x^2-2ax+6a>0$

이차방정식 $x^2-2ax+6a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\times6a$ ← $=(b')^2-ac$

$=a^2-6a$

$=a(a-6)<0$

이차방정식의 판별식
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 판별할 수 있으므로 b^2-4ac를 이차방정식의 판별식이라 한다.

$\therefore 0<a<6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는

1, 2, 3, 4, 5

이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

09 정답 33

정답률 73%

100 이하의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[3]{4^n}$이 정수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. 33

→ 유리수 지수의 꼴로 변형해야지.

연관 개념 check

$a>0$이고 m, n $(n\geq2)$이 정수일 때

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

해결 흐름

1 $\sqrt[3]{4^n}$을 유리수 지수의 꼴로 나타내야겠다.

2 1에서 구한 유리수 지수의 꼴에서 $\sqrt[3]{4^n}$이 정수가 되도록 하는 n의 조건을 생각해 봐야겠어.

알찬 풀이

$(2^2)^{\frac{n}{3}}=2^{2\times\frac{n}{3}}=2^{\frac{2n}{3}}$

$\sqrt[3]{4^n}=4^{\frac{n}{3}}=(2^2)^{\frac{n}{3}}=2^{\frac{2n}{3}}$이 정수가 되기 위해서는 $\frac{2n}{3}$이 자연수이어야 하므로

n은 3의 배수이어야 한다. → 2와 3은 서로소이니까 n이 3의 배수이어야 해.

이때 n은 100 이하의 자연수이므로 100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 33

이다. → $\frac{100}{3}=33.33\cdots$이니까 100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 33이야.

따라서 n의 개수는 33이다.

10 정답 ①

정답률 87%

$a=\sqrt{2}$, $b^3=\sqrt{3}$일 때, $(ab)^2$의 값은? (단, b는 실수이다.)

✓① $2\cdot3^{\frac{1}{3}}$　② $2\cdot3^{\frac{2}{3}}$　③ $2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{3}}$　④ $3\cdot2^{\frac{1}{3}}$　⑤ $3\cdot2^{\frac{2}{3}}$

연관 개념 check

$a>0$, $b>0$이고 x가 실수일 때

$(ab)^x=a^xb^x$

실전 적용 key

$b^3=A$일 때, $b^2=(b^3)^{\frac{2}{3}}=A^{\frac{2}{3}}$

해결 흐름

1 $(ab)^2=a^2b^2$이니까 a^2, b^2의 값을 각각 구해 계산하면 되겠다.

알찬 풀이

$a=\sqrt{2}$에서 $a^2=2$

$(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}}$

$b^3=\sqrt{3}$에서 $b^2=(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ (단, $a>0$이고, m, n은 2 이상의 자연수)

$\therefore (ab)^2=a^2b^2$

$=2\cdot3^{\frac{1}{3}}$

11 정답 30

정답률 77%

$a>0,\ b>0,\ c>0$

세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$a^6=3,\quad b^5=7,\quad c^2=11$

일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오. 30

해결 흐름

1 n의 값을 구하기 위해 먼저 $(abc)^n$을 구해야겠네.

2 $A^x=B$일 때, $A=(A^x)^{\frac{1}{x}}=B^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 $a,\ b,\ c$의 값을 각각 구해서 $(abc)^n$에 대입해야겠네.

3 이제 $(abc)^n$이 자연수가 되는 n의 조건을 생각해야겠다.

알찬 풀이

$a=(a^6)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{6}}$

$a^6=3$에서 $a=3^{\frac{1}{6}}$, $b^5=7$에서 $b=7^{\frac{1}{5}}$, $c^2=11$에서 $c=11^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ (abc)^n=(3^{\frac{1}{6}}\times7^{\frac{1}{5}}\times11^{\frac{1}{2}})^n=(3^5\times7^6\times11^{15})^{\frac{n}{30}}$

괄호 안의 지수를 자연수로 나타내기 위해서 6, 5, 2의 최소공배수인 30으로 분모를 묶었어.

$3^5\times7^6\times11^{15}$은 어떤 자연수의 30제곱수가 아니므로 $\frac{n}{30}$이 음이 아닌 정수일 때, $(3^{\frac{1}{6}}\times7^{\frac{1}{5}}\times11^{\frac{1}{2}})^n$이 자연수가 된다.

$\frac{n}{30}$은 0 또는 자연수이어야 하지.

즉, n은 0 또는 30의 배수이고, 이를 만족시키는 최소의 자연수 n의 값은 30이다.

연관 개념 check

$a>0,\ b>0$이고 $x,\ y$가 실수일 때

$(a^x)^y=a^{xy},\ (ab)^x=a^xb^x$

실전 적용 key

$(3^{\frac{1}{6}}\times7^{\frac{1}{5}}\times11^{\frac{1}{2}})^n$이 자연수가 되려면 n은 6, 5, 2의 공배수가 되어야 하고, 그중 최솟값은 6, 5, 2의 최소공배수인 30이다.

12 정답 ①

정답률 88%

$a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 $a,\ b$로 나타낸 것은?

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$　② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$　③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$　⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

해결 흐름

1 $2\cdot3=6$이니까 $a,\ b$를 유리수 지수의 꼴로 나타내야겠어.

2 $\sqrt[6]{6}$도 유리수 지수의 꼴로 나타낸 후 $\sqrt[6]{6}$을 1에서 변형한 $a,\ b$를 이용하여 나타내야겠다.

알찬 풀이

$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ (단, $a>0$이고, $m,\ n$은 2 이상의 자연수)

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}},\ b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=(2\cdot3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\cdot(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

$a,\ b$에 대한 식으로 변형하기 위한 과정이야.

다른 풀이

$a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3}$에서 $a^2=2,\ b^3=3$이므로

$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=(2\cdot3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{6}}=(a^2)^{\frac{1}{6}}\cdot(b^3)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

$(ab)^x=a^xb^x$ (단, $a>0,\ b>0$이고 x는 실수)

연관 개념 check

$a>0$이고 $x,\ y$가 실수일 때

$(a^x)^y=a^{xy}$

13 정답 ②

정답률 75%

실수 a가 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은?

① $\frac{5}{2}$　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{26}{5}$　⑤ $\frac{37}{6}$

해결 흐름

1 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$의 좌변의 분모, 분자에 각각 2^a을 곱하여 2^{2a}을 포함하는 식으로 변형해야겠네.

2 1에서 변형한 식에서 4^a의 값을 구하면 되겠다.

알찬 풀이

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$의 좌변의 분모, 분자에 2^a을 곱하면

$\frac{(2^a+2^{-a})\times2^a}{(2^a-2^{-a})\times2^a}=-2,\ \frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=-2$

$2^{2a}+1=-2\times2^{2a}+2,\ 3\times2^{2a}=1$　양변에 $2^{2a}-1$을 곱했어.

$2^{2a}=\frac{1}{3}\qquad\therefore\ 4^a=\frac{1}{3}$

이때 $4^{-a}=\frac{1}{4^a}=3$이므로

$4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

두 수는 서로 역수야.

연관 개념 check

$a\neq0$이고 n이 자연수일 때

$a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

실전 적용 key

주어진 식에 a^x과 a^{-x} 꼴, 즉 역수의 꼴이 들어있을 때는 식을 변형하여 다양한 방법으로 해결할 수 있다.
이때 구하려는 값이 무엇인지를 확인한 후에 식을 변형하여야 손쉽게 풀 수 있다.

14 정답 25

정답률 70%

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족시킬 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. 25

$3^{a^2-b^2}$의 지수 a^2-b^2을 인수분해하여 3^{a+b}을 포함한 식으로 변형해야지.

연관 개념 check

$a>0$이고 x, y가 실수일 때

$(a^x)^y=a^{xy}$

해결 흐름

1 $3^{a+b}=4$이니까 $3^{a^2-b^2}$의 지수를 인수분해해야겠다.

2 이제 지수법칙을 이용하여 $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하면 되겠네.

알찬 풀이

$$\begin{aligned}3^{a^2-b^2}&=3^{(a+b)(a-b)}=(3^{a+b})^{a-b}\\&=4^{a-b}\\&=(2^2)^{a-b}=(2^{a-b})^2\\&=5^2=25\end{aligned}$$

다른 풀이

로그를 이용하여 다음과 같이 풀 수도 있다.

$3^{a+b}=4$에서 $a+b=\log_3 4$ …… ㉠

$2^{a-b}=5$에서 $a-b=\log_2 5$ …… ㉡

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$일 때 $a^x=M \Longleftrightarrow x=\log_a M$

㉠, ㉡을 각 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=\log_3 4\times\log_2 5\\&=2\log_3 2\times\log_2 5\\&=2\log_3 5\end{aligned}$$

$2\times\frac{\log 2}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}=2\times\frac{\log 5}{\log 3}$

즉, $a^2-b^2=\log_3 5^2=\log_3 25$이므로

$3^{a^2-b^2}=3^{\log_3 25}=25$

$a^{\log_a b}=b$ (단, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$)

15 정답 ②

정답률 87%

다음 식을 간단히 한 것은?

$$(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2$$

$(a+b)^2-(a-b)^2$ 꼴이니까 곱셈 공식을 이용해서 전개해야지.

① 2^{2x} ② 2^{2x+2} ③ 2^{2x+2y}

④ 2^{-2y} ⑤ 2^{-2y+2}

연관 개념 check

$a>0$이고 x, y가 실수일 때

$a^xa^y=a^{x+y}$, $(a^x)^y=a^{xy}$

수능 핵심 개념 곱셈 공식을 이용한 식의 계산

$a>0$, $b>0$이고 r, s는 실수일 때

① $(a^r+b^s)(a^r-b^s)=a^{2r}-b^{2s}$

② $(a^r+b^s)^2=a^{2r}+2a^rb^s+b^{2s}$,
$(a^r-b^s)^2=a^{2r}-2a^rb^s+b^{2s}$

③ $(a^r+b^s)^3=a^{3r}+3a^{2r}b^s+3a^rb^{2s}+b^{3s}$,
$(a^r-b^s)^3=a^{3r}-3a^{2r}b^s+3a^rb^{2s}-b^{3s}$

해결 흐름

1 주어진 식을 전개한 후 지수법칙을 이용하면 식을 간단히 할 수 있겠네.

알찬 풀이

$$\begin{aligned}&(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2\\&=\{2^{2(x+y)}+2\times2^{x+y}\times2^{x-y}+2^{2(x-y)}\}-\{2^{2(x+y)}-2\times2^{x+y}\times2^{x-y}+2^{2(x-y)}\}\\&=4\times2^{x+y}\times2^{x-y}\\&=2^{2x+2}\end{aligned}$$

다른 풀이 1

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한 거야.

$$\begin{aligned}&(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2\\&=\{(2^{x+y}+2^{x-y})+(2^{x+y}-2^{x-y})\}\times\{(2^{x+y}+2^{x-y})-(2^{x+y}-2^{x-y})\}\\&=(2^{x+y}+2^{x-y}+2^{x+y}-2^{x-y})\times(2^{x+y}+2^{x-y}-2^{x+y}+2^{x-y})\\&=(2\times2^{x+y})(2\times2^{x-y})\\&=4\times2^{(x+y)+(x-y)}\\&=2^2\times2^{2x}\\&=2^{2x+2}\end{aligned}$$

$(2\times2^{x+y})(2\times2^{x-y})=2\times2^{x+y}\times2\times2^{x-y}=4\times2^{(x+y)+(x-y)}$

다른 풀이 2

$2^{x+y}=s$, $2^{x-y}=t$라 하면

$$\begin{aligned}(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2&=(s+t)^2-(s-t)^2\\&=s^2+2st+t^2-(s^2-2st+t^2)\\&=4st=2^2\times2^{x+y}\times2^{x-y}\\&=2^{2+(x+y)+(x-y)}\\&=2^{2x+2}\end{aligned}$$

→ 곱셈 공식이 좀 더 눈에 잘 들어오지?

16 정답 ⑤

정답률 가형 94%, 나형 90%

양수기로 물을 끌어올릴 때, 펌프의 1분당 회전수 N, 양수량 Q, 양수할 높이 H와 양수기의 비교회전도 S 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$$ 1

(단, N, Q, H의 단위는 각각 rpm, m^3/분, m이다.)

펌프의 1분당 회전수가 일정한 양수기에 대하여 양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때의 비교회전도를 S_1, 양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때의 비교회전도를 S_2라 하자. 2 $\frac{S_1}{S_2}$ 3의 값은?

→ N은 일정한 값이겠네.

① $2^{\frac{3}{4}}$ ② $2^{\frac{7}{8}}$ ③ 2 ④ $2^{\frac{9}{8}}$ ✓⑤ $2^{\frac{5}{4}}$

연관 개념 check

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

$a^xa^y=a^{x+y}$, $\left(\frac{b}{a}\right)^x=\frac{b^x}{a^x}$

해결 흐름

1 우선 문제에 제시된 값들이 주어진 등식 $S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$의 S, N, Q, H 중 어느 것을 의미하는지 파악해야겠다.

2 각 값을 해당 문자에 대입해서 두 개의 등식을 만들어야겠네.

3 $\frac{b^m}{a^m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$, $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=a^{-(-n)}=a^n$임을 이용하면 $\frac{S_1}{S_2}$의 값을 계산할 수 있어.

알찬 풀이

1분당 회전수가 일정하다고 했으므로 1분당 회전수를 N이라 하자.

양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때, 즉 $Q=24$, $H=5$일 때 비교회전도 S_1은

$S_1=N\times24^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}$ → $S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$의 Q에 24, H에 5를 대입했어.

양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때, 즉 $Q=12$, $H=10$일 때 비교회전도 S_2는

$S_2=N\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}$ → $S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$의 Q에 12, H에 10을 대입했어.

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times24^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}}{N\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}}=\left(\frac{24}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{5}{10}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$$

→ $2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=2^{\frac{2+3}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$

17 정답 ②

정답률 가형 89%, 나형 74%

조개류는 현탁물을 여과한다. 수온이 t(℃)이고 개체중량이 w(g)일 때, A 조개와 B 조개가 1시간 동안 여과하는 양(L)을 각각 Q_A, Q_B라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

t와 w가 의미하는 것이 무엇인지 주의 깊게 봐야 해.

$$Q_A=0.01t^{1.25}w^{0.25}$$
$$Q_B=0.05t^{0.75}w^{0.30}$$ 1

2 수온이 20 ℃이고 A 조개와 B 조개의 개체중량이 각각 8 g일 때, $\frac{Q_A}{Q_B}$ 3의 값은 $2^a\times5^b$이다. $a+b$의 값은?

(단, a, b는 유리수이다.)

① 0.15 ✓② 0.35 ③ 0.55 ④ 0.75 ⑤ 0.95

연관 개념 check

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

$a^x\div a^y=a^{x-y}$, $(ab)^x=a^xb^x$

해결 흐름

1 우선 문제에 제시된 값들이 주어진 두 관계식 중 어느 관계식의 t, w를 의미하는지 파악해야 해.

2 각 값을 각 해당 문자에 대입해서 두 개의 등식을 만들어야겠네.

3 $a^m\div a^n=a^{m-n}$임을 이용하면 $\frac{Q_A}{Q_B}$의 값을 계산할 수 있어.

알찬 풀이

수온은 20 ℃이고 A 조개의 개체중량은 8 g이므로 A 조개가 1시간 동안 여과하는 현탁물의 양 Q_A는

$Q_A=0.01\times20^{1.25}\times8^{0.25}$ → $Q_A=0.01t^{1.25}w^{0.25}$의 t에 20, w에 8을 대입해야 해.

수온은 20 ℃이고 B 조개의 개체중량도 8 g이므로 B 조개가 1시간 동안 여과하는 현탁물의 양 Q_B는

$Q_B=0.05\times20^{0.75}\times8^{0.30}$ → $Q_B=0.05t^{0.75}w^{0.30}$의 t에 20, w에 8을 대입해야 해.

$$\therefore \frac{Q_A}{Q_B}=\frac{0.01\times20^{1.25}\times8^{0.25}}{0.05\times20^{0.75}\times8^{0.30}}=\frac{0.01}{0.05}\times\frac{20^{1.25}}{20^{0.75}}\times\frac{8^{0.25}}{8^{0.30}}$$

$$=\frac{1}{5}\times20^{1.25-0.75}\times8^{0.25-0.30}=5^{-1}\times(2^2\times5)^{0.50}\times(2^3)^{-0.05}$$

$$=2^{2\times0.50}\times2^{3\times(-0.05)}\times5^{-1}\times5^{0.50}=2^{0.85}\times5^{-0.50}$$

따라서 $a=0.85$, $b=-0.50$이므로

$a+b=0.85+(-0.50)=0.35$

빠른 풀이

$$\frac{Q_A}{Q_B}=\frac{0.01t^{1.25}w^{0.25}}{0.05t^{0.75}w^{0.30}}=\frac{1}{5}\times t^{1.25-0.75}\times w^{0.25-0.30}=\frac{t^{0.50}}{5w^{0.05}}$$

→ $w^{0.25-0.30}=w^{-0.05}=(w^{0.05})^{-1}=\frac{1}{w^{0.05}}$

이므로 이 식에 $t=20$, $w=8$을 대입하면

$$\frac{Q_A}{Q_B}=\frac{20^{0.50}}{5\times8^{0.05}}=\frac{(2^2\times5)^{0.50}}{5\times(2^3)^{0.05}}=\frac{(2^2)^{0.50}\times5^{0.50}}{2^{0.15}\times5}=\frac{2\times5^{0.50}}{2^{0.15}\times5}$$

$$=2^{1-0.15}\times5^{0.50-1}=2^{0.85}\times5^{-0.50}$$

따라서 $a=0.85$, $b=-0.50$이므로

$a+b=0.85+(-0.50)=0.35$

18 정답 ②

정답률 81%

1. $\log_2 5=a$, $\log_5 3=b$일 때, $\log_5 12$를 a, b로 옳게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{a}+b$ ✓② $\frac{2}{a}+b$ ③ $\frac{1}{a}+2b$
④ $a+\frac{1}{b}$ ⑤ $2a+\frac{1}{b}$

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$
② $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)
③ $\log_a M=\frac{1}{\log_M a}$ (단, $M\neq1$)

해결 흐름

1 로그의 성질과 밑의 변환 공식을 이용하면 되겠네.

알찬 풀이

$\log_2 5=a$, $\log_5 3=b$이므로

$$\begin{aligned}\log_5 12&=\log_5(2^2\times3)\\&=\log_5 2^2+\log_5 3\\&=2\boxed{\log_5 2}+\log_5 3\\&=2\times\frac{1}{\log_2 5}+\log_5 3\\&=2\times\frac{1}{a}+b\\&=\frac{2}{a}+b\end{aligned}$$

로그의 성질 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$을 이용했어.
로그의 성질 $\log_a M^k=k\log_a M$을 이용했어.
로그의 밑의 변환 공식을 이용했어.

19 정답 6

정답률 85%

양수 a에 대하여 1 $a^{\frac{1}{2}}=8$일 때, 2 $\log_2 a$의 값을 구하시오. 6

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$일 때
① $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)
② $\log_a a=1$

해결 흐름

1 $A^x=B$일 때, $A=(A^x)^{\frac{1}{x}}=B^{\frac{1}{x}}$임을 이용하면 a의 값을 구할 수 있겠다.
2 1에서 구한 a의 값을 대입한 다음 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구하면 되겠네.

알찬 풀이

$a=(a^{\frac{1}{2}})^2=8^2$

$a^{\frac{1}{2}}=8$에서 $a=8^2=64$

$\therefore \log_2 a=\log_2 64=\log_2 2^6=6$

$\log_2 2^6=6\log_2 2=6\times1=6$

다른 풀이

$a^{\frac{1}{2}}=8$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 a^{\frac{1}{2}}=\log_2 8$

$\frac{1}{2}\log_2 a=\log_2 2^3$

$\therefore \log_2 a=2\times\log_2 2^3=2\times3=6$

$\log_2 2^3=3\log_2 2=3\times1=3$

20 정답 ①

정답률 78%

좌표평면 위의 두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$을 지나는 1 직선의 기울기는?

$\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$이야.

✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ ② $\log_a a=1$

오답 clear

$\log_2 10-\log_2 5=\log_2(10-5)=\log_2 5$로 계산하지 않도록 주의한다.

해결 흐름

1 기울기에 대한 식을 세우고, 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산하면 되겠다.

알찬 풀이

두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 10-\log_2 5}{2-1}=\log_2\frac{10}{5}=\log_2 2=1$$

분모는 1이니까 생략할 수 있지.

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

21 정답 ④ 정답률 71%

두 실수 a, b가

$ab=\log_3 5$, $b-a=\log_2 5$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$의 값은? 1

① $\log_5 2$ ② $\log_3 2$ ③ $\log_3 5$

✓④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 5$

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $N>0$일 때

$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

해결 흐름

1 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$을 통분한 다음 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구하면 되겠네.

알찬 풀이

$ab=\log_3 5$, $b-a=\log_2 5$이므로

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{\boxed{\log_2 5}}{\boxed{\log_3 5}}$$

$$=\frac{\boxed{\frac{\log 5}{\log 2}}}{\boxed{\frac{\log 5}{\log 3}}}$$

$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$임을 이용하여 로그의 밑을 같게 만들었어.

$$=\frac{\log 3}{\log 2}=\log_2 3$$

기출 유형 POINT

로그의 성질과 여러 가지 계산

로그의 계산은 로그의 정의, 성질 등을 이용한다. 특히, 로그의 밑이 다를 때는 밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 한다.

22 정답 3 정답률 77%

$\log_3 \frac{9}{2}+\log_3 6$의 값을 구하시오. **3** 1

→ 로그의 성질을 이용하면 쉽게 해결할 수 있어.

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

② $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

해결 흐름

1 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산하면 되겠네.

알찬 풀이

$$\log_3 \frac{9}{2}+\log_3 6=\log_3\left(\frac{9}{2}\times6\right)=\log_3 27$$

$$=\log_3 3^3=3$$

→ $\log_3 3^3=3\log_3 3=3\times1=3$

23 정답 ① 정답률 86%

$\log_3 6-\log_3 2$의 값은? 1

✓① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

→ 로그의 성질을 이용하면 쉽게 해결할 수 있어.

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ ② $\log_a a=1$

해결 흐름

1 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산하면 되겠네.

알찬 풀이

$$\log_3 6-\log_3 2=\log_3 \frac{6}{2}$$ → 로그의 성질은 밑이 같을 때만 이용할 수 있어.

$$=\log_3 3=1$$

생생 수험 Talk

수학은 내신과 수능이 서로 다른 내용을 다루는 게 아니기 때문에 내신과 수능 공부를 동시에 한다고 생각하는 것이 좋을 것 같아. 내신은 시험 범위가 정해져 있으니까 내신 시험 기간일 때는 그 부분을 중점적으로 공부하긴 했지만, 그것도 한편으론 수능 대비니까 나는 딱히 다르게 공부하진 않았고 (수능)=(내신)이라는 생각으로 공부했었어.

24 정답 ③

정답률 A형 86%, B형 89%

디지털 사진을 압축할 때 원본 사진과 압축한 사진의 다른 정도를 나타내는 지표인 최대 신호 대 잡음비를 P, 원본 사진과 압축한 사진의 평균제곱오차를 E라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

1

$$P=20\log 255-10\log E\ (E>0)$$

두 원본 사진 A, B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비를 각각 P_A, P_B라 하고, 평균제곱오차를 각각 E_A $(E_A>0)$, E_B $(E_B>0)$라고 하자. $E_B=100E_A$일 때, P_A-P_B의 값은?

3 2

① 30 ② 25 ③ 20 ④ 15 ⑤ 10

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

$\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}$

해결 흐름

1 P_A와 E_A, P_B와 E_B 사이의 관계식을 각각 구해야겠네.

2 1의 두 관계식을 이용하여 P_A-P_B를 계산해야겠다.

3 계산 과정에서 필요한 E_A와 E_B 사이의 관계식은 $E_B=100E_A$로부터 얻을 수 있어.

알찬 풀이

두 원본 사진 A, B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비가 각각 P_A, P_B, 평균제곱오차가 각각 E_A, E_B이므로

$P_A=20\log 255-10\log E_A$ ······ ㉠

$P_B=20\log 255-10\log E_B$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면

$$P_A-P_B=20\log 255-10\log E_A-(20\log 255-10\log E_B)$$
$$=10\log E_B-10\log E_A=10\log \boxed{\frac{E_B}{E_A}}$$

$E_B=100E_A$로 주어졌기 때문이야.

$$=10\log \boxed{\frac{100E_A}{E_A}}$$
$$=10\log 10^2=20$$

$10\log 10^2=10\times2\log 10=20\log_{10}10=20$

기출 유형 POINT

로그의 활용

주어진 식의 각 문자가 나타내는 값을 적절한 위치에 대입하고, 양변에 상용로그를 취하거나 로그의 성질을 이용하여 계산한다.

또, 주어진 상황이 2개인 경우, 두 가지 서로 다른 상황을 구분하고, 두 개의 식으로 바꾸어 두 식을 빼거나 나누어 간단히 정리하여 계산한다.

25 정답 ④

정답률 A형 85%, B형 92%

각 문자가 의미하는 것이 무엇인지 주의 깊게 봐야 해.

도로용량이 C인 어느 도로구간의 교통량을 V, 통행시간을 t라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

1

$$\log\left(\frac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{V}{C}\ (t>t_0)$$

(단, t_0은 도로 특성 등에 따른 기준통행시간이고, k는 상수이다.)

이 도로구간의 교통량이 도로용량의 2배일 때 통행시간은 기준통행시간 t_0의 $\frac{7}{2}$배이다. k의 값은?

2 3

① $-4\log 2$ ② $1-7\log 2$ ③ $-3\log 2$ ④ $1-6\log 2$ ⑤ $1-5\log 2$

실전 적용 key

관계식이 주어진 로그의 활용 문제는 관계식의 문자가 나타내는 것을 확인하고 문제에서 주어진 조건을 식에 대입하여 해결한다.

해결 흐름

1 주어진 관계식에 대입할 값들이 숫자가 아니라 비율로 주어졌어. 대입할 값들 사이의 관계식부터 세워야겠네.

2 V는 C에 대한 식, t는 t_0에 대한 식으로 나타내야겠다.

3 2의 식을 주어진 관계식의 V와 t에 대입하면 k의 값을 구할 수 있겠다.

알찬 풀이

도로구간의 교통량(V)이 도로용량(C)의 2배이므로

$V=2C$

통행시간(t)은 기준통행시간 t_0의 $\frac{7}{2}$배이므로

$t=\frac{7}{2}t_0$ $\therefore \frac{t}{t_0}=\frac{7}{2}$

주어진 관계식에서 $\frac{t}{t_0}$로 나와있으니까 변형했어.

이를 $\log\left(\frac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\frac{V}{C}$에 대입하면

$$\log\left(\frac{7}{2}-1\right)=k+4\log\frac{2C}{C}$$

$$\log\frac{5}{2}=k+4\log 2$$

이때 $\log\frac{5}{2}=\log\frac{10}{4}=1-2\log 2$이므로

$\log\frac{10}{4}=\log 10-\log 4=1-\log 2^2=1-2\log 2$

$1-2\log 2=k+4\log 2$

$\therefore k=1-6\log 2$

26 정답 ⑤

정답률 A형 64%, B형 60%

단면의 반지름의 길이가 R $(R<1)$인 원기둥 모양의 어느 급수관에 물이 가득 차 흐르고 있다. 이 급수관의 단면의 중심에서의 물의 속력을 v_c, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 x $(0<x\le R)$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력을 v라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{v_c}{v}=1-k\log\frac{x}{R}$$

(단, k는 양의 상수이고, 길이의 단위는 m, 속력의 단위는 m/초이다.)

$R<1$인 이 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{27}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{2}$일 때, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{3}$이다. a의 값은?

① $\frac{39}{23}$ ② $\frac{37}{23}$ ③ $\frac{35}{23}$ ④ $\frac{33}{23}$ ⑤ $\frac{31}{23}$

연관 개념 check

$a>0$, $a\ne1$, $M>0$일 때

$\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

실전 적용 key

x는 R에 대한 식, v와 v_c 사이의 관계는 주어졌지만 상수 k에 대한 조건은 따로 주어지지 않았으므로 $x=R^{\frac{27}{23}}$, $v=\frac{1}{2}v_c$임을 이용하여 상수 k에 대한 조건을 찾아내야 한다.

해결 흐름

1 주어진 등식 $\frac{v_c}{v}=1-k\log\frac{x}{R}$에 대입할 값들이 숫자가 아니라 문자와 비율로 주어졌어. 대입할 값들 사이의 관계식부터 세워야겠네.

2 x는 R에 대한 식, v는 v_c에 대한 식으로 나타내야겠다.

3 2의 식을 관계식의 x와 v에 대입하면 a의 값을 구할 수 있어.

알찬 풀이

급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{27}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{2}$이므로

$x=R^{\frac{27}{23}}$, $v=\frac{1}{2}v_c$

이를 $\frac{v_c}{v}=1-k\log\frac{x}{R}$에 대입하면 $\dfrac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\boxed{\dfrac{R^{\frac{27}{23}}}{R}}$

$2=1-k\log\boxed{R^{\frac{4}{23}}}$, $\frac{4}{23}k\log R=-1$

$\therefore k\log R=-\frac{23}{4}$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R}=R^{\frac{27}{23}}\div R=R^{\frac{27}{23}-1}=R^{\frac{4}{23}}$

한편, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{3}$이므로

$x=R^a$, $v=\frac{1}{3}v_c$

이를 $\frac{v_c}{v}=1-k\log\frac{x}{R}$에 대입하면 $\dfrac{v_c}{\frac{1}{3}v_c}=1-k\log\dfrac{R^a}{R}$

$3=1-k\log R^{a-1}$, $(a-1)k\log R=-2$

$3=1-(a-1)k\log R$이니까 $(a-1)k\log R=1-3=-2$

이때 ㉠에 의하여

$(a-1)\times\left(-\frac{23}{4}\right)=-2$, $a-1=\frac{8}{23}$

$\therefore a=\frac{8}{23}+1=\frac{31}{23}$

27 정답 ①

정답률 가형 96%, 나형 90%

화재가 발생한 화재실의 온도는 시간에 따라 변한다.

어떤 화재실의 초기 온도를 T_0(℃), 화재가 발생한 지 t분 후의 온도를 T(℃)라 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

$$T=T_0+k\log(8t+1)\ (\text{단, } k\text{는 상수이다.})$$

초기 온도가 20 ℃인 이 화재실에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후의 온도는 365 ℃이었고, 화재가 발생한 지 a분 후의 온도는 710 ℃이었다. a의 값은?

① $\frac{99}{8}$ ② $\frac{109}{8}$ ③ $\frac{119}{8}$ ④ $\frac{129}{8}$ ⑤ $\frac{139}{8}$

연관 개념 check

$a>0$, $a\ne1$, $N>0$일 때

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

해결 흐름

1 우선 문제에서 제시된 값들이 주어진 등식 $T=T_0+k\log(8t+1)$의 T, T_0, t 중 어느 것을 의미하는지 파악해야겠다.

2 첫 번째 상황의 각 값을 해당 문자에 대입하면 k의 값을 구할 수 있어.

3 두 번째 상황의 각 값과 k의 값을 해당 문자에 대입해서 a의 값을 구하면 되겠네.

알찬 풀이

초기 온도가 20 ℃인 화재실에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후의 온도가 365 ℃임을 등식으로 나타냈어.

$T_0=20$이고 $t=\frac{9}{8}$일 때 $T=365$이므로

$365=20+k\log\left(8\times\frac{9}{8}+1\right)$, $k\log10=345$ $\therefore k=345$

$\log10=\log_{10}10=1$

$\therefore T=T_0+345\log(8t+1)$

또, $T_0=20$이고 $t=a$일 때 $T=710$이므로

같은 화재실이니까 초기 온도가 20 ℃로 같아.

$710=20+345\log(8a+1)$

$345\log(8a+1)=690$, $\log(8a+1)=2$, $8a+1=10^2$

$8a=99$ $\therefore a=\frac{99}{8}$

28 정답 ⑤

정답률 가형 94%, 나형 88%

어떤 물질이 녹아 있는 용액에 단색광을 투과시킬 때 투과 전 단색광의 세기에 대한 투과 후 단색광의 세기의 비를 그 단색광의 투과도라 한다. 투과도를 T, 단색광이 투과한 길이를 l, 용액의 농도를 d라 할 때, 다음 관계가 성립한다.

$\log T=-kld$ (단, k는 양의 상수이다.)

이 물질에 대하여 투과길이가 l_0 $(l_0>0)$이고 용액의 농도가 $3d_0$ $(d_0>0)$일 때의 투과도를 T_1, 투과길이가 $2l_0$이고 용액의 농도가 $4d_0$일 때의 투과도를 T_2라 하자. $T_2=T_1^{\,n}$을 만족시키는 n의 값은?

① 2 ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
$\log_a M=\log_a N \Longleftrightarrow M=N$

해결 흐름

1 두 상황에 대해 주어진 값들을 해당 문자에 각각 대입해서 두 개의 등식을 세워야겠어.
2 두 개의 등식을 이용하여 T_1과 T_2 사이의 관계식을 찾아야겠어.

알찬 풀이

$\log T=-kld$에서

$\log T_1=-k\times l_0\times3d_0=-3kl_0d_0$ …… ㉠

투과길이가 l_0, 용액의 농도가 $3d_0$일 때의 투과도가 T_1이라는 조건에서 나온 식이야.

$\log T_2=-k\times2l_0\times4d_0=-8kl_0d_0$ …… ㉡

투과길이가 $2l_0$, 용액의 농도가 $4d_0$일 때의 투과도가 T_2라는 조건에서 나온 식이야.

㉡÷㉠을 하면

$$\frac{\log T_2}{\log T_1}=\frac{8}{3}$$

$$\log T_2=\frac{8}{3}\log T_1,\ \log T_2=\log T_1^{\frac{8}{3}}$$

$k\log_a M=\log_a M^k$ (단, $a>0$, $a\neq1$, $M>0$)

$$T_2=T_1^{\frac{8}{3}}$$

$$\therefore n=\frac{8}{3}$$

문제 해결 TIP

이성민 | 연세대 불어불문학과 | 고양국제고등학교 졸업

사실 복잡한 관계식에서 주어진 조건을 만족시키는 식의 값을 구하는 데에는 각 문자가 나타내는 것이 무엇인지 파악한 다음에, 그 문자에 해당하는 값을 정확히 대입하는 것이 무엇보다 중요해. 특히 이 문제에서 n이라는 문자를 보고 답이 자연수일 것이라는 잘못된 추측을 하기 쉬워. n에 대한 특별한 조건이 주어지지 않았으므로 실수 범위에서 생각해야 해.
각 문자가 나타내는 것이 무엇인지, 조건이 무엇인지 꼼꼼히 점검하면서 답을 찾도록 해.

29 정답 ③

정답률 가형 92%, 나형 86%

밀폐된 용기 속의 액체에서 증발과 응축이 계속하여 같은 속도로 일어나는 동적 평형 상태의 증기압을 포화 증기압이라 한다. 밀폐된 용기 속에 있는 어떤 액체의 경우 포화 증기압 P(mmHg)와 용기 속의 온도 t(℃) 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log \mathrm{P}=8.11-\frac{1750}{t+235}\quad(0<t<60)$$

용기 속의 온도가 15 ℃일 때의 포화 증기압을 P_1, 45 ℃일 때의 포화 증기압을 P_2라 할 때, $\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}$의 값은?

① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{2}}$ ③ $10^{\frac{3}{4}}$ ④ 10 ⑤ $10^{\frac{5}{4}}$

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때
$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

해결 흐름

1 주어진 등식 $\log \mathrm{P}=8.11-\frac{1750}{t+235}$에서 문자를 확인해 봐. 온도 t만 알면 포화 증기압 P를 구할 수 있어.
2 두 상황에 대해 주어진 값들을 문자에 대입해서 $\log \mathrm{P}_1$과 $\log \mathrm{P}_2$의 값을 각각 구하면 되겠다.
3 $\log M-\log N=\log\frac{M}{N}$을 이용하면 $\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}$의 값을 구할 수 있어.

알찬 풀이

$t=15$일 때, 용기 속의 온도가 15 ℃야.

$$\log \mathrm{P}_1=8.11-\frac{1750}{15+235}=8.11-7=1.11 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$t=45$일 때, 용기 속의 온도가 45 ℃야.

$$\log \mathrm{P}_2=8.11-\frac{1750}{45+235}=8.11-6.25=1.86 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$$\log \mathrm{P}_2-\log \mathrm{P}_1=0.75=\frac{3}{4}$$

$$\log\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}=10^{\frac{3}{4}}$$

30 정답 ④

정답률 가형 95%, 나형 88%

누에나방 암컷은 페로몬을 분비하여 수컷을 유인한다. 누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 t초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 x인 곳에서 측정한 페로몬의 농도 y는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log y=A-\frac{1}{2}\log t-\frac{Kx^2}{t}$$

→ A와 K는 변하지 않는 고정된 값이야.

(단, A와 K는 양의 상수이다.)

누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 2인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 a이고, 분비한 후 4초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 d인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 $\frac{a}{2}$이다. d의 값은?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

해결 흐름

1 우선 문제에서 제시된 값들이 주어진 등식 $\log y=A-\frac{1}{2}\log t-\frac{Kx^2}{t}$의 x, y, t 중 어느 것을 의미하는지 파악해야겠다.

2 두 상황에 대해 주어진 값들을 해당 문자에 대입하여 두 개의 등식을 세워야겠다.

3 두 상황에서 얻은 $\log a$가 서로 같음을 이용해서 d의 값을 계산하면 되겠네.

알찬 풀이

→ 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 2인 곳에서 측정한 페로몬의 농도가 a라는 조건에서 나온 식이야.

$t=1$, $x=2$일 때 $y=a$이므로

$$\log a=A-\frac{1}{2}\log 1-\frac{K\times2^2}{1}=A-4K \quad \cdots\cdots ㉠$$

$t=4$, $x=d$일 때 $y=\frac{a}{2}$이므로

→ 페로몬을 분비한 후 4초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 d인 곳에서 측정한 페로몬의 농도가 $\frac{a}{2}$라는 조건에서 나온 식이야.

$$\log\frac{a}{2}=A-\frac{1}{2}\log 4-\frac{Kd^2}{4}$$

$$\log a-\log 2=A-\frac{1}{2}\times2\log 2-\frac{Kd^2}{4}$$

$$\therefore \log a=A-\frac{Kd^2}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$$A-4K=A-\frac{Kd^2}{4},\ 4K=\frac{Kd^2}{4}$$

$d^2=16 \qquad \therefore d=4\ (\because d\geq0)$

→ d는 거리니까 음수가 나올 수 없어.

31 정답 ④

정답률 가형 89%, 나형 72%

지반의 상대밀도를 구하기 위하여 지반에 시험기를 넣어 조사하는 방법이 있다. 지반의 유효수직응력을 S, 시험기가 지반에 들어가면서 받는 저항력을 R라 할 때, 지반의 상대밀도 $D(\%)$는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$$D=-98+66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$$

(단, S와 R의 단위는 metric ton/m²이다.)

지반 A의 유효수직응력은 지반 B의 유효수직응력의 1.44배이고, 시험기가 지반 A에 들어가면서 받는 저항력은 시험기가 지반 B에 들어가면서 받는 저항력의 1.5배이다. 지반 B의 상대밀도가 65(%)일 때, 지반 A의 상대밀도(%)는?

(단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

① 81.5 ② 78.2 ③ 74.9 ④ 71.6 ⑤ 68.3

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

② $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

실전 적용 key

$\log 2$를 0.3010으로 암기하고 있다 하더라도 문제에서 $\log 2=0.3$으로 주어졌으므로 $\log 2$에 0.3을 대입해야 한다.

해결 흐름

1 주어진 등식 $D=-98+66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$에 대입할 값들이 숫자가 아니라 비율로 주어졌어. 대입할 값들 사이의 관계식부터 세워야겠다.

2 지반 A에 대한 값을 지반 B에 대한 값을 이용해서 나타내야겠네.

3 지반 B의 상대밀도를 이용해서 지반 A의 상대밀도를 계산하면 되겠네.

알찬 풀이

→ $D=-98+66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$에서 S와 R가 상수라는 말이 없으니까 각각을 변수로 생각해야 해.

지반 A, B의 유효수직응력을 각각 S_A, S_B, 저항력을 각각 R_A, R_B라 하면

$$\boxed{S_A=1.44S_B},\ \boxed{R_A=1.5R_B} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, 지반 A, B의 상대밀도를 각각 D_A, D_B라 하면 $D_B=65$이므로

$$-98+66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}=65$$

$$66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}=163 \qquad \therefore \log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}=\frac{163}{66} \quad \cdots\cdots ㉡$$

지반 A의 상대밀도야. 즉, 구하려는 값이지.

$$\therefore D_A=-98+66\log\frac{R_A}{\sqrt{S_A}}$$

$$=-98+66\log\frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}}\ (\because ㉠)$$

$$=-98+66\log\frac{1.5R_B}{1.2\sqrt{S_B}}=-98+66\log\left(\frac{5}{4}\times\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}\right)$$

$$=-98+66\left(\log\frac{5}{4}+\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}\right)$$

$$=-98+66\boxed{\log\frac{10}{8}}+66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}$$

$\log\frac{10}{8}=\log 10-\log 8=1-\log 2^3=1-3\log 2$

$$=-98+66(\boxed{1-3\log 2})+66\times\frac{163}{66}\ (\because ㉡)$$

$$=-98+66(1-3\times0.3)+163=71.6(\%)$$

따라서 지반 A의 상대밀도는 71.6 %이다.

32 정답 ③

정답률 93%

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프 **1** 와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은?

→ 두 함수가 서로 역함수 **2** 임을 알 수 있어.

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

연관 개념 check

함수 $y=f(x)$의 그래프를

(1) x축의 방향으로 m만큼 평행이동
➡ $y=f(x-m)$ ⟵ x 대신 $x-m$을 대입

(2) y축의 방향으로 n만큼 평행이동
➡ $y-n=f(x)$ ⟵ y 대신 $y-n$을 대입

(3) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동
➡ $x=f(y)$ ⟵ x 대신 y, y 대신 x를 대입

실전 적용 key

지수함수와 로그함수의 그래프를 평행이동한 그래프의 함수의 식을 구해야 한다. 이때 지수함수와 로그함수는 서로 역함수이고, 서로 역함수인 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

해결 흐름

1 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 각각 x축의 방향으로 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식을 구해야겠네.

2 **1**에서 구한 두 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하면 두 함수가 서로 역함수임을 알 수 있고, 역함수 구하는 방법을 이용하면 되겠다.

알찬 풀이

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면

$y=2^{x-m}+2$

함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=\log_2 8(x-2)$

$\therefore y=\log_2(x-2)+3$ ······ ㉠

→ $y=\log_2 8(x-2)$
$=\log_2 8+\log_2(x-2)$
$=\log_2(x-2)+3$

함수 $y=2^{x-m}+2$의 그래프가 함수 $y=\log_2(x-2)+3$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=2^{x-m}+2$와 $y=\log_2(x-2)+3$은 서로 역함수이다.

$y=2^{x-m}+2$에서

$2^{x-m}=y-2$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$x-m=\log_2(y-2)$ $\quad\therefore x=\log_2(y-2)+m$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x-2)+m$

따라서 $y=2^{x-m}+2$의 역함수는 $y=\log_2(x-2)+m$이고, 이 함수가 ㉠과 일치하므로

$m=3$

33 정답 ④

정답률 93%

→ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 생각해 봐.

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 **1** 하는 자연수 k의 최댓값 **2** 은?

① 10 ② 12 ③ 14
✓④ 16 ⑤ 18

연관 개념 check

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프를

(1) x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
➡ $y=a^{x-m}+n$ ⟵ x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입

(2) x축에 대하여 대칭이동
➡ $y=-a^x$ ⟵ y 대신 $-y$를 대입

(3) y축에 대하여 대칭이동
➡ $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ⟵ x 대신 $-x$를 대입

(4) 원점에 대하여 대칭이동
➡ $y=-a^{-x}=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ⟵ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입

실전 적용 key

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$은 $a>1$이면 증가함수, $0<a<1$이면 감소함수이다.

해결 흐름

1 평행이동과 대칭이동을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않을 때의 그래프의 개형을 생각해 봐야겠군.

2 **1**에서 그린 그래프에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구해 봐야겠네.

알찬 풀이

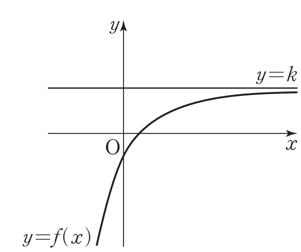
$$f(x)=-2^{4-3x}+k$$

$$=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$$

→ $-2^{4-3x}=-2^{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}=-\left(\frac{1}{2^3}\right)^{x-\frac{4}{3}}=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(0)\leq0$이어야 하므로

$-2^4+k\leq0$

$\therefore k\leq16$

따라서 자연수 k의 최댓값은 16이다.

$a>0$, $a\neq1$일 때
(1) 지수함수 $y=a^{x-m}+n$에서
① 치역: $\{y\mid y>n\}$
② 그래프의 점근선의 방정식: $y=n$
(2) 지수함수 $y=-a^{x-m}+n$에서
① 치역: $\{y\mid y<n\}$
② 지수함수 점근선의 방정식: $y=n$

34 정답 ③

정답률 94%

곡선 $y=2^x+5$의 점근선[1]과 곡선 $y=\log_3 x+3$의 교점의 x좌표는?

곡선 $y=2^x$을 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 곡선이야.

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

연관 개념 check

지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=a^{x-m}+n$

해결 흐름

[1] 먼저 곡선 $y=2^x+5$의 점근선을 구해 봐야겠네.

알찬 풀이

곡선 $y=2^x+5$는 곡선 $y=2^x$을 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 곡선 $y=2^x$의 점근선의 방정식은 $y=0$이므로 곡선 $y=2^x+5$의 점근선의 방정식은 $y=5$이다.

곡선을 평행이동하면 점근선도 똑같이 평행이동 돼.

따라서 직선 $y=5$와 곡선 $y=\log_3 x+3$의 교점의 x좌표는

$\log_3 x+3=5$

$\log_3 x=2$

$\therefore\ x=3^2=9$

로그의 정의

$a>0,\ a\neq1,\ N>0$일 때

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

문제 해결 TIP

김도진 | 중앙대 의예과 | 양서고등학교 졸업

지수함수나 로그함수의 그래프의 점근선과 관련된 문제를 해결할 때는 평행이동과 관련해서 생각해 볼 수 있어. 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면 지수함수 $y=a^x+k$의 그래프가 되고, 지수함수 $y=a^x$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=0$이라는 건 알고 있지? 그러니까 지수함수 $y=a^x+k$의 그래프의 점근선의 방정식도 $y=0$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 $y=k$가 됨을 직관적으로 알 수 있어.

마찬가지 방법으로 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면 $y=\log_a(x-k)$의 그래프가 되고, 이때의 점근선의 방정식도 x축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면 되니까 $x=k$가 됨을 알 수 있어.

35 정답 25

정답률 88%

곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선이 직선 $x=k$[1]이다. k^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) 25

곡선이 한없이 가까워지는 직선을 점근선이라고 해.

연관 개념 check

로그함수 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=\log_a(x-m)+n$

해결 흐름

[1] 곡선 $y=\log_2 x$의 점근선의 방정식을 구한 후, 곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선의 방정식을 구하면 되겠네.

알찬 풀이

곡선 $y=\log_2(x+5)$는 곡선 $y=\log_2 x$를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

도형의 이동이므로 $y=\log_2 x$에 x 대신 $x+5$를 대입해.

이때 곡선 $y=\log_2 x$의 점근선의 방정식은 $x=0$이므로

곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선의 방정식은 $x=-5$이다.

곡선을 평행이동하면 점근선도 똑같이 평행이동 돼. 직선 $x=-5$는 직선 $x=0$을 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이야.

따라서 $k=-5$이므로

$k^2=25$

생생 수험 Talk

나는 수험생일 때도 친구들과의 관계는 똑같았어. 수험생이라고 친구들과의 관계를 끊고 혼자 공부에 매진하는 것은 좋은 생각이 아닌 거 같거든. 길게 보았을 때 수능은 인생의 지나가는 경험이고 이러한 것을 위해 친구들과 서먹해지는 것은 안 좋다고 봐. 오히려 친구들과 어려운 수험 생활을 같이 하면서 어려움을 나누고 공부를 하면 더욱더 좋은 효과를 본다고 생각해. 친구들을 경쟁자라고 생각하지 말고 동반자라고 생각하면서 서로서로 도우면 좋은 결과가 나올 거야.

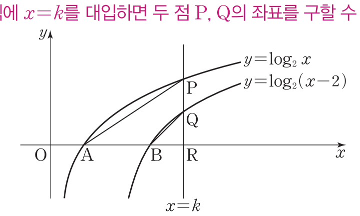
36 정답 ③

정답률 82%

함수의 식에 $y=0$을 대입하면 A, B의 좌표를 구할 수 있어.

그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $x=k(k>3)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 ABQP의 넓이는?

함수의 식에 $x=k$를 대입하면 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있어.



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

연관 개념 check

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

해결 흐름

1 사각형 ABQP의 넓이는 삼각형 ARP의 넓이에서 삼각형 BRQ의 넓이를 빼면 구할 수 있겠네.
2 삼각형 ARP와 삼각형 BRQ의 넓이를 구하려면 각 점의 좌표를 알아야겠다.
3 먼저 두 함수의 그래프가 x축과 만나는 점 A, B의 좌표를 각각 구해야겠다.
4 세 점 P, Q, R의 좌표는 모두 k로 나타내어지니까, 점 Q가 선분 PR의 중점임을 이용하면 k의 값을 구할 수 있겠다.

알찬 풀이

두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점이 각각 A, B이므로

$y=0$을 대입하면 $\log_2 x=0$에서 $x=2^0=1$이므로 $A(1, 0)$이야.

$y=0$을 대입하면 $\log_2(x-2)=0$에서 $x-2=1$이므로 $B(3, 0)$이야.

$A(1, 0)$, $B(3, 0)$

두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점이 각각 P, Q이므로

$P(k, \log_2 k)$, $Q(k, \log_2(k-2))$

이때 $R(k, 0)$이고 점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$\frac{\log_2 k}{2}=\log_2(k-2)$, $\log_2 k=2\log_2(k-2)$

좌표평면 위의 선분의 중점
두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB의 중점을 M이라 하면
$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$\therefore \log_2 k=\log_2(k-2)^2$

즉, $k=(k-2)^2$이므로

$a>0$, $a\neq1$일 때 $\log_a x=\log_a y \Longleftrightarrow x=y$임을 이용했어.

$k^2-5k+4=0$, $(k-1)(k-4)=0$ $\therefore k=1$ 또는 $k=4$

한편, $k>3$에서 $k=4$이므로

$P(4, 2)$, $Q(4, 1)$, $R(4, 0)$

따라서 사각형 ABQP의 넓이는 $\triangle ARP$의 넓이에서 $\triangle BRQ$의 넓이를 빼면 되므로

$\angle ARP=90°$이므로 $\overline{AR}$를 밑변으로 생각하면 높이는 $\overline{PR}$이야.

$\angle BRQ=90°$이므로 $\overline{BR}$를 밑변으로 생각하면 높이는 $\overline{QR}$이야.

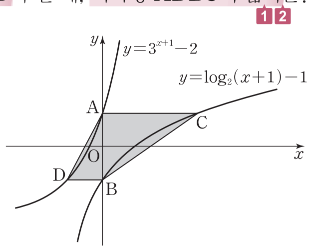
$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AR}\cdot\overline{PR}-\frac{1}{2}\cdot\overline{BR}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

37 정답 ⑤

정답률 88%

y축과 만나는 점은 x좌표가 0이야.

그림과 같이 두 곡선 $y=3^{x+1}-2$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x+1}-2$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이는?



① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

실전 적용 key

사각형의 넓이를 구할 때, 직사각형, 평행사변형, 마름모, 사다리꼴 등과 같이 공식을 적용하여 넓이를 구할 수 없는 경우 두 개의 삼각형으로 나누어 삼각형의 넓이의 합을 구한다.

해결 흐름

1 사각형 ADBC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이와 삼각형 ABC의 넓이의 합으로 구할 수 있겠네.
2 삼각형 ADB와 삼각형 ABC의 넓이를 구하려면 점의 좌표를 알아야겠다.
3 먼저 두 곡선이 y축과 만나는 점 A, B의 좌표를 각각 구해야겠다.
4 두 점 A, C와 두 점 B, D의 y좌표가 각각 같음을 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구하면 되겠군.

알찬 풀이

$x=0$을 대입해서 점의 좌표를 구해.

두 곡선 $y=3^{x+1}-2$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점이 각각 A, B이므로 $A(0, 1)$, $B(0, -1)$

점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로

직선 AC가 x축과 평행하므로 두 점 A, C의 y좌표는 같아.

$1=\log_2(x+1)-1$에서 $\log_2(x+1)=2$

즉, $x+1=2^2=4$이므로 $x=3$ $\therefore C(3, 1)$

또, 점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

직선 BD가 x축과 평행하므로 두 점 B, D의 y좌표는 같아.

$-1=3^{x+1}-2$에서 $3^{x+1}=1$

즉, $x+1=0$이므로 $x=-1$

$\therefore D(-1, -1)$

따라서 사각형 ADBC의 넓이는 $\triangle ADB$의 넓이와 $\triangle ABC$의 넓이를 더하면 되므로

$\overline{AC}\,/\!/\,\overline{DB}$이므로 사다리꼴의 넓이 공식을 이용해서 구할 수도 있어. 즉,
$\square ADBC=\frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{AB}$
$=\frac{1}{2}\times(3+1)\times2=4$

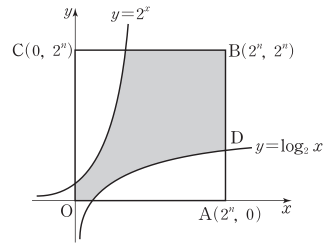
$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BD}+\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3$$
$$=1+3=4$$

38 정답 ⑤

정답률 92%

좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $O(0,\ 0)$, $A(2^n,\ 0)$, $B(2^n,\ 2^n)$, $C(0,\ 2^n)$인 정사각형 OABC와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(단, n은 자연수이다.)



선분 AD를 2 : 3으로 내분하는 점의 y좌표와 점 E의 y좌표가 같아.

선분 AB가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD를 2 : 3으로 내분하는 점을 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 E, 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 F라 하자. 점 F의 y좌표가 16일 때, 직선 DF의 기울기는?

① $-\frac{13}{28}$ ② $-\frac{25}{56}$ ③ $-\frac{3}{7}$

④ $-\frac{23}{56}$ ⑤ $-\frac{11}{28}$

연관 개념 check

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점을 P라 하면

$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

해결 흐름

1 직선 DF의 기울기를 구하려면 두 점 D, F의 좌표를 구해야겠네.

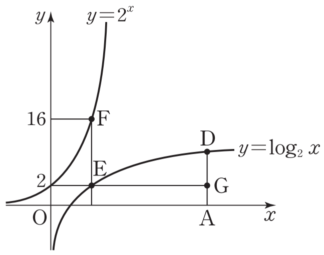
2 먼저 두 점 E, F를 그래프 위에 각각 나타내 봐야겠다.

3 점 F의 y좌표가 16이니까 이를 이용하면 두 점 F, E의 좌표를 차례로 구할 수 있겠네.

4 점 E의 좌표를 이용하면 점 D의 좌표를 구할 수 있겠다.

알찬 풀이

선분 AD를 2 : 3으로 내분하는 점을 G라 하고, 두 점 E, F를 그래프 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



점 F의 y좌표가 16이므로

$2^x=16$에서

$2^x=2^4 \quad \therefore x=4$ ← $a>0$, $a\neq1$일 때 $a^m=a^n \Longleftrightarrow m=n$임을 이용했어.

$\therefore F(4,\ 16)$

점 E의 x좌표는 4이므로

$y=\log_2 4=2$

$\therefore E(4,\ 2)$

한편, $A(2^n,\ 0)$, $D(2^n,\ n)$이므로 선분 AD를 2 : 3으로 내분하는 점 G의 좌표는

$G\left(\boxed{2^n},\ \boxed{\frac{2n}{5}}\right)$ ← $\frac{2\cdot2^n+3\cdot2^n}{2+3}=\frac{5\cdot2^n}{5}=2^n$, $\frac{2n+3\cdot0}{2+3}=\frac{2n}{5}$

점 E와 점 G의 y좌표가 같으므로

$\frac{2n}{5}=2 \quad \therefore n=5$

$\therefore D(32,\ 5)$ ← $n=5$를 $D(2^n,\ n)$에 대입해.

따라서 직선 DF의 기울기는

$\frac{16-5}{4-32}=-\frac{11}{28}$

> **직선의 기울기**
> 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{d-b}{c-a}$

39 정답 ②

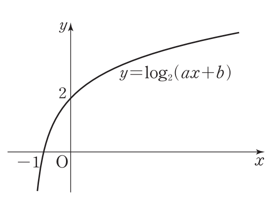
정답률 81%

곡선 $y=f(x)$가 점 $(m,\ n)$을 지나면 $n=f(m)$을 만족해.

곡선 $y=\log_2(ax+b)$가 점 $(-1,\ 0)$과 점 $(0,\ 2)$를 지날 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9

④ 11 ⑤ 13



연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

해결 흐름

1 두 점의 x좌표, y좌표를 각각 $y=\log_2(ax+b)$에 대입하면 a, b에 대한 식을 찾을 수 있겠네.

2 1에서 세운 두 식을 연립하여 a, b의 값을 구하면 되겠다.

알찬 풀이

$y=\log_2(ax+b)$에 $x=-1$, $y=0$을 대입해.

곡선 $y=\log_2(ax+b)$가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$\log_2(-a+b)=0$

$-a+b=2^0=1$ ← $\log_a x=b$이면 $x=a^b$임을 이용했네.

$\therefore a-b=-1$ …… ㉠

또, 곡선 $y=\log_2(ax+b)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$\log_2 b=2$ ← $y=\log_2(ax+b)$에 $x=0$, $y=2$를 대입해.

$\therefore b=2^2=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$a=3$

$\therefore a+b=3+4=7$

40 정답 ①

정답률 80%

→ x 대신 $-x$를 대입해야 해.

좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1, 4)$를 지난다. 양수 a의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

연관 개념 check

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를

(1) x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
➡ $y=a^{x-m}+n$ → x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입

(2) x축에 대하여 대칭이동
➡ $y=-a^x$ → y 대신 $-y$를 대입

(3) y축에 대하여 대칭이동
➡ $y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ → x 대신 $-x$를 대입

(4) 원점에 대하여 대칭이동
➡ $y=-a^{-x}=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$ → x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입

점의 평행이동
점 $P(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'은
$P'(x+a, y+b)$

해결 흐름

1 조건에 따라 대칭이동한 후 평행이동한 함수의 그래프의 식에 점 $(1, 4)$의 x좌표와 y좌표를 대입하면 a의 값을 구할 수 있겠다.

알찬 풀이

지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=a^{-x}$ → $y=a^x$에 x 대신 $-x$를 대입하고, y는 그대로 두면 돼.
다시 함수 $y=a^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 → 도형의 평행이동이므로 $y=a^{-x}$에 x 대신 $x-3$, y 대신 $y-2$를 대입하면 돼.
$y=a^{-(x-3)}+2$
이때 함수 $y=a^{-(x-3)}+2$의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나므로
$4=a^{-(1-3)}+2,\ a^2=2$ → $x=1$, $y=4$를 대입하면 함수의 식이 성립해야 해.
$\therefore a=\sqrt{2}$ $(\because a>0)$

다른 풀이

곡선 $y=a^x$ 위의 한 점 (p, q)를 y축에 대하여 대칭이동하면 $(-p, q)$
점 $(-p, q)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$(-p+3, q+2)$
이때 점 $(-p+3, q+2)$가 점 $(1, 4)$와 일치하려면
$-p+3=1,\ q+2=4$
$\therefore p=2,\ q=2$
따라서 점 $(2, 2)$가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로
$a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ $(\because a>0)$

41 정답 ②

정답률 69%

→ $y=1$을 대입하면 두 점 A, B의 x좌표를 구할 수 있어.

1보다 큰 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{-x-2}$과 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=8$일 때, a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

연관 개념 check

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

로그의 정의
$a>0,\ a\neq1,\ N>0$일 때
$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

해결 흐름

1 두 점 A, B의 y좌표가 모두 1임을 이용해서 두 점 A, B의 x좌표를 구할 수 있겠다.
2 $\overline{AB}=8$임을 이용해서 a의 값을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

점 A는 곡선 $y=a^{-x-2}$과 직선 $y=1$의 교점이므로
$1=a^{-x-2}$에서 $-x-2=0$ $\therefore x=-2$
$\therefore A(-2, 1)$ → $a\neq0$일 때 $a^0=1$이니까 $a^0=a^{-x-2}$, 즉 $0=-x-2$야.
또, 점 B는 곡선 $y=\log_a(x-2)$와 직선 $y=1$의 교점이므로
$1=\log_a(x-2)$에서 $a=x-2$ $\therefore x=a+2$
$\therefore B(a+2, 1)$
이때 두 점 A, B의 y좌표는 같고 $\overline{AB}=8$이므로
$|(a+2)-(-2)|=8$ → y좌표가 같으므로 두 점 A, B 사이의 거리는 두 점의 x좌표의 차와 같아.
$|a+4|=8,\ a+4=\pm8$
$\therefore a=4$ $(\because a>1)$

기출 유형 POINT

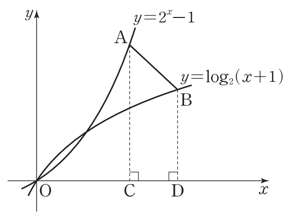
지수함수와 로그함수의 그래프
지수함수와 로그함수의 그래프와 그 그래프 위의 점의 좌표가 주어질 때
(1) 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프가 점 (α, β)를 지나면 $x=\alpha$, $y=\beta$를 대입하여 $a^\alpha=\beta$가 성립함을 이용한다.
(2) 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프가 점 (α, β)를 지나면 $x=\alpha$, $y=\beta$를 대입하여
$\beta=\log_a\alpha \Longleftrightarrow a^\beta=\alpha$
가 성립함을 이용한다.

42 정답 ①

정답률 가형 94%, 나형 82%

두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이야.

곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는?



① $\frac{5}{2}$　② $\frac{11}{4}$　③ 3　④ $\frac{13}{4}$　⑤ $\frac{7}{2}$

연관 개념 check

함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여
$f^{-1}(a)=b$이면 $a=f(b)$

해결 흐름

1 사각형 ACDB는 사다리꼴이니까 네 점 A, B, C, D의 좌표를 알면 사각형 ACDB의 넓이를 구할 수 있겠다.

2 점 A의 좌표를 알고, 두 함수 $y=2^x-1$, $y=\log_2(x+1)$은 서로 역함수 관계이니까 이를 이용해서 나머지 점들의 좌표도 구할 수 있겠다.

알찬 풀이

$y=2^x-1$에서 $2^x=y+1$
양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $x=\log_2(y+1)$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x+1)$

함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재할 때 역함수 $y=f^{-1}(x)$를 구하는 방법
① $y=f(x)$를 x에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
② x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

즉, 두 함수 $y=2^x-1$, $y=\log_2(x+1)$은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
이때 직선 AB와 직선 $y=x$는 서로 수직이므로 두 점 A(2, 3), B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 (a, b)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (b, a)야.

$\therefore$ B(3, 2)

점 A와 x좌표가 같고 y좌표는 0이야.

A(2, 3), B(3, 2)이므로
C(2, 0), D(3, 0)

점 B와 x좌표가 같고 y좌표는 0이야.

따라서 $\overline{AC}=3$, $\overline{BD}=2$, $\overline{CD}=1$이므로 사각형 ACDB의 넓이는

$\overline{AC}/\!/\overline{BD}$인 사다리꼴이야.

$$\frac{1}{2}\cdot(2+3)\cdot1=\frac{5}{2}$$

$\square ACDB=\frac{1}{2}\cdot(\overline{BD}+\overline{AC})\cdot\overline{CD}$

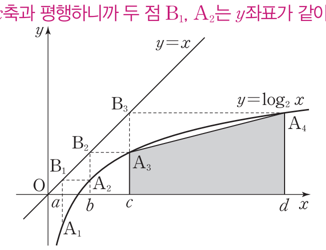
43 정답 ①

정답률 가형 68%, 나형 48%

$\overline{A_1B_1}$이 y축과 평행하니까 두 점 A_1, B_1은 x좌표가 같아.

그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 한 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2로부터 점 B_2와 점 A_3을, 점 A_3으로부터 점 B_3과 점 A_4를 얻는다. 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4의 x좌표를 차례로 a, b, c, d라 하자.
네 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$, $(d, \log_2 d)$, $(c, \log_2 c)$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x)=2^x$을 이용하여 a, b로 나타낸 것과 같은 것은?

$\overline{B_1A_2}$가 x축과 평행하니까 두 점 B_1, A_2는 y좌표가 같아.



① $\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$
② $\frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$
③ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$
④ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$
⑤ $\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

연관 개념 check

윗변의 길이가 a, 아랫변의 길이가 b, 높이가 h인 사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}(a+b)h$이다.

해결 흐름

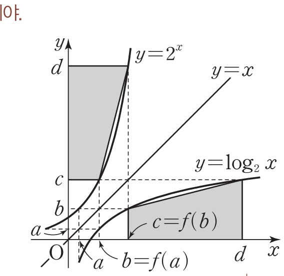
1 어두운 부분은 사다리꼴이니까 사다리꼴의 넓이 구하는 공식을 이용해야겠다.

2 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=2^x$은 서로 역함수이니까 어두운 부분의 넓이를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 나타낼 수 있겠네.

알찬 풀이

로그함수 $y=\log_a x$의 역함수는 지수함수 $y=a^x$이야.

함수 $y=\log_2 x$의 역함수는 함수 $y=2^x$이므로
오른쪽 그림에서 어두운 두 부분의 넓이는 같다.



이때 $f(x)=2^x$이므로
$f(a)=b$
$f(f(a))=f(b)=c$
$f(f(b))=f(c)=d$
따라서 구하는 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}(c+b)(d-c)=\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$$

주어진 그림을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 넓이가 같은 사각형을 얻을 수 있어.

문제 해결 TIP

김경민 | 이화여대 화학생명분자과학부 | 양서고등학교 졸업

지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하는 대표적인 유형의 문제야. 하지만 함수 $f(x)$를 이용해서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 것이 아마 낯설게 느껴졌을 거야. 그렇다고 당황할 필요는 없어. 그동안 풀었던 동일 유형의 문제들과 같이 먼저 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y=2^x$의 그래프를 그림으로 나타내 봐.

44 정답 ③

정답률 가형 75%, 나형 56%

두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=20$이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

→ $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계인지 알아봐야 해.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

연관 개념 check

함수 $y=f(x)$의 역함수를 구하는 방법은 다음과 같다.

① $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

② x에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

③ x, y를 서로 바꾸면 $y=f^{-1}(x)$가 구하는 역함수이다.

해결 흐름

1 $f(x)$의 역함수를 구해서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계인지 확인해 본 다음에 보기의 참, 거짓을 판별해야겠다.

알찬 풀이

→ 지수함수는 일대일대응이므로 항상 역함수가 존재해.

$y=2^{x-2}+1$이라 하면 $2^{x-2}=y-1$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$x-2=\log_2(y-1)$ $\quad\therefore x=\log_2(y-1)+2$

로그의 정의
$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때
$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x-1)+2$

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이다.

ㄱ. $f^{-1}(x)=g(x)$이므로

$f^{-1}(5)=g(5)=\log_2(5-1)+2=\log_2 4+2=4$

→ $\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2$

$\therefore f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=g(5)\cdot\{g(5)+1\}=4\cdot(4+1)=20$ (참)

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $2^{x-2}+1=x$에서 $2^{x-2}=x-1$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=3$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 두 점 $(2, 2)$, $(3, 3)$에서 만나므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프도 두 점 $(2, 2)$, $(3, 3)$에서 만난다. (거짓)

→ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 함수 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프의 교점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

45 정답 ③

정답률 50%

→ 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용해.

지수함수 $f(x)=a^{x-m}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 1과 3일 때, $a+m$의 값은?

① $2-\sqrt{3}$ ② 2 ③ $1+\sqrt{3}$ ④ 3 ⑤ $2+\sqrt{3}$

연관 개념 check

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이다.

실전 적용 key

함수의 그래프와 그 역함수의 그래프가 주어지면 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알고, 그래프의 성질을 이용하여 교점의 좌표를 구해야 한다.

해결 흐름

1 지수함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 지수함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같겠네.

2 교점의 x좌표가 주어졌으니까 교점의 좌표를 이용해서 a, m의 값을 구하면 되겠다.

알찬 풀이

지수함수 $f(x)=a^{x-m}$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같고, 두 교점의 x좌표가 1, 3이므로 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(3, 3)$

→ 두 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 x좌표와 y좌표가 같아.

$f(1)=1$에서 $a^{1-m}=1$, $1-m=0$ $\quad\therefore m=1$

→ $a\neq0$일 때 $a^0=1$이니까 $a^{1-m}=a^0$, 즉 $1-m=0$이야.

$f(3)=3$에서 $a^{3-m}=3$

이때 $m=1$이므로 $a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$) → a는 지수함수의 밑이므로 양수이어야 해.

$\therefore a+m=1+\sqrt{3}$

기출 유형 POINT

지수함수와 로그함수의 역함수 관계 이용하기

$a>0$, $a\neq1$일 때, 서로 역함수 관계인 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(2) 점 (α, β)가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 점 (β, α)는 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이다.

즉, $a^\alpha=\beta \Longleftrightarrow \log_a\beta=\alpha$

46 정답 ②

정답률 96%

닫힌구간 [1, 3]에서 함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 최댓값은?

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

밑이 1보다 작은 지수함수의 그래프의 개형을 떠올려 봐.

해결 흐름

1 함수 $f(x)$는 밑이 1보다 작으므로 감소하는 함수이네.

2 닫힌구간 [1, 3]에서 함수 $f(x)$가 최댓값을 갖는 x의 값을 찾아봐야겠다.

알찬 풀이

함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 밑이 1보다 작으므로 감소하는 함수이다.

따라서 닫힌구간 [1, 3]에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값

$f(1)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=1+1=2$

함수 $f(x)$는 감소하는 함수이므로 x의 값이 최소일 때 함숫값이 최대가 돼.

를 갖는다.

연관 개념 check

구간 $[m, n]$에서 정의된 지수함수 $y=a^x$은

① $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 a^m, $x=n$일 때 최댓값 a^n을 갖는다.

② $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 a^m, $x=n$일 때 최솟값 a^n을 갖는다.

47 정답 ⑤

정답률 94%

함수 $f(x)$는 $0<(\text{밑})<1$이므로 감소하는 함수야.

$0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^x$은 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 최솟값 $\frac{5}{6}$, 최댓값 M을 갖는다. $a\times M$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

해결 흐름

1 함수 $f(x)$의 최솟값을 이용하면 a의 값을 구할 수 있겠네.

2 $0<a<1$이니까 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값을 갖겠네.

알찬 풀이

함수 $f(x)=a^x$은 $0<a<1$이므로 감소하는 함수이다.

따라서 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $f(1)$을 가지므로

$a=\frac{5}{6}$

$\therefore f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $f(-2)$를 가지므로

$M=f(-2)=\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{6}{5}\right)^2$

$f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$에 $x=-2$를 대입한 거야.

$\therefore a\times M=\frac{5}{6}\times\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{6}{5}$

$\frac{5}{6}$와 $\frac{6}{5}$은 서로 역수 관계야.

연관 개념 check

구간 $[m, n]$에서 정의된 지수함수 $y=a^x$은

① $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 a^m, $x=n$일 때 최댓값 a^n을 갖는다.

② $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 a^m, $x=n$일 때 최솟값 a^n을 갖는다.

48 정답 32

정답률 90%

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 두 함수

$f(x)=2^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

의 최댓값을 각각 a, b라 하자. ab의 값을 구하시오. 32

지수함수 $y=a^x$은 $a>1$일 때 증가하는 함수, $0<a<1$일 때 감소하는 함수야.

해결 흐름

1 함수 $f(x)$는 밑이 1보다 크고, 함수 $g(x)$는 밑이 1보다 작으므로 각각 증가하는 함수, 감소하는 함수이네.

2 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 두 함수가 최댓값을 갖는 x의 값을 각각 찾아서 함수의 식에 대입하면 a, b의 값을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

함수 $f(x)=2^x$은 밑이 1보다 크므로 증가하는 함수이고,

함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$은 밑이 1보다 작으므로 감소하는 함수이다.

따라서 닫힌구간 $[-1, 3]$에서

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $f(3)=2^3=8$을 갖고,

함수 $f(x)$가 증가하는 함수이므로 x의 값이 최대일 때 함숫값도 최대야.

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $g(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$를 갖는다.

$\therefore ab=8\cdot4=32$

함수 $g(x)$는 감소하는 함수이므로 x의 값이 최소일 때 함숫값이 최대가 돼.

연관 개념 check

구간 $[m, n]$에서 정의된 지수함수 $y=a^x$은

① $a>1$이면 $x=m$일 때 최솟값 a^m, $x=n$일 때 최댓값 a^n을 갖는다.

② $0<a<1$이면 $x=m$일 때 최댓값 a^m, $x=n$일 때 최솟값 a^n을 갖는다.

수능 핵심 개념

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

49 정답 ③ 정답률 78%

함수 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

x에 대한 이차식이고, 이차항의 계수가 양수이므로 최솟값을 갖지.

연관 개념 check

정의역이 $\{x \mid m \le x \le n\}$인 로그함수 $g(x)=\log_a f(x)$ $(a>0,\ a\ne1)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 주어진 정의역에서 $f(x)$의 최댓값 α, 최솟값 β를 구한다.
② $a>1$이면 $g(x)$의 최댓값은 $\log_a\alpha$, 최솟값은 $\log_a\beta$이고, $0<a<1$이면 $g(x)$의 최댓값은 $\log_a\beta$, 최솟값은 $\log_a\alpha$이다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값
(1) $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
(2) $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

해결 흐름

1 $\log_3(x^2-4x+31)$의 밑이 1보다 크므로 $x^2-4x+31$이 최소일 때 주어진 함수도 최솟값을 갖겠네.
2 $x^2-4x+31$의 최솟값 m을 구한 다음, $3+\log_3 m$의 값을 구하면 되겠다.

알찬 풀이

함수 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)$에서 밑이 1보다 크므로 $x^2-4x+31$이 최소일 때 주어진 함수도 최솟값을 갖는다.

$f(x)=x^2-4x+31$로 놓으면
$f(x)=(x-2)^2+27$

x에 대한 이차식이고, 이차항의 계수가 양수이므로 $(x-p)^2+q$ 꼴로 바꾸면 최솟값을 구할 수 있어.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 27을 가지므로 구하는 최솟값은
$3+\log_3 27=3+3=6$

$\log_3 27=\log_3 3^3=3\log_3 3=3$

문제 해결 TIP

조성욱 | 연세대 치의예과 | 서라벌고등학교 졸업

이 문제는 로그함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제야. 로그의 밑이 3이므로 진수 $x^2-4x+31$이 최솟값을 가질 때 주어진 함수도 최솟값을 갖는다는 것을 알아채야 해. 지수함수와 로그함수의 그래프는 모두 밑의 범위에 따라 증가하는 함수이거나 감소하는 함수이니까 어떤 x의 값에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는지를 먼저 알아내고, 이 x의 값을 함수의 식에 대입하여 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있어야 해.

50 정답 4 정답률 84%

방정식 $3^{-x+2}=\frac{1}{9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. 4

양변의 밑을 통일해 봐.

연관 개념 check

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$ (단, $a>0,\ a\ne1$)

해결 흐름

1 주어진 방정식의 양변의 밑을 모두 3으로 같게 만들면 x의 값을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

$\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}=3^{-2}$

$3^{-x+2}=\frac{1}{9}$에서 $3^{-x+2}=3^{-2}$ 양변의 밑을 3으로 통일해.

따라서 $-x+2=-2$이므로
$-x=-4 \qquad \therefore x=4$

51 정답 ② 정답률 90%

방정식 $2^x+2^{5-x}=33$의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

양변에 2^x을 곱해 봐.

실전 적용 key

지수에 미지수를 포함한 방정식에서 a^x 꼴이 반복되는 경우, $a^x=t$ $(t>0)$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

해결 흐름

1 주어진 방정식의 양변에 2^x을 곱하여 정리하면 $2^x=t\,(t>0)$로 치환할 수 있겠다.
2 1에서 정리한 방정식은 t에 대한 이차방정식이니까 t의 값을 구할 수 있겠네.
3 $t=2^x$이니까 t 대신 2^x으로 놓고 실근을 구해야겠다.

알찬 풀이

$2^x+2^{5-x}=33$의 양변에 2^x을 곱하면
$(2^x)^2+2^5=33\cdot2^x \qquad \therefore (2^x)^2-33\cdot2^x+32=0$
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-33t+32=0$
$(t-1)(t-32)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=32$

만약 0 이하인 근이 나왔다면 제외해야 해. $2^x=t$로 놓았으니까 $t>0$이어야 하기 때문이야.

즉, $2^x=1$ 또는 $2^x=32$이므로
$2^x=1=2^0$에서 $x=0$
$2^x=32=2^5$에서 $x=5$

$a>0,\ a\ne1$일 때, $a^x=a^y \Longleftrightarrow x=y$임을 이용했어.

따라서 모든 실근의 합은
$0+5=5$

52 정답 10

정답률 83%

방정식 $(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. 10

두 실수 A, B에 대하여 $AB=0 \Longleftrightarrow A=0$ 또는 $B=0$임을 이용해.

연관 개념 check

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

$2^x=8$에서 밑을 통일하려면 8을 2의 거듭제곱으로 나타내야 해.

$3^{2x}=9$에서 밑을 통일하려면 9를 3의 거듭제곱으로 나타내야 해.

실전 적용 key

두 실수 A, B에 대하여

$AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$

임을 기억하고 있어야 문제 해결이 가능하다.

즉, 곱으로 나타내어진 좌변의 식에서 2^x-8, $3^{2x}-9$가 0이 되는 x의 값을 구하면 된다.

해결 흐름

1 $AB=0 \Longleftrightarrow A=0$ 또는 $B=0$이니까 두 실근 α, β는 각각 $2^x-8=0$, $3^{2x}-9=0$의 실근이겠다.

2 $2^x-8=0$과 $3^{2x}-9=0$을 풀면 $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있겠다.

알찬 풀이

$2^x-8=0$ 또는 $3^{2x}-9=0$이므로 $2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$야.

$(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$에서

$2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$

$2^x=8=2^3$에서 $x=3$

$3^{2x}=9=3^2$에서 $x=1$

$3^{2x}=3^2$에서 $2x=2$이므로 $x=1$이야.

따라서 두 실근은 $x=3$ 또는 $x=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=3^2+1^2=10$

$\alpha=3$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로 $\alpha^2+\beta^2=10$이야.

기출 유형 POINT

지수함수의 활용 – 방정식

(1) 밑을 같게 할 수 있는 경우

주어진 방정식을 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 꼴로 변형한 후

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$ $(a>0,\ a\neq1)$

를 이용한다.

(2) a^x 꼴이 반복되는 경우

$a^x=t$ $(t>0)$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

(3) 지수가 같은 경우

밑이 같거나 지수가 0임을 이용한다.

$a^{f(x)}=b^{f(x)} \Longleftrightarrow a=b$ 또는 $f(x)=0$ (단, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$)

53 정답 ④

정답률 89%

부등식 $\dfrac{27}{9^x}\geq3^{x-9}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

양변의 밑을 통일해 봐.

연관 개념 check

$a^{f(x)}\geq a^{g(x)}$에서

① $a>1$이면 $f(x)\geq g(x)$ → 부등호의 방향이 그대로야!

② $0<a<1$이면 $f(x)\leq g(x)$ → 부등호의 방향이 달라져!

실전 적용 key

$9^x>0$이므로 양변에 9^x을 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않음을 이용하여 다른 풀이 에서와 같이 양변에 9^x을 곱해서 풀 수도 있다.

해결 흐름

1 주어진 부등식의 양변을 밑이 3인 지수로 만들어야겠네.

2 부등식에서 x의 값의 범위를 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

$\dfrac{27}{9^x}=\dfrac{3^3}{3^{2x}}=3^{3-2x}$이므로 주어진 부등식은

$3^{3-2x}\geq3^{x-9}$

밑이 1보다 크므로 $3-2x\geq x-9$

밑이 3이고, $3>1$이므로 부등호의 방향은 바뀌지 않아.

$12\geq3x$

$\therefore x\leq4$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

다른 풀이

$\dfrac{27}{9^x}\geq3^{x-9}$의 양변에 9^x을 곱하면

$27\geq3^{x-9}\times9^x$에서 $3^3\geq3^{3x-9}$

$3^{x-9}\times9^x=3^{x-9}\times3^{2x}=3^{x-9+2x}=3^{3x-9}$

밑이 1보다 크므로

$3\geq3x-9$

$12\geq3x$ $\therefore x\leq4$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

54 정답 ③ 정답률 87%

부등식 $(3^x-5)(3^x-100)<0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

↳ $3^x=t$로 놓으면 $(t-5)(t-100)<0$이므로 t에 대한 이차부등식이야.

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

연관 개념 check

$a<b$일 때
① $(x-a)(x-b)<0 \Longleftrightarrow a<x<b$
② $(x-a)(x-b)>0 \Longleftrightarrow x<a$ 또는 $x>b$

실전 적용 key

t에 대한 이차부등식의 해가 $\alpha<t<\beta$이고 $3^x=t$이면 $\alpha<3^x<\beta$가 성립한다. 이때 부등식의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면 $\log_3\alpha<x<\log_3\beta$이므로 이를 이용해서 x의 값의 범위를 구할 수도 있다.

해결 흐름

1 $3^x=t$로 치환하면 t에 대한 이차부등식이니까 t의 값의 범위를 구할 수 있겠다.
2 $t=3^x$이니까 t 대신 3^x으로 놓고 자연수 x를 구하면 되겠군.

알찬 풀이

치환하면 범위에 주의해야 해. $a^x>0$이므로 $t>0$이야.

$(3^x-5)(3^x-100)<0$에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$(t-5)(t-100)<0$
$\therefore 5<t<100$
$\therefore 5<3^x<100$
이때 x는 자연수이고,
$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243$
이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 2, 3, 4이다.

$3^1<5<3^2\le3^x\le3^4<100<3^5$에서 $3^2\le3^x\le3^4$, 즉 $2\le x\le4$야.

따라서 구하는 합은
$2+3+4=9$

기출 유형 POINT

지수함수의 활용 – 부등식

$a>0,\ a\ne1$일 때, 부등식 $pa^{2x}+qa^x+r<0$은 다음과 같은 순서로 푼다. (단, p, q, r는 상수이다.)
① $a^x=t\ (t>0)$로 치환한다. ➡ $pt^2+qt+r<0$
② $t>0$에서 부등식 ①의 해를 구한다.
③ ②에서 구한 해에 t 대신 a^x을 대입하여 x의 값의 범위를 구한다.

55 정답 1 정답률 94%

방정식

$2\log_4(5x+1)=1$

의 실근을 α라 할 때, $\log_5\frac{1}{\alpha}$의 값을 구하시오. 1

연관 개념 check

$\log_a f(x)=b \Longleftrightarrow f(x)=a^b$
(단, $a>0,\ a\ne1,\ f(x)>0$)

수능 핵심 개념 로그의 성질

$a>0,\ a\ne1,\ M>0,\ N>0$일 때
① $\log_a1=0,\ \log_aa=1$
② $\log_aMN=\log_aM+\log_aN$
③ $\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$
④ $\log_aM^k=k\log_aM$ (단, k는 실수)

해결 흐름

1 먼저 진수의 조건을 이용해서 x의 값의 범위를 구해 봐야겠다.
2 로그의 정의를 이용해서 x의 값을 구할 수 있겠네.
3 2에서 구한 근 α를 $\log_5\frac{1}{\alpha}$에 대입하면 되겠다.

알찬 풀이

로그의 진수는 양수이어야 해.

진수의 조건에 의하여
$5x+1>0$
$\therefore x>-\frac{1}{5}$ ...... ㉠
$2\log_4(5x+1)=1$에서
$\log_2(5x+1)=1$
$5x+1=2$
$\therefore x=\frac{1}{5}$

로그의 성질
$a>0,\ a\ne1,\ b>0$일 때
$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_ab$
(단, m, n은 실수, $m\ne0$)

이때 $x=\frac{1}{5}$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 실근이다.

$\frac{1}{5}>-\frac{1}{5}$이므로 진수의 조건을 만족해.

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$이므로
$\log_5\frac{1}{\alpha}=\log_5\frac{1}{\frac{1}{5}}$
$=\log_55=1$

$\log_aa=1$이야.

56 정답 ②

정답률 96%

방정식 $\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은?

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

$\log_a x+\log_a y=\log_a xy$를 이용해서 좌변을 정리해.

연관 개념 check

$\log_a x+\log_a y=\log_a xy$ (단, $a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$)

오답 clear

구한 해가 진수의 조건 (진수)>0과 밑의 조건 (밑)>0, (밑)$\neq1$을 모두 만족시키는지 확인해야 한다.

해결 흐름

1 먼저 진수의 조건을 이용해서 x의 값의 범위를 구해 봐야겠다.
2 로그의 성질을 이용해서 좌변을 간단히 하면 x의 값을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

진수의 조건에 의하여 — 로그의 밑은 1이 아닌 양수이고 로그의 진수는 양수이어야 함에 주의하자.

$4+x>0$, $4-x>0$

$\therefore -4<x<4$ …… ㉠

$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$에서

$\log_2(4+x)(4-x)=3$

$(4+x)(4-x)=2^3$

$16-x^2=8$

$x^2=8$

$\therefore x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

이때 $x=-2\sqrt{2}$, $x=2\sqrt{2}$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은

$2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=-8$

$1<\sqrt{2}<2$에서 $-4<-2\sqrt{2}<-2$, $2<2\sqrt{2}<4$이므로 진수의 조건을 만족시키지.

문제 해결 TIP

최윤서 | 고려대 생명공학과 | 연수고등학교 졸업

로그방정식이나 로그부등식 문제는 사실 어려운 유형에 속하지는 않아. 하지만 계산 실수를 하거나 아예 문제 풀이에 접근을 못하는 친구들이 있더라고. 아무래도 방정식의 꼴에 따라 풀이 방법이 달라져서 그런게 아닌가 싶어. 이 문제는 먼저 좌변을 로그의 성질을 이용해서 변형하고 우변을 좌변과 같이 밑이 2인 로그로 바꿔줘야만 답을 구할 수 있었어. 단순한 문제 같지만 문제를 보고 풀이 과정을 떠올리지 못한다면 아예 문제를 해결할 수 없었을 거야. 지수방정식, 지수부등식, 로그방정식, 로그부등식 유형은 적잖게 출제되고 있으니까 반드시 그 풀이 과정을 숙지하고 있는게 좋아.

57 정답 14

정답률 93%

방정식 $\log_8 x-\log_8(x-7)=\frac{1}{3}$의 해를 구하시오. 14

로그의 성질 $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$를 이용해서 좌변을 정리해.

연관 개념 check

$\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$ (단, $a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$)

해결 흐름

1 먼저 진수의 조건을 이용해서 x의 값의 범위를 구해 봐야겠다.
2 로그의 성질을 이용해서 좌변을 간단히 하면 x의 값을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

로그의 진수는 양수이어야 해.

진수의 조건에 의하여 $x>0$, $x-7>0$ $\quad\therefore x>7$ …… ㉠

$\log_8 x-\log_8(x-7)=\frac{1}{3}$에서

$\log_8\frac{x}{x-7}=\frac{1}{3}$

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N \iff \log_a N=x$임을 이용해.

$\frac{x}{x-7}=8^{\frac{1}{3}}=2$

$8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

양변에 $x-7$을 곱하면 $x=2x-14$ $\quad\therefore x=14$

이때 $x=14$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

$14>7$이므로 진수의 조건을 만족시키지.

문제 해결 TIP

강준호 | 서울대 조선해양공학과 | 양서고등학교 졸업

아주 간단한 로그방정식이지. 모의고사에서 로그방정식의 범위를 생각하지 않아서 틀린 기억이 있어서인지, 로그의 진수의 범위를 먼저 적어 놓고 문제를 풀었어. 이렇게 간단한 문제일 경우 항상 맞을 것 같지만, 수능은 사소한 버릇이 무서운 결과를 낳는 시험이야.
늘 제대로 공부하는 습관을 들이길 바라.

58 정답 27
정답률 84%

방정식 $(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. **27**

→ $\log_3\sqrt{x}$를 $\log_3 x$에 대한 식으로 변형해.

해결 흐름

1 $\log_3 x=t$로 치환하면 t에 대한 이차방정식이니까 t의 값을 구할 수 있겠다.

2 $t=\log_3 x$이니까 t 대신 $\log_3 x$로 놓고 실근을 구하면 되겠군.

알찬 풀이

$(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$에서 → $6\log_3\sqrt{x}=6\log_3 x^{\frac{1}{2}}=6\cdot\frac{1}{2}\log_3 x=3\log_3 x$

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$ → $\log_3 x=t$로 치환한 방정식의 근임에 주의해.

즉, $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$\log_3 x=1$에서 $x=3^1=3$

$\log_3 x=2$에서 $x=3^2=9$

따라서 서로 다른 두 실근 α, β의 곱은 $\alpha\beta=3\cdot9=27$

다른 풀이

$(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-3t+2=0$ ...... ㉠

→ x에 대한 방정식 $p(\log_a x)^2+q\log_a x+r=0$의 두 근이 α, β이면 t에 대한 방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근은 $\log_a\alpha$, $\log_a\beta$야.

이때 주어진 방정식의 두 실근이 α, β이므로 ㉠의 두 실근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=3$

$\log_3\alpha\beta=3$ $\quad\therefore \alpha\beta=3^3=27$

실전 적용 key

$\log_a x$가 반복되는 방정식은 $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다. 이때 지수에 미지수를 포함한 방정식에서 a^x을 치환하는 경우는 $a^x>0$이므로 t의 값의 범위에 주의해야 하지만 $\log_a x=t$로 치환하는 경우는 $\log_a x$의 값이 임의의 실수이므로 t의 값의 범위가 특별히 제한되지 않는다.

오답 clear

두 근 α, β의 곱을 $t^2-3t+2=0$에서 $\alpha\beta=2$로 답하지 않도록 주의해야 한다.

수능 핵심 개념 이차방정식의 근과 계수의 관계

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

기출 유형 POINT

로그함수의 활용 – 방정식

(1) $\log_a f(x)=b$ 꼴인 경우

$\log_a f(x)=b \Longleftrightarrow f(x)=a^b$ $(a>0,\ a\neq1,\ f(x)>0)$

을 이용한다.

(2) 밑을 같게 할 수 있는 경우

주어진 방정식을 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 꼴로 변형한 후

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$ $(a>0,\ a\neq1,\ f(x)>0,\ g(x)>0)$

를 이용한다.

(3) $\log_a f(x)$ 꼴이 반복되는 경우 $\log_a f(x)=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

(4) 진수가 같은 경우 밑이 같거나 진수가 1임을 이용한다.

(5) 지수에 로그가 있는 경우 양변에 로그를 취하여 푼다.

59 정답 19
정답률 87%

방정식 $\log_3(x-11)=3\log_3 2$를 만족시키는 x의 값을 구하시오. **19**

→ 양변을 비교하려면 우변을 $\log_3 2^3$으로 나타내야 해.

해결 흐름

1 먼저 진수의 조건을 이용해서 x의 값의 범위를 구해 봐야겠다.

2 양변의 밑이 같으니까 진수만 비교하면 x의 값을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

→ 로그의 진수는 양수이어야 해.

진수의 조건에 의하여

$x-11>0 \quad \therefore x>11$ ...... ㉠

$\log_3(x-11)=3\log_3 2$에서

$\log_3(x-11)=\log_3 2^3$

→ $a>0$, $a\neq1$, $M>0$일 때 $k\log_a M=\log_a M^k$(k는 실수)임을 이용해.

$\therefore \log_3(x-11)=\log_3 8$

따라서 $x-11=8$이므로 $x=19$이고 이는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

→ $19>11$이므로 진수의 조건을 만족시키지.

연관 개념 check

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$

(단, $a>0$, $a\neq1$, $f(x)>0$, $g(x)>0$)

60 정답 15

정답률 56%

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식

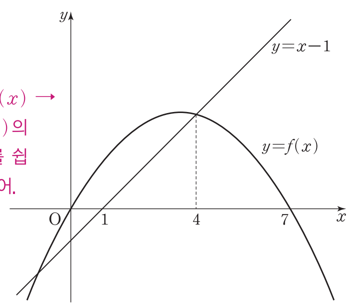
1 2 3

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$ → 로그의 밑을 통일해 봐.

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. 15

(단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$)

그림에서 $f(x)$와 $(x-1)$의 대소 관계를 쉽게 알 수 있어.



연관 개념 check

$\log_a f(x)<\log_a g(x)$에서

① $a>1$이면 $0<f(x)<g(x)$

② $0<a<1$이면 $0<g(x)<f(x)$

해결 흐름

1 주어진 부등식의 좌변을 밑이 3인 로그로 변형해야겠네.

2 진수의 조건과 주어진 그림을 이용해서 x의 값의 범위를 구해야겠다.

3 2에서 구한 x의 값의 범위를 이용해서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값을 구할 수 있겠네.

알찬 풀이

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=-\log_3(x-1)$이므로 주어진 부등식은

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le 0$ → $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=\log_{3^{-1}}(x-1)=-\log_3(x-1)$

진수의 조건에 의하여 $f(x)>0$, $x-1>0$이므로

주어진 그림에서 $1<x<7$ ⋯⋯ ㉠

→ 그림에서 $x>1$이고, 곡선 $y=f(x)$가 x축보다 위쪽에 있는 범위를 생각해.

또, $\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le 0$에서

$\log_3 f(x)\le\log_3(x-1)$

밑이 1보다 크므로 $0<f(x)\le x-1$

즉, 주어진 그림에서 $4\le x<7$ ⋯⋯ ㉡

→ 그림에서 곡선 $y=f(x)$가 x축보다 위쪽에 있으면서 직선 $y=x-1$보다 아래쪽에 있는 범위를 생각해.

㉠, ㉡에서 $4\le x<7$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는

4, 5, 6

이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$

61 정답 ②

정답률 77%

부등식 → 양변을 정리해서 $\log_a f(x)\le\log_a b$의 꼴로 나타내야 해.

1 2

$2\log_2|x-1|\le 1-\log_2\frac{1}{2}$

3

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

연관 개념 check

(1) 로그는 (밑)>0, (밑)$\ne1$, (진수)>0일 때만 정의된다.

(2) $\log_a f(x)<\log_a g(x)$에서

① $a>1$이면 $0<f(x)<g(x)$

② $0<a<1$이면 $0<g(x)<f(x)$

수능 핵심 개념 절댓값 기호를 포함한 일차부등식의 풀이

$a<b$인 양수 a, b에 대하여

① $|x-a|<a \iff -a<x-a<a$

$\iff -a+a<x<a+a$

② $|x-a|>a \iff x-a<-a$ 또는 $x-a>a$

$\iff x<-a+a$ 또는 $x>a+a$

③ $a<|x-a|<b$

$\iff a<x-a<b$ 또는 $-b<x-a<-a$

$\iff a+a<x<b+a$ 또는 $-b+a<x<-a+a$

해결 흐름

1 먼저 진수의 조건을 이용해서 x의 값의 범위를 구해 봐야겠다.

2 로그의 성질을 이용해서 주어진 부등식의 좌변과 우변을 간단히 하여 진수를 비교하면 x의 값의 범위를 구할 수 있겠네.

3 1, 2에서 구한 x의 값의 범위를 모두 만족시키는 정수 x의 개수를 구하면 되겠네.

알찬 풀이

진수의 조건에 의하여 $|x-1|>0$ $\quad\therefore x\ne1$ ⋯⋯ ㉠

$2\log_2|x-1|\le 1-\log_2\frac{1}{2}$에서

$2\log_2|x-1|\le 1-\log_2 2^{-1}$

$2\log_2|x-1|\le 1-(-1)$ → $\log_a a=1$임을 이용해.

$2\log_2|x-1|\le 2$

$\log_2|x-1|\le 1$

$\log_2|x-1|\le\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $|x-1|\le 2$ → 밑이 2이고 $2>1$이므로 부등호의 방향은 그대로야.

$-2\le x-1\le 2$ $\quad\therefore -1\le x\le 3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 2, 3의 4개이다.

→ ㉠에 의하여 $x\ne1$이므로 1은 제외해야 해.

문제 해결 TIP

김혁진 | 서울대 재료공학과 | 계성고등학교 졸업

로그부등식에서는 진수 조건을 반드시 확인하고 답을 구하는 것이 중요하다는 건 아마 다들 잘 알고 있을 거야. 보통 진수가 $x-1$, $x+1$ 등 일차식으로 나오는데 이 문제의 경우 $|x-1|$로 절댓값 기호를 포함하고 있어 다소 낯설게 느껴졌을지도 몰라. 하지만 진수는 양수여야 한다는 사실만 분명히 기억하고 있었다면 진수 조건은 $x\ne1$임을 정확히 구할 수 있었을 거야.

62 정답 ③ 정답률 77%

부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

로그의 성질을 이용해서 좌변을 정리해 봐.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

연관 개념 check

로그는 (밑)>0, (밑)$\ne 1$, (진수)>0일 때만 정의된다.

오답 clear

밑의 값의 범위에 따라 부등호의 방향이 바뀜에 주의하고, 구한 해가 진수의 조건을 만족시키는지 꼭 확인해야 한다.

수능 핵심 개념 로그의 성질

$a>0$, $a\ne1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$
② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

해결 흐름

1 먼저 진수의 조건을 이용해서 x의 값의 범위를 구해 봐야겠다.
2 로그의 성질을 이용해서 주어진 부등식의 좌변을 간단히 하고, 우변은 밑이 3인 로그로 변형해서 진수를 비교하면 x의 값의 범위를 구할 수 있겠네.
3 1, 2에서 구한 x의 값의 범위를 모두 만족시키는 정수 x의 개수를 구하면 되겠네.

알찬 풀이

로그의 진수는 양수이어야 해.

진수의 조건에 의하여
$x-1>0$, $4x-7>0$
즉, $x>1$, $x>\frac{7}{4}$이므로 $x>\frac{7}{4}$ …… ㉠

$3=3\log_3 3=\log_3 3^3=\log_3 27$

$\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$에서
$\log_3(x-1)(4x-7)\le\log_3 27$
밑이 1보다 크므로 $(x-1)(4x-7)\le 27$

밑이 3이고 $3>1$이므로 부등호의 방향은 그대로야.

$4x^2-11x-20\le 0$
$(4x+5)(x-4)\le 0$
$\therefore -\frac{5}{4}\le x\le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{7}{4}<x\le 4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4의 3개이다.

63 정답 ① 정답률 80%

x에 대한 부등식

양변의 밑이 모두 5이므로 진수의 대소를 비교하면 돼.

$$\log_5(x-1)\le\log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 3일 때, 자연수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

연관 개념 check

$\log_a f(x)<\log_a g(x)$에서
① $a>1$이면 $0<f(x)<g(x)$
② $0<a<1$이면 $0<g(x)<f(x)$

m, n이 정수일 때, 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는
(1) $m\le x\le n$이면 $(n-m+1)$개
(2) $m\le x<n$이면 $(n-m)$개
(3) $m<x\le n$이면 $(n-m)$개
(4) $m<x<n$이면 $(n-m-1)$개

해결 흐름

1 먼저 진수의 조건을 이용해서 x의 값의 범위를 구해 봐야겠다.
2 양변의 밑이 같고 1보다 크니까 진수를 비교하면 x의 값의 범위를 구할 수 있겠네.
3 x의 값의 범위를 구하여 이를 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 k의 값을 구하면 되겠네.

알찬 풀이

로그의 진수는 양수이어야 해.

진수의 조건에 의하여 $x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$
$\therefore x>1$ …… ㉠

$\frac{1}{2}x+k>0$에서 $x>-2k$이고 k는 자연수이므로 $-2k<0$이지.
즉, $x>1$과 $x>-2k$의 공통 범위는 $x>1$이야.

$\log_5(x-1)\le\log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서
밑이 1보다 크므로 $x-1\le\frac{1}{2}x+k$

밑이 5이고 $5>1$이므로 부등호의 방향은 그대로야.

$\frac{1}{2}x\le k+1$
$\therefore x\le 2(k+1)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1<x\le 2(k+1)$이고 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는 3이므로
$2(k+1)-1=2k+1=3$ $\therefore k=1$

기출 유형 POINT

로그함수의 활용 – 부등식

로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 부등식은 (밑)>1이면 부등호의 방향이 그대로, $0<$(밑)<1이면 부등호의 방향이 바뀜에 주의하고, 구한 해가 진수의 조건 또는 밑의 조건을 만족시키는지 반드시 확인한다.

64 정답 ①

정답률 가형 93%, 나형 88%

특정 환경의 어느 웹사이트에서 한 메뉴 안에 선택할 수 있는 항목이 n개 있는 경우, 항목을 1개 선택하는 데 걸리는 시간 T(초)가 다음 식을 만족시킨다.

$$T=2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)$$

메뉴가 여러 개인 경우, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 각 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 시간을 모두 더하여 구한다. 예를 들어, 메뉴가 3개이고 각 메뉴 안에 항목이 4개씩 있는 경우, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 $3\left(2+\frac{1}{3}\log_2 5\right)$초이다. 메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n개씩 있을 때, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간이 30초 이하가 되도록 하는 n의 최댓값은? 1 2

구하는 전체 시간은 $10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}$초야.

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

연관 개념 check

$\log_a f(x)\le\log_a g(x)$에서

① $a>1$이면 $0<f(x)\le g(x)$

② $0<a<1$이면 $0<g(x)\le f(x)$

해결 흐름

1 메뉴가 10개이니까 구하는 값은 $10T\le30$을 만족시키는 n의 최댓값이네.

2 n은 자연수이니까 부등식을 풀어서 n의 값의 범위를 구하면 되겠다.

알찬 풀이

메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n개씩 있을 때, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간이 30초 이하가 되려면

$10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}\le30$

$2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\le3$ ← 항목을 1개 선택하는 데 걸리는 시간이야.

$\frac{1}{3}\log_2(n+1)\le1$

양변에 3을 곱하면

$\log_2(n+1)\le3$

$\log_2(n+1)\le\log_2 2^3$ ← n을 밑이 a인 로그를 이용하여 나타내면 $n=\log_a a^n$이야.

밑이 1보다 크므로 $n+1\le8$

$\therefore n\le7$ ← 밑이 2이고 $2>1$이므로 부등호의 방향이 그대로야.

따라서 n의 최댓값은 7이다.

기출 유형 POINT

지수함수와 로그함수의 실생활에서의 활용

관계식이 주어지는 경우, 조건을 만족시키는 값을 각각 대입하여 식을 세운다.

65 정답 ①

정답률 84%

주위가 순간적으로 어두워지더라도 사람의 눈은 그 변화를 서서히 지각하게 된다. 빛의 세기가 1000에서 10으로 순간적으로 바뀐 후 t초가 경과했을 때, 사람이 지각하는 빛의 세기 $I(t)$는

$$I(t)=10+990\times a^{-5t}\ (\text{단, } a\text{는 } a>1\text{인 상수})$$

이라 한다. 빛의 세기가 1000에서 10으로 순간적으로 바뀐 후, 사람이 빛의 세기를 21로 지각하는 순간까지 s초가 경과했다고 할 때, s의 값은? 1 2

$I(s)=21$이야.

(단, 빛의 세기의 단위는 Td(트롤랜드)이다.)

① $\frac{1+2\log3}{5\log a}$ ② $\frac{1+3\log3}{5\log a}$ ③ $\frac{2+\log3}{5\log a}$ ④ $\frac{2+2\log3}{5\log a}$ ⑤ $\frac{2+3\log3}{5\log a}$

연관 개념 check

$a>0$, $a\ne1$, $b>0$, $N>0$일 때

$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

실전 적용 key

실생활 문제의 대부분은 주어진 식을 파악하고 조건을 이용하여 식을 세울 수 있다면 간단한 계산을 통해 정답을 구할 수 있다. 주어진 관계식에 각 문장의 값이 무엇을 나타내는지 파악하여 대입하도록 한다.

해결 흐름

1 주어진 관계식에서 $I(s)=21$임을 이용하여 식을 정리해야겠다.

2 1에서 정리한 식을 지수와 로그의 관계, 밑의 변환 공식을 이용하여 s의 값을 a로 나타내면 되겠다.

알찬 풀이

$21=10+990\times a^{-5s}$에서

$11=990\times a^{-5s}$

$11=990\times\frac{1}{a^{5s}}$ ← 양변에 a^{5s}을 곱하면 $11a^{5s}=990$, $a^{5s}=\frac{990}{11}=90$

$\therefore a^{5s}=\frac{990}{11}=90$

따라서 지수와 로그의 관계에 의하여

$5s=\log_a 90=\frac{\log 90}{\log a}$에서 $5s=\frac{\log10+\log9}{\log a}$이므로

$s=\frac{1+2\log3}{5\log a}$ ← 밑의 변환 공식 $\log_a b=\frac{\log b}{\log a}$임을 이용했어.

66 정답 ②

정답률 A형 87%, B형 85%

고속철도의 최고소음도 $L(\text{dB})$을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 $d(\text{m})$, 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 $v(\text{km/h})$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{d}{25}$$

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때, 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A, L_B라 하자. L_B-L_A의 값은?

① $14-28\log 3$　② $28-56\log 3$　③ $28-28\log 3$　④ $56-84\log 3$　⑤ $56-56\log 3$

연관 개념 check

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때,

$\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$

실전 적용 key

열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v_A, 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v라 하면 v_A가 v의 0.9배이므로 $v_A=0.9v$이다.

해결 흐름

1 주어진 관계식 $L=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{d}{25}$에 대입할 값 중에 비율로 주어진 것이 있네. 열차 A의 속력에 대한 값을 열차 B의 속력에 대한 값을 이용해서 나타내야겠네.

2 두 열차 A, B의 상황에 대해 주어진 값을 해당 문자에 각각 대입하여 두 개의 등식을 세워 보면 L_B-L_A의 값을 찾을 수 있어.

알찬 풀이

열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v라 하면 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력은 $0.9v$이고 $d=75$이므로 → 가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m이기 때문이야.

$$L_A=80+28\log\frac{0.9v}{100}-14\log\frac{75}{25}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

→ 변수는 v뿐이야.

$$L_B=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{75}{25}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$$\begin{aligned}L_B-L_A&=28\left(\log\frac{v}{100}-\log\frac{0.9v}{100}\right)\\&=28\log\left(\frac{v}{100}\times\frac{100}{0.9v}\right)\\&=28\log\frac{10}{9}\\&=28(1-\log 9)\\&=28(1-2\log 3)\\&=28-56\log 3\end{aligned}$$

→ $28\log\frac{10}{9}=28(\log 10-\log 9)=28(1-\log 9)$

67 정답 ④

정답률 82%

→ $y=\log_3 x$에 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-2$를 대입한 식과 일치해야 해.

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

연관 개념 check

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은 $y=f(x-m)+n$

해결 흐름

1 평행이동한 그래프를 나타내는 함수 $f(x)$의 식을 구해야겠다.

2 $y=f(x)$를 x에 대하여 푼 다음, x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면 되겠네.

알찬 풀이

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은 → 도형의 평행이동이므로 $y=\log_3 x$에 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-2$를 대입하면 돼.

$$y=\log_3(x-a)+2\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\therefore f(x)=\log_3(x-a)+2$

㉠을 x에 대하여 풀면

$y-2=\log_3(x-a)$ → 로그의 정의 $\log_a N=x \Leftrightarrow a^x=N$을 이용해.

$3^{y-2}=x-a$

$\therefore x=3^{y-2}+a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3^{x-2}+a$ → $f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$이고 이 식이 $3^{x-2}+4$와 일치해야 해.

따라서 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$이므로

$a=4$

다른 풀이

$y=3^x$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y-4$를 대입하면 $f^{-1}(x)$의 식이 나와.

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=3^x$의 역함수는 $y=\log_3 x$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이지.

$\therefore a=4$

수능 핵심 개념 역함수 구하는 방법

함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재한다. 이때 역함수를 구하는 방법은 다음과 같다.

① $y=f(x)$를 x에 대하여 푼다. ➡ $x=f^{-1}(y)$

② ①에서 구한 식에서 x와 y를 서로 바꾼다.
➡ $y=f^{-1}(x)$

68 정답 ⑤

정답률 92%

부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\le 5^{x+4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

1 양변의 밑을 같게 변형해.

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

연관 개념 check

$a^{f(x)}>a^{g(x)}$에서

① $a>1$이면 $f(x)>g(x)$

② $0<a<1$이면 $f(x)<g(x)$

해결 흐름

1 양변의 밑을 같게 만든 후 지수를 비교하면 되겠다.

알찬 풀이

$\frac{1}{5}=5^{-1}$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}=(5^{-1})^{1-2x}=5^{2x-1}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\le 5^{x+4}$에서 $5^{2x-1}\le 5^{x+4}$

밑이 1보다 크므로 $2x-1\le x+4$ → (밑)$=5>1$이므로 부등호의 방향이 그대로야.

$\therefore x\le 5$

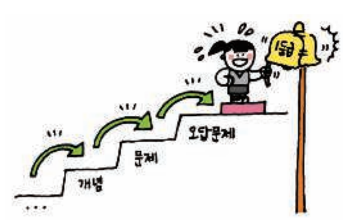
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는

1, 2, 3, 4, 5

이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

생생 수험 Talk



역시 기출 문제의 장점은 출제 경향을 파악할 수 있다는 점이겠지? 나도 고등학교 2학년 때는 왜 선배들이 다들 그렇게 푸는 건지 몰랐거든. 하지만 기출 문제를 많이 풀다 보니까 어떤 문제를 보면 어떻게 풀어야 하는지 바로 딱 감이 오더라. 하지만 기출 문제를 너무 일찍 보는 건 독이 된다고 생각해. 개념이 확실히 정립된 후에 보는 게 좋아. 어느 정도 개념이 확실한 상태에서 자신이 부족한 부분을 알게 해 주는 게 기출 문제를 푸는 장점이 되니까. 그리고 내 생각엔 일찍부터 봐서 기출 문제가 너무 빨리 각인이 되면 나중에 감을 살릴 때나 고난도 문제를 풀 때 신선함이 줄어드는 것 같아.