I

다항식

학습 계획 Check

• 학습하기 전, 중단원이 무엇인지 먼저 확인하세요.
• 이해가 부족한 개념이 있는 단원은 ☐ 안에 표시하고 반복하여 학습하세요.

01 다항식의 연산

01-1 다항식의 덧셈과 뺄셈 [유형 1]

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식에서 문자와 차수가 각각 같은 항

(1) 다항식의 덧셈: 동류항끼리 모아서 정리한다.

(2) 다항식의 뺄셈: 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어서 더한다.

2 다항식의 덧셈에 대한 성질: 세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) 교환법칙: $A+B=B+A$

(2) 결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

01-2 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 [유형 2~4]

1 다항식의 곱셈: 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다.

다항식의 곱을 하나의 다항식으로 나타내는 것

2 다항식의 곱셈에 대한 성질: 세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) 교환법칙: $AB=BA$

(2) 결합법칙: $(AB)C=A(BC)$

(3) 분배법칙: $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

3 곱셈 공식

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(5) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(7) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(8) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

4 곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

1등급 비법 곱셈 공식의 변형: $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$ 꼴

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

01-3 다항식의 나눗셈 [유형 5]

다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

특히 $R=0$, 즉 $A=BQ$일 때, 'A는 B로 나누어떨어진다'고 한다.

교과서에서 뽑은 기본 문제

» 바른답·알찬풀이 2쪽

001

두 다항식 $A=2x^2-xy+3y^2$, $B=x^2+2xy-y^2$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A+B$

(2) $A-B$

(3) $A-2B$

002

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(2x+y)^3$

(2) $(x+3)(x^2-3x+9)$

(3) $(x+y+2z)^2$

003

다음 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 할 때, $A=BQ+R$ 꼴로 나타내시오.

(1) $A=3x^3-x^2+6x+2$
$B=x^2+x-1$

(2) $A=2x^3-x+4$
$B=x+2$

유형 분석 기출 문제

바른답·알찬풀이 2쪽

시험에서 출제율이 70 % 이상인 문제를 엄선하여 수록하였습니다.
난이도 하 중 상

유형 1 다항식의 덧셈과 뺄셈 개념 01-1

004

세 다항식

$A=x^3+ax^2+bx+1,$

$B=2x^3-3x^2-4x,$

$C=x^3+2x^2-3$

에 대하여 $A-\{B-(A-C)\}$를 계산하면 x^2의 계수는 5이고 x의 계수는 6이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

005

서술형

두 다항식 $A=-x^2+6xy-y^2$, $B=4x^2+y^2$에 대하여 등식 $2X+A=2B-X$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오.

006

두 다항식 A, B에 대하여

$A+B=4x^2-9x+7$, $A-2B=x^2+3x+1$

일 때, $2A+B=ax^2+bx+c$이다. 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

007

교육청 기출

가로 세 칸, 세로 세 칸으로 이루어진 표에 세 다항식 $2x-2$, $2x^2+4x$, $-x^2+x-3$을 그림과 같이 한 칸에 하나씩 써넣었다. 가로, 세로, 대각선으로 배열된 각각의 세 다항식의 합이 $6x^2+12x$와 같도록 나머지 칸에 써넣으려 할 때, (가)의 위치에 알맞은 다항식은 $f(x)$이다. $f(10)$의 값을 구하시오.

$2x-2$	$2x^2+4x$	
(가)		$-x^2+x-3$

빈출

유형 2 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 개념 01-2

008

다항식 $(x^2+1)(2x^3-4x^2+3)$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

009

다항식 $(x^3+3x-2)(x^3-x^2+k)$의 전개식에서 x^3의 계수가 2일 때, x의 계수는? (단, k는 상수이다.)

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

010

교육청기출

$(2x+y-1)^2=3$을 만족시키는 x, y에 대하여 $4x^2+y^2+4xy-4x-2y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

011

$a^3=9$일 때, $(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

012

다항식 $(x^2-3x+2)(x^2-3x-5)+8$을 전개하면?

① $x^4-6x^3-6x^2-9x+2$
② $x^4-6x^3+6x^2+9x-2$
③ $x^4-6x^3+6x^2+9x+2$
④ $x^4+6x^3-6x^2+9x-2$
⑤ $x^4+6x^3+6x^2+9x-2$

013

서술형

다항식 $(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)$을 전개하시오.

빈출

유형 3 곱셈 공식의 변형 개념 01-2

014

$a=2-\sqrt{3}$, $b=2+\sqrt{3}$일 때, a^3-b^3의 값은?

① $-30\sqrt{3}$ ② $-18\sqrt{3}$ ③ -8
④ $-3\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$

015

교육청 기출

두 실수 a, b에 대하여 $a+b=3$, $a^2+b^2=7$일 때, a^4+b^4의 값은?

① 39 ② 41 ③ 43
④ 45 ⑤ 47

016

서술형

$a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=6$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값을 구하시오.

017

$x-\frac{1}{x}=2$일 때, $x^3-x^2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

018

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $x^2+y^2+z^2=3$일 때, $(x+y+z)^{10}$의 값을 구하시오. (단, $xyz\neq0$)

019

양수 x에 대하여 $\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+\left(4x+\frac{1}{x}\right)^2=68$일 때, $x+\frac{1}{x}$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{6}$
④ 3 ⑤ 6

빈출

유형 4 곱셈 공식의 활용 개념 01-2

020

$99(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)$의 값은?

① $10^{14}-1$ ② 10^{14} ③ $10^{15}-1$
④ $10^{16}-1$ ⑤ 10^{17}

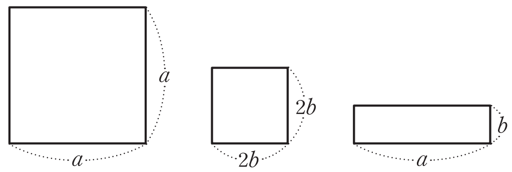
021

$(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)=\dfrac{7^n-1}{m}$일 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

022 교육청기출

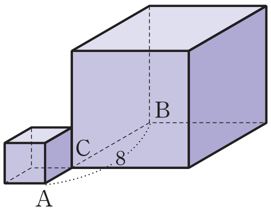
서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 한 변의 길이가 각각 a, $2b$인 두 개의 정사각형과 가로와 세로의 길이가 각각 a, b이고 넓이가 4인 직사각형이 있다. 두 정사각형의 넓이의 합이 가로와 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이의 5배와 같을 때, 한 변의 길이가 $a+2b$인 정사각형의 넓이는?



① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

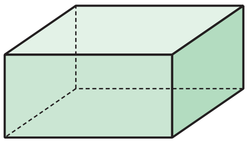
023 서술형

오른쪽 그림과 같이 선분 AB 위의 점 C에 대하여 선분 AC와 선분 BC를 각각 한 모서리로 하는 두 정육면체가 있다. $\overline{AB}=8$이고 두 정육면체의 부피의 합이 224일 때, 두 정육면체의 겉넓이의 합을 구하시오. (단, 두 정육면체는 한 모서리에서 만난다.)



024

오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 24이고 모든 모서리의 길이의 합은 28일 때, 이 상자의 대각선의 길이는?



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

유형 5 다항식의 나눗셈 개념 01-3

025

다항식 $2x^3+6x+4$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $6x+k$일 때, 상수 k의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

026 서술형

다항식 $A(x)=2x^3-4x^2+3x-5$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 다항식 $A(x)$를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 구하시오.
(2) (1)에서 구한 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(3)+R(1)$의 값을 구하시오.

027

다항식 $6x^2-5x+1$을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $6x+1$이고 나머지가 2일 때, 다항식 A는?

① $x-1$ ② x ③ $x+1$
④ $x+2$ ⑤ $x+3$

028

다항식 $4x^3-2x^2+ax+1$을 x^2-x+b로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

029

$x^2+2x-1=0$일 때, x^4+x^3+7x-2의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

실력 완성 1등급 문제

≫ 바른답·알찬풀이 5쪽

출제율이 높은 문제 중 1등급을 결정하는 고난도 문제를 수록하였습니다.

030

두 다항식 A, B에 대하여

$A \circ B = 3A - B,\ A * B = A + 2B$

라 하자. $P = 5x^2 + x + 11$, $Q = -2x^2 + 5x - 4$일 때, $(P * Q) \circ (Q * P)$를 간단히 하시오.

031

다항식 $(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + 100x^{100})^2$의 전개식에서 x^4의 계수는?

① 10　② 15　③ 20
④ 25　⑤ 30

032

$a + b = ab = -2$, $x + y = xy = 5$일 때, $(ax + by)(bx + ay)$의 값은?

① 9　② 10　③ 11
④ 12　⑤ 13

033

$x - \frac{1}{x} = 3$일 때, $\left| x^4 - \frac{1}{x^4} \right|$의 값은?

① $27\sqrt{11}$　② $27\sqrt{13}$　③ $33\sqrt{11}$
④ $33\sqrt{13}$　⑤ $39\sqrt{13}$

034

세 실수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킬 때, xyz의 값을 구하시오.

(가) x, y, z 중 적어도 하나는 3이다.
(나) $3(x + y + z) = xy + yz + zx$

035

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 $2x+4$이고, $g(x)$와 $2f(x)-g(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 모두 $ax+b$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

036

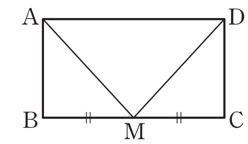
다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2일 때, 다음 중 다항식 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 차례로 나열한 것은?

① $2xQ(x)$, -2　　② $2xQ(x)$, -1
③ $2xQ(x)-2$, -2　　④ $2xQ(x)-2$, -1
⑤ $2xQ(x)-2$, $-\frac{1}{2}$

1등급 완성 문제

037 창의

오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다. (단, 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이다.)



(가) $\overline{MC}-\overline{CD}=x-y+5$
(나) $\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BM}=3x+y+7$

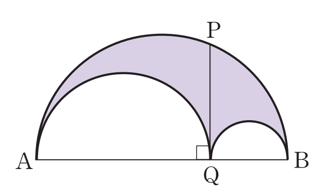
직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 x, y에 대한 식으로 나타내면?

① $2x+y+4$　　② $2x+2y+4$
③ $2x+2y+8$　　④ $4x+2y+4$
⑤ $4x+2y+8$

038 도전

교육청 기출

선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 다음 그림과 같이 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고 선분 AQ와 선분 QB를 지름으로 하는 반원을 각각 그린다. 호 AB, 호 AQ 및 호 QB로 둘러싸인  모양의 도형의 넓이를 S_1, 선분 PQ를 지름으로 하는 반원의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{AQ}-\overline{QB}=8\sqrt{3}$이고 $S_1-S_2=2\pi$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



02 나머지정리

I 다항식

02-1 항등식 [유형 1~3]

1 항등식: 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식

2 항등식의 성질

(1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.

(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a',\ b=b',\ c=c'$이다.

3 미정계수법: 항등식의 뜻이나 성질을 이용하여 주어진 등식에서 정해져 있지 않은 계수를 정하는 방법

양변을 각각 내림차순으로 정리한 후 비교한다.

(1) 계수비교법: 항등식의 양변의 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법

(2) 수치대입법: 항등식의 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법

02-2 나머지정리 [유형 4~8]

1 나머지정리

(1) 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$$R=f(\alpha)$$

(2) 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$$R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

2 인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여

(1) $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

(2) $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

참고 다음은 모두 '다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다'와 같은 표현이다.
① 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.
② $f(\alpha)=0$
③ $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ (단, $Q(x)$는 다항식이다.)
④ 일차식 $x-\alpha$는 다항식 $f(x)$의 인수이다.

3 조립제법: 다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

주의 조립제법을 이용할 때는 차수가 높은 항의 계수부터 차례로 적는다. 이때 해당되는 차수의 항이 없으면 그 항의 계수를 0으로 적는다.

참고 다항식을 일차식으로 나눌 때, 나머지만 구하는 경우에는 나머지정리를 이용하고, 몫과 나머지를 모두 구하는 경우에는 조립제법을 이용한다.

$x-2\ )\ 3x^3-4x^2+2x-1$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ & & 6 & 4 & 12 \\ \hline & 3 & 2 & 6 & 11 \end{array}$$

$\times 2$

몫: $3x^2+2x+6$ 나머지: 11

1등급 비법 조립제법을 이용하여 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫과 나머지 구하기

(i) 조립제법을 이용하여 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$와 나머지 R를 구한다.

(ii) $f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R=(ax+b)\times\frac{1}{a}Q(x)+R$이므로

$f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

교과서에서 뽑은 기본 문제

바른답·알찬풀이 7쪽

039
다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하시오.

(1) $(a-2)x^2-(3+b)x+c-4=0$

(2) ax^2-3x+7
$=3x^2+(b-2)x+c-1$

040
다항식 $f(x)=x^3-x^2+1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x+1$

(2) $2x-3$

041
다항식 $f(x)=x^3-2x^2-kx-6$이 다음 일차식으로 나누어떨어지도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

(1) $x+2$

(2) $x-3$

042
조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 차례로 구하시오.

(1) $(x^3-6x^2-5x+4)\div(x+1)$

(2) $(2x^3+3x^2-4x-5)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

유형 분석 기출 문제

» 바른답·알찬풀이 7쪽

시험에서 출제율이 70% 이상인 문제를 엄선하여 수록하였습니다.
난이도 하 중 상

빈출

유형 1 미정계수법 개념 02-1

043 교육청 기출

모든 실수 x에 대하여 등식

$$x^3-x^2-5x+a=(x-2)(x^2+x+b)$$

가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

044

x의 값에 관계없이 등식

$$2x^2-2x+2=ax(x+1)+bx(x-2)+c(x+1)(x-2)$$

가 항상 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

045

x의 값에 관계없이 $\dfrac{6x^2+2ax+b}{3x^2+2bx+9}$의 값이 항상 일정할 때, 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오.

(단, $3x^2+2bx+9\neq 0$)

유형 2 조건을 만족시키는 항등식 개념 02-1

046

x에 대한 이차방정식

$$x^2+(k-2)x+(k+3)p-q+2=0$$

이 k의 값에 관계없이 $x=1$을 근으로 가질 때, 상수 p, q에 대하여 pq의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

047 서술형

$x+y=1$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식 $(2a-b)x+(b-a)y+1=0$이 성립할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

유형 3 다항식의 나눗셈과 항등식 개념 02-1

048

다항식 x^3+ax^2-2x+b를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지가 $-3x+4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

049 서술형

다항식 $2x^3-5x^2+4$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $f(x)$, 나머지를 a라 할 때, 다음을 구하시오.

(1) a의 값
(2) $f(a)$의 값

050 교육청 기출

x에 대한 다항식 $P(x)=(x^2-x-1)(ax+b)+2$에 대하여 $P(x+1)$을 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 -3일 때, $50a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

빈출 유형 4 나머지정리; 일차식으로 나누는 경우 개념 02-2

051

다항식 x^3+3x^2-ax+2를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 2일 때, 이 다항식을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a는 상수이다.)

052

다항식 x^3-6x^2+ax+b를 $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 5, 7일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -39 ② -30 ③ -15
④ 21 ⑤ 27

053

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6이다. 다항식 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① 9　② 11　③ 13
④ 15　⑤ 17

유형 5 나머지정리: 이차식으로 나누는 경우　개념 02-2

054 서술형

다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 3, 7일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

055

다항식 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지가 $3x+1$일 때, $f(2x-5)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -8　② -5　③ -3
④ 0　⑤ 4

056

다항식 $f(x)+2$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $3f(x)-2$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이다. $f(x)$를 $(x+1)(2x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

빈출

유형 6 인수정리: 일차식으로 나누는 경우 개념 02-2

057

다항식 $x^3+ax^2-2bx-4$가 $x-1$, $x-2$를 모두 인수로 가질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

058

다항식 $x^3+2(k-1)x^2+k^2$이 $x+1$을 인수로 갖도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오.

059

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$가 각각 일차식 $x-a$로 나누어떨어질 때, $f(1)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① -3 ② -2 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

060 서술형

x^2의 계수가 1인 이차식 $f(x)$가

$$f(0)=7,\ f(1)=0,\ f(a)=0$$

을 만족시킨다. 다항식 $f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지를 R라 할 때, $a+R$의 값을 구하시오. (단, $a\neq1$)

유형 7 인수정리: 이차식으로 나누는 경우 개념 02-2

061 교육청 기출

x에 대한 다항식 $2x^3+ax^2+bx+6$이 x^2-1로 나누어떨어질 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

062

다항식 $f(x)+x$가 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는?

① $-x-1$　② $-x$　③ $-x+1$
④ $x-1$　⑤ $x+1$

063

다항식 $f(x)$는 x^2-2x-3으로 나누어떨어지고, $f(x)-2$는 $x-1$로 나누어떨어진다. 이때 $f(x)+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는?

① $x+2$　② $x+3$　③ $2x-1$
④ $2x$　⑤ $2x+1$

유형 8 조립제법　개념 02-2

02

064

다음은 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3-x^2-2x+3$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. $a-b+c$의 값은?

$$\begin{array}{c|cccc}
\boxed{a} & 2 & -1 & -2 & 3 \\
 & & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\
\hline
 & 2 & 0 & \boxed{b} & \boxed{c}
\end{array}$$

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{9}{2}$

065 서술형

다항식 $2x^3-3x^2-2x+1$을 $2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $Q(2)+R$의 값을 구하시오.

066

x의 값에 관계없이 등식
$x^3-2x^2+3x-4=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
가 항상 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값을 구하시오.

실력 완성 1등급 문제

» 바른답·알찬풀이 11쪽

출제율이 높은 문제 중 1등급을 결정하는 고난도 문제를 수록하였습니다.

067

등식 $(1+3x-2x^3)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{18}x^{18}$이 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때,

$$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18}$$

의 값은? (단, a_0, a_1, $\cdots$, a_{18}은 상수이다.)

① 8 ② 16 ③ 32
④ 64 ⑤ 128

068

다항식 $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $3x+2$이고, $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이다. 이때 $f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

069

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6이다. $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

070

교육청 기출

삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=2$
> (나) $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지가 같다.

$f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하자. $R(0)=R(3)$일 때, $R(5)$의 값을 구하시오.

071

다항식 $x^3+2ax^2-5x+2b$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

072

다음은 조립제법을 이용하여 삼차다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 몫을 $g(x)$라 할 때, $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & \square & \square & -2 & \square \\ & & \square & 6 & \square \\ \hline & 1 & \square & \square & \multicolumn{1}{|c}{8} \end{array}$$

① -8　② -4　③ 0　④ 6　⑤ 10

073 창의

자연수 n에 대하여 n차 다항식

$$P_n(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$$

이라 할 때, 등식

$$x^3-2x^2+3x-2=a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$$

는 x에 대한 항등식이다. 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

074 도전

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $2f(x)-g(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지고, $f(x)+2g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 5이다. $x-1$로 나누어떨어지는 다항식만을 **[보기]**에서 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $f(x)-2x^2+2x-1$

ㄴ. $g(x)-4x^2$

ㄷ. $4x^2-2f(x)g(x)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 인수분해

Ⅰ 다항식

03-1 인수분해 공식 [유형 1, 6]

1 인수분해: 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것

$$x^3+3x^2+3x+1 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)^3$$

★ **2 인수분해 공식**

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(5) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(7) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

(8) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

03-2 복잡한 식의 인수분해 [유형 2~6]

★ **1 공통부분이 있는 식의 인수분해**

(1) 공통부분이 있는 다항식

공통부분을 X로 치환하여 인수분해한 후, X에 원래의 식을 대입하여 정리한다. 이때 각각의 인수가 다시 인수분해될 수 있는지 반드시 확인한다.

참고 공통부분이 없는 식은 공통부분이 생기도록 적당히 변형한다.

(2) x^4+ax^2+b 꼴의 다항식

방법 1 $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.

방법 2 $x^2=X$로 치환해도 인수분해되지 않으면 적당한 식을 더하거나 빼어서 A^2-B^2 꼴로 변형한 후, 인수분해한다.

2 여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해

차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후, 인수분해한다.

★ **3 인수정리를 이용한 인수분해**

삼차 이상의 다항식 $f(x)$는 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

(ⅰ) 인수정리를 이용하여 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 구한다.

(ⅱ) 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구한다.

(ⅲ) $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 나타낸 후, $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해한다.

1등급 비법 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값

계수가 정수인 삼차 이상의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$$\pm\frac{(f(x)\text{의 상수항의 양의 약수})}{(f(x)\text{의 최고차항의 계수의 양의 약수})}$$

중에서 찾는다.

교과서에서 뽑은 기본 문제

» 바른답·알찬풀이 13쪽

075

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $16a^2+8a+1$

(2) $a^2-10ab+25b^2$

(3) $9x^2-4$

(4) x^2+3x-4

(5) $2x^2-x-6$

076

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^3+6x^2+12x+8$

(2) $x^3-9x^2+27x-27$

(3) $8x^3+125$

(4) x^3-27

(5) $a^2+4b^2+c^2+4ab+4bc+2ca$

(6) $a^3+8b^3+1-6ab$

077

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x+y)^2-(x+y)-2$

(2) x^4-3x^2-4

유형 분석 기출 문제

» 바른답·알찬풀이 14쪽

시험에서 출제율이 70 % 이상인 문제를 엄선하여 수록하였습니다.
난이도 하 중 상

빈출

유형 1 인수분해 공식 개념 03-1

078

다음 중 옳은 것은?

① $a^3+9a^2+27a+27=(a-3)^3$
② $x^3+8y^3=(x-2y)(x^2+2xy-4y^2)$
③ $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca=(a+b-c)^2$
④ $ab^2-ac^2-b^2c+c^3=(a+c)(b+c)(b-c)$
⑤ $a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

079

다항식 ab^4-8ab의 인수가 아닌 것만을 [보기]에서 있는 대로 고르시오.

[보기]

ㄱ. a	ㄴ. b
ㄷ. $b-2$	ㄹ. $b+2$
ㅁ. b^2-2b+4	ㅂ. b^2+2b+4

080 서술형

다항식 $x^6+2x^3-x^4-2x^2$을 인수분해하시오.

081

다항식 $x^2+y^2+4z^2-2xy-4yz+4zx$를 인수분해하면 $(ax+by+cz)^2$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

082

다항식 $(x-3)^3-(2x-5)^3+(x-2)^3$을 인수분해하면?

① $-(x-2)(x-3)(2x-5)$
② $-2(x-2)(x-3)(2x-5)$
③ $-3(x-2)(x-3)(2x-5)$
④ $(x-2)(x-3)(2x+5)$
⑤ $3(x-2)(x-3)(2x-5)$

빈출

유형 2 공통부분이 있는 식의 인수분해 개념 03-2

083

다음은 다항식 $(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)-2$를 인수분해하는 과정이다.

> 다항식에서 공통부분을 찾아 $\boxed{(가)}=X$로 놓으면
> $(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)-2$
> $=X^2+7X+10$
> $=(X+2)(X+5)$
> $=(\boxed{(나)})(x+2)(x^2+3x+5)$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, $\dfrac{f(2)}{g(1)}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

084

다항식 $(ab-a-b+1)(ab+1)+ab$를 인수분해하시오.

085

교육청 기출

다항식 $(x^2-x)^2+2x^2-2x-15$가 $(x^2+ax+b)(x^2+ax+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

086

다항식 $(x-1)(x-3)(x+3)(x+5)+a$가 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 a의 값을 구하시오.

087

서술형

다항식 $(x^2-6x+5)(x^2-2x-3)+12$가 이차항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$의 곱으로 인수분해될 때, $f(x)+g(x)$를 구하시오.

유형 3 x^4+ax^2+b 꼴의 식의 인수분해 개념 03-2

088

다항식 $x^4-13x^2y^2+36y^4$의 인수인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $x+2y$	ㄴ. $x+3y$
ㄷ. $x-4y$	ㄹ. x^2-9y^2

① ㄱ, ㄷ ② ㄴ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

089 서술형

$x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $|ab-cd|$의 값을 구하시오.

빈출

유형 4 여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해 개념 03-2

090

다음 중 다항식 $x^4-3y^2-2x^2y-4x^2+4y+4$의 인수인 것은?

① $x+y-2$ ② $x-3y-2$ ③ x^2+y-2
④ x^2-3y-4 ⑤ x^2-3y+2

091

다항식 $x^2-3xy+2y^2-ax+7y-15$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 정수 a의 값을 구하시오.

092

다항식 $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$를 인수분해하면?

① $(a+b)(b+c)(c+a)$ ② $(a+b)(b+c)(c-a)$
③ $(a+b)(b-c)(c-a)$ ④ $(a-b)(b-c)(c+a)$
⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

빈출

유형 5 인수정리를 이용한 인수분해 개념 03-2

093

다항식 x^3+3x^2-6x-8이 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

094

다항식 $f(x)=4x^3-ax^2-2x+1$에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$일 때, $f(x)$를 인수분해하면? (단, a는 상수이다.)

① $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-1)$ ② $(x-1)(4x^2+1)$ ③ $(2x-1)(2x^2-1)$ ④ $(2x+1)(2x^2+1)$ ⑤ $(4x+1)(x^2+1)$

095

교육청 기출

다항식 $x^4-2x^3+2x^2-x-6$이 $(x+1)(x+a)(x^2+bx+c)$로 인수분해될 때, 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

096

서술형

다항식 $x^4-x^3+ax^2+bx+12$는 $x+1$로 나누어떨어지고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -6이다. 이 다항식을 인수분해하시오. (단, a, b는 상수이다.)

097

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x+1)^2$을 인수로 가질 때, 이 다항식을 인수분해하시오. (단, a, b는 상수이다.)

유형 6 인수분해의 활용
개념 03-1, 2

098

$x-y=3$, $xy=2$일 때, $x^3-x^2y+xy^2-y^3$의 값은?

① 36　② 39　③ 42　④ 45　⑤ 48

099 서술형

$27\times29\times31\times33+16=N^2$을 만족시키는 자연수 N의 값을 구하시오.

100

$\dfrac{2020^4+2020^2+1}{2020^3-1}-\dfrac{1}{2019}$의 값은?

① 0　② 1　③ 2019　④ 2020　⑤ 2021

101

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$b^2-ab-c^2+ac=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 이등변삼각형
② 둔각삼각형
③ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
④ 빗변의 길이가 b인 직각삼각형
⑤ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

102

부피가 $(x^3+7x^2+16x+12)\pi$이고 겉넓이가 $2(x+a)(bx+5)\pi$인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 높이와 밑면의 반지름의 길이가 각각 일차항의 계수가 1인 x에 대한 일차식일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? (단, $x>0$)

① -4　② -2　③ 1　④ 2　⑤ 4

실력 완성 1등급 문제

» 바른답·알찬풀이 17쪽

출제율이 높은 문제 중 1등급을 결정하는 고난도 문제를 수록하였습니다.

103

교육청기출

세 다항식 $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2x-1$, $h(x)$에 대하여

$$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3=(2x^2-x-1)h(x)$$

가 x에 대한 항등식일 때, $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

104

$x^2-y^2=2$일 때, 다항식

$$\{(x+y)^3+(x-y)^3\}^2-\{(x+y)^3-(x-y)^3\}^2$$

의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

105

일차식 $f(x)$에 대하여 다항식 $x^3-x^2+4f(x)$가 $(x-1)(x-m)(x-n)$으로 인수분해된다. $mn=-16$일 때, $f(x)$는? (단, m, n은 상수이다.)

① $-4x-4$ ② $-4x+4$ ③ $-2x+4$
④ $2x-4$ ⑤ $4x-4$

106

1이 아닌 두 자연수 a, b에 대하여

$$21^3+21^2-21+2=a\times b$$

로 나타낼 때, $|a-b|$의 값을 구하시오.

107

자연수 a, b에 대하여 $a^2b+6ab+a^2+6a+9b+9$의 값이 147일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

108

세 변의 길이가 각각 a, b, 3인 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3}{2}$이고 $a^4+b^4+81+2a^2b^2-18a^2-18b^2=0$을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

109

임의의 다항식 A, B에 대하여

$$A*B=(A+B)^2-AB$$

일 때, $(x+2)^2*(x-1)^2$을 인수분해한 것은?

① $(x^2-x+1)(x^2-x+7)$
② $(x^2+x+1)(x^2+x+7)$
③ $3(x^2-x-1)(x^2-x-7)$
④ $3(x^2-x+1)(x^2-x+7)$
⑤ $3(x^2+x+1)(x^2+x+7)$

110

대각선의 길이가 $\sqrt{10}$인 두 직사각형 P, Q가 있다. 직사각형 P의 가로, 세로의 길이는 각각 a, b이고, 직사각형 Q의 가로, 세로의 길이는 각각 c, d이다. $ad-bc=5$일 때, $ac+bd$의 값을 구하시오.

1등급 완성 문제

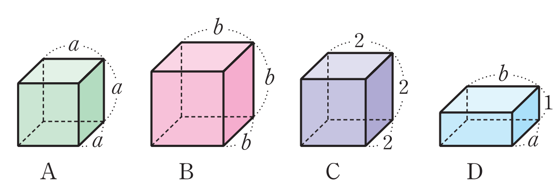
111 도전

100개의 다항식 x^2+x-1, x^2+x-2, x^2+x-3, $\cdots$, $x^2+x-100$이 있다. 이 중에서 자연수 a, b에 대하여 $(x+a)(x-b)$ 꼴로 인수분해되는 것의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

112 창의

다음 그림과 같은 정육면체 모양의 상자 A, B, C와 직육면체 모양의 상자 D가 있다. 세 상자 A, B, C의 부피의 합이 상자 D의 부피의 6배일 때, 상자 A의 한 모서리의 길이를 구하시오.



실전 대비 마무리 문제

Ⅰ 다항식

» 바른답·알찬풀이 19쪽

대단원별로 실제 시험에 대비할 수 있는 문제로 구성하였습니다.

113

다항식 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ \cdots\ (1+x^{100})$의 전개식에서 x^3의 계수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 5　⑤ 100

114

$x+y=2$, $x^2+y^2=6$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 x^7+y^7의 값은?

① 34　② 82　③ 198
④ 478　⑤ 1054

115

$x^2+2x-1=0$일 때, $x^5-\dfrac{1}{x^5}$의 값은?

① -86　② -84　③ -82
④ -80　⑤ -78

116

세 양수 a, b, c가

$$a+b+c=\sqrt{6},\ a^2+b^2+c^2=2$$

를 만족시킬 때, abc의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$　② $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$　③ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　⑤ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

117

다항식 $f(x)=x^3+9x^2+4x-45$에 대하여 등식

$$f(x+a)=x^3+bx-3$$

이 x의 값에 관계없이 항상 성립한다고 할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -26　② -24　③ -22　④ -20　⑤ -18

118

모든 실수 x에 대하여 등식

$$x^{2020}=a_0(x+1)^{2020}+a_1(x+1)^{2019}+a_2(x+1)^{2018}+\cdots+a_{2019}(x+1)+a_{2020}$$

이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2020}$의 값은?

① 0　② 2019　③ 2020　④ 2^{2019}　⑤ 2^{2020}

119

이차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2=f(x^2)$이다.

다항식 $\{f(x)+2\}^3$의 상수항을 제외한 나머지 모든 항의 계수의 합은?

① 19　② 21　③ 23　④ 25　⑤ 27

120

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $3x+6$, $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 3이다. $2f(x)-g(x)$와 $g(x)$를 각각 x^3-1로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)$로 같을 때, $R(2)$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

121

삼차다항식 $P(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(x-1)P(x-2)=(x-7)P(x)$ (나) $P(x)$를 x^2-4x+2로 나누었을 때의 나머지는 $2x-10$이다.

이때 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

122

이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 서로 다른 실수이다.)

[보기]

ㄱ. $f(a)-R(a)=0$
ㄴ. $f(a)-R(b)=f(b)-R(a)$
ㄷ. $af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

123

x^3의 계수가 1인 삼차다항식 $P(x)$에 대하여

$$P(2)=1,\ P(3)=2,\ P(4)=3$$

일 때, $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

124

자연수 n에 대하여 다항식
$f(x)=ax^{n+1}-(n+1)x+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 n을 사용한 식으로 나타내면?

① $2n$ ② $n+1$ ③ n
④ $n-1$ ⑤ $2n-1$

125

다항식 $x^4-16x^2y^2+36y^4$이 $(x^2+axy+by^2)(x^2+cxy+dy^2)$으로 인수분해될 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값은?

① -144 ② -72 ③ -36
④ 36 ⑤ 144

126

연속하는 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$ba^2-ca^2-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$$

의 값은? (단, $a<b<c$)

① -4 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 4

127

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

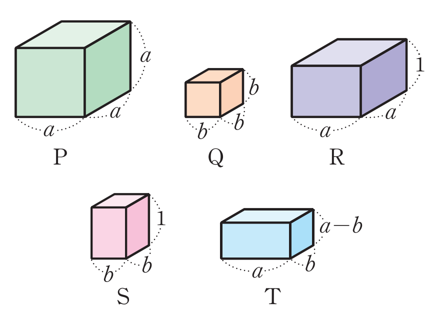
$$a^3c+a^2bc-ac^3+ab^2c+b^3c-bc^3=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형의 넓이는?

① $\frac{1}{2}ab$ ② $\frac{1}{2}bc$ ③ $\frac{1}{2}ac$
④ ab ⑤ bc

128

다음 그림과 같은 직육면체 P, Q, R, S, T의 부피를 각각 p, q, r, s, t라 하면 $p=q+r+s+t$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.



Ⅰ 다항식

01 다항식의 연산

교과서에서 뽑은 기본 문제 8쪽

001 (1) $3x^2+xy+2y^2$ (2) $x^2-3xy+4y^2$ (3) $-5xy+5y^2$

002 (1) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ (2) x^3+27
(3) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx$

003 (1) $3x^3-x^2+6x+2=(x^2+x-1)(3x-4)+13x-2$
(2) $2x^3-x+4=(x+2)(2x^2-4x+7)-10$

001 (1) $A+B=(2x^2-xy+3y^2)+(x^2+2xy-y^2)$
$=3x^2+xy+2y^2$
(2) $A-B=(2x^2-xy+3y^2)-(x^2+2xy-y^2)$
$=2x^2-xy+3y^2-x^2-2xy+y^2$
$=x^2-3xy+4y^2$
(3) $A-2B=(2x^2-xy+3y^2)-2(x^2+2xy-y^2)$
$=2x^2-xy+3y^2-2x^2-4xy+2y^2$
$=-5xy+5y^2$

002 (1) $(2x+y)^3$
$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times y+3\times 2x\times y^2+y^3$
$=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$
(2) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+3^3$
$=x^3+27$
(3) $(x+y+2z)^2$
$=x^2+y^2+(2z)^2+2\times x\times y+2\times y\times 2z+2\times 2z\times x$
$=x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx$

003 (1)

$$
\begin{array}{r}
3x-4 \\
x^2+x-1\overline{)\,3x^3-x^2+6x+2} \\
\underline{3x^3+3x^2-3x} \\
-4x^2+9x+2 \\
\underline{-4x^2-4x+4} \\
13x-2
\end{array}
$$

즉, 몫은 $3x-4$, 나머지는 $13x-2$이므로
$3x^3-x^2+6x+2=(x^2+x-1)(3x-4)+13x-2$

(2)

$$
\begin{array}{r}
2x^2-4x+7 \\
x+2\overline{)\,2x^3\qquad -x+4} \\
\underline{2x^3+4x^2\qquad\quad} \\
-4x^2-x\quad \\
\underline{-4x^2-8x\quad} \\
7x+4 \\
\underline{7x+14} \\
-10
\end{array}
$$

즉, 몫은 $2x^2-4x+7$, 나머지는 -10이므로
$2x^3-x+4=(x+2)(2x^2-4x+7)-10$

유형 분석 기출 문제 9~13쪽

004 3	**005** $3x^2-2xy+y^2$		**006** ④	**007** 129
008 ②	**009** ③	**010** ②	**011** ③	**012** ②
013 $x^4+8x^3+7x^2-36x-36$			**014** ①	**015** ⑤
016 9	**017** ⑤	**018** 243	**019** ③	**020** ④
021 ④	**022** ⑤	**023** 240	**024** ②	**025** ⑤
026 (1) 몫: $2x-8$, 나머지: $21x-13$ (2) 6			**027** ①	**028** ④
029 ②				

004 $A-\{B-(A-C)\}$
$=A-(B-A+C)$
$=A-B+A-C$
$=2A-B-C$
$=2(x^3+ax^2+bx+1)-(2x^3-3x^2-4x)-(x^3+2x^2-3)$
$=-x^3+(2a+1)x^2+(2b+4)x+5$
이때 x^2의 계수는 5, x의 계수는 6이므로
$2a+1=5$, $2b+4=6$
$\therefore a=2, b=1$
$\therefore a+b=2+1=3$

005 $2X+A=2B-X$에서 $3X=-A+2B$
$\therefore X=\frac{1}{3}(-A+2B)$ …… ㉮
$=\frac{1}{3}\{-(-x^2+6xy-y^2)+2(4x^2+y^2)\}$
$=\frac{1}{3}(x^2-6xy+y^2+8x^2+2y^2)$
$=\frac{1}{3}(9x^2-6xy+3y^2)$
$=3x^2-2xy+y^2$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 주어진 등식을 $X=(A, B$로 나타낸 식) 꼴로 변형하기	40 %
㉯ A, B를 대입하여 다항식 X 구하기	60 %

006 $A+B=4x^2-9x+7$ …… ㉠
$A-2B=x^2+3x+1$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면 $3B=3x^2-12x+6$
$\therefore B=x^2-4x+2$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$A+(x^2-4x+2)=4x^2-9x+7$
$\therefore A=4x^2-9x+7-(x^2-4x+2)$
$=4x^2-9x+7-x^2+4x-2$
$=3x^2-5x+5$
$\therefore 2A+B=2(3x^2-5x+5)+(x^2-4x+2)$
$=6x^2-10x+10+x^2-4x+2$
$=7x^2-14x+12$
따라서 $a=7$, $b=-14$, $c=12$이므로
$a+b+c=7+(-14)+12=5$

007

$g(x)$		
$2x-2$	$2x^2+4x$	
$f(x)$		$-x^2+x-3$

위의 표에서 대각선 (↘)으로 배열된 세 다항식의 합이 $6x^2+12x$이므로

$g(x)+(2x^2+4x)+(-x^2+x-3)=6x^2+12x$

$g(x)+x^2+5x-3=6x^2+12x$

$\therefore g(x)=6x^2+12x-x^2-5x+3$

$=5x^2+7x+3$

또, 위의 표에서 세로로 배열된 세 다항식의 합도 $6x^2+12x$이므로

$(5x^2+7x+3)+(2x-2)+f(x)=6x^2+12x$

$5x^2+9x+1+f(x)=6x^2+12x$

$\therefore f(x)=6x^2+12x-5x^2-9x-1$

$=x^2+3x-1$

$\therefore f(10)=100+30-1=129$

008 $(x^2+1)(2x^3-4x^2+3)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times 3+1\times(-4x^2)=3x^2-4x^2=-x^2$

따라서 x^2의 계수는 -1이다.

다른풀이 주어진 식을 전개하면

$(x^2+1)(2x^3-4x^2+3)=2x^5-4x^4+2x^3-x^2+3$

따라서 x^2의 계수는 -1이다.

1등급 비법 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때는 구하는 항이 나오는 경우만 전개하면 편리하다.

009 $(x^3+3x-2)(x^3-x^2+k)$의 전개식에서 x^3항은

$x^3\times k+3x\times(-x^2)+(-2)\times x^3=kx^3-3x^3-2x^3$

$=(k-5)x^3$

x^3의 계수가 2이므로

$k-5=2 \qquad \therefore k=7$

주어진 식의 전개식에서 x항은

$3x\times k=3x\times 7=21x$

따라서 x의 계수는 21이다.

참고 두 다항식의 곱으로 주어진 식의 전개식에서 x^3항은

$(x^3\text{항})\times(\text{상수항})+(x^2\text{항})\times(x\text{항})$

$+(x\text{항})\times(x^2\text{항})+(\text{상수항})\times(x^3\text{항})$

을 계산하여 구할 수 있다.

010 $(2x+y-1)^2=3$의 좌변을 전개하면

$4x^2+y^2+1+4xy-2y-4x=3$

$\therefore 4x^2+y^2+4xy-4x-2y=2$

다른풀이 $2x+y-1=\pm\sqrt{3}$이므로

$2x+y=1\pm\sqrt{3}$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$(2x+y)^2=(1\pm\sqrt{3})^2$

$4x^2+4xy+y^2=4\pm2\sqrt{3}$

$\therefore 4x^2+y^2+4xy-4x-2y$

$=(4x^2+4xy+y^2)-2(2x+y)$

$=(4\pm2\sqrt{3})-2(1\pm\sqrt{3})$ (복부호 동순)

$=2$

011 $(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

$=\{(a+2)(a^2-2a+4)\}\{(a-2)(a^2+2a+4)\}$

$=(a^3+2^3)(a^3-2^3)$

$=(9+8)(9-8)$

$=17\times1=17$

012 $x^2-3x=X$로 놓으면

$(x^2-3x+2)(x^2-3x-5)+8$

$=(X+2)(X-5)+8$

$=X^2-3X-2$

$=(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)-2$

$=x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x-2$

$=x^4-6x^3+6x^2+9x-2$

개념 보충

다항식의 곱셈에서 공통부분이 있는 식은 다음과 같은 순서로 전개한다.
(i) 공통부분을 한 문자로 치환하여 전개한다.
(ii) (i)의 식의 문자에 원래의 식을 대입하여 전개한다.

013 $(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)$

$=\{(x+1)(x+3)\}\{(x-2)(x+6)\}$ 상수항의 합이 같도록 두 일차식끼리 짝을 짓는다.

$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-12)$ …… ㉮

$x^2+4x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+3)(X-12)$

$=X^2-9X-36$ …… ㉯

$=(x^2+4x)^2-9(x^2+4x)-36$

$=x^4+8x^3+16x^2-9x^2-36x-36$

$=x^4+8x^3+7x^2-36x-36$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 공통부분이 나오도록 식 정리하기	40 %
㉯ 공통부분을 X로 치환하여 전개하기	30 %
㉰ X에 원래의 식을 대입하여 전개하기	30 %

1등급 비법 공통부분이 보이지 않는 경우에는 공통부분이 나오도록 곱셈의 순서를 바꿔서 두 일차식끼리 짝지어 전개한 후, 곱셈 공식을 이용한다.

014 $a-b=(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

$ab=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에

$a-b=-2\sqrt{3}$, $ab=1$을 대입하면

$a^3-b^3=(-2\sqrt{3})^3+3\times1\times(-2\sqrt{3})$

$=-24\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

$=-30\sqrt{3}$

015 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에

$a+b=3$, $a^2+b^2=7$을 대입하면

$7=3^2-2ab$, $2ab=2$ $\quad\therefore ab=1$

$\therefore a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$

$=7^2-2\times1^2$

$=47$

016 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에

$a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=6$을 대입하면

$0=6+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-3$ …… ㉮

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$에

$a+b+c=0$, $ab+bc+ca=-3$을 대입하면

$(-3)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\times0$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=9$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ $ab+bc+ca$의 값 구하기	50 %
㉯ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값 구하기	50 %

017 $x^3-x^2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$

$=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}-\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}$

$=(2^3+3\times2)-(2^2+2)=8$

018 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$의 양변에 xyz를 곱하면

$xy+yz+zx=0$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에

$x^2+y^2+z^2=3$, $xy+yz+zx=0$을 대입하면

$(x+y+z)^2=3+2\times0=3$

$\therefore (x+y+z)^{10}=\{(x+y+z)^2\}^5=3^5=243$

019 $\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+\left(4x+\frac{1}{x}\right)^2=68$에서

$x^2+\frac{16}{x^2}-8+16x^2+\frac{1}{x^2}+8=68$

$17\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=68$ $\quad\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=4$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$에

$x^2+\frac{1}{x^2}=4$를 대입하면

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=4+2=6$

이때 $x>0$에서 $x+\frac{1}{x}>0$이므로

$x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$

020 $99(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)(10^8+1)$

$=(10^8-1)(10^8+1)$

$=10^{16}-1$

021 $(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)$

$=\frac{1}{6}(7-1)(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)$

$=\frac{1}{6}(7^2-1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)$

$=\frac{1}{6}(7^4-1)(7^4+1)(7^8+1)$

$=\frac{1}{6}(7^8-1)(7^8+1)$

$=\frac{7^{16}-1}{6}$

따라서 $m=6$, $n=16$이므로

$m+n=6+16=22$

022 두 정사각형의 넓이의 합은 $a^2+(2b)^2=a^2+4b^2$이고 직사각형의 넓이는 ab이므로

$a^2+4b^2=5ab$

또, $ab=4$이므로

$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$

$=5ab+4ab$

$=9ab$

$=9\times4=36$

따라서 한 변의 길이가 $a+2b$인 정사각형의 넓이는 36이다.

023 $\overline{AC}=a$, $\overline{CB}=b$라 하면

$a+b=8$, $a^3+b^3=224$ …… ㉮

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에

$a+b=8$, $a^3+b^3=224$를 대입하면

$224=8^3-3ab\times8$, $3ab=36$

$\therefore ab=12$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2\times12=40$이므로

두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6(a^2+b^2)=6\times40=240$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 두 정육면체의 한 모서리의 길이의 합과 부피의 합을 식으로 나타내기	30 %
㉯ 두 정육면체의 겉넓이의 합 구하기	70 %

024 상자의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 겉넓이가 24이므로

$2(ab+bc+ca)=24$

$\therefore ab+bc+ca=12$

또, 모든 모서리의 길이의 합이 28이므로

$4(a+b+c)=28$

$\therefore a+b+c=7$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에

$a+b+c=7$, $ab+bc+ca=12$를 대입하면

$a^2+b^2+c^2=7^2-2\times12=25$

따라서 이 상자의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{25}=5$

1등급 비법 직육면체의 겉넓이와 부피가 주어지고 대각선의 길이를 구하는 문제는 곱셈 공식의 활용 문제로 자주 출제되므로 곱셈 공식의 변형과 피타고라스 정리를 잘 알아두도록 한다.

개념 보충

대각선의 길이

① 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b인 직사각형의 대각선의 길이 ⇨ $\sqrt{a^2+b^2}$

② 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b, 높이가 c인 직육면체의 대각선의 길이 ⇨ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

025

$$\begin{array}{r} 2x-2 \\ x^2+x+1\overline{)\,2x^3\qquad+6x+4} \\ \underline{2x^3+2x^2+2x} \\ -2x^2+4x+4 \\ \underline{-2x^2-2x-2} \\ 6x+6 \end{array}$$

이때 나머지가 $6x+k$이므로

$k=6$

026 (1)

$$\begin{array}{r} 2x-8 \\ x^2+2x-1\overline{)\,2x^3-4x^2+3x-5} \\ \underline{2x^3+4x^2-2x} \\ -8x^2+5x-5 \\ \underline{-8x^2-16x+8} \\ 21x-13 \end{array}$$

즉, 다항식 $A(x)$를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫은 $2x-8$, 나머지는 $21x-13$이다. …… ㉮

(2) $Q(x)=2x-8$, $R(x)=21x-13$이므로

$Q(3)=2\times3-8=-2$

$R(1)=21\times1-13=8$ …… ㉯

$\therefore Q(3)+R(1)=-2+8=6$ …… ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ 몫과 나머지 구하기	60 %
(2)	㉯ $Q(3)$, $R(1)$의 값 구하기	30 %
	㉰ $Q(3)+R(1)$의 값 구하기	10 %

027 $6x^2-5x+1=A(6x+1)+2$

$A(6x+1)=6x^2-5x-1$

$\qquad=(x-1)(6x+1)$

$\therefore A=x-1$

028

$$\begin{array}{r} 4x+2 \\ x^2-x+b\overline{)\,4x^3-2x^2+\qquad ax+\quad 1} \\ \underline{4x^3-4x^2+\qquad 4bx\qquad} \\ 2x^2+(a-4b)x+1 \\ \underline{2x^2-\qquad 2x+2b} \\ (a-4b+2)x+1-2b \end{array}$$

이때 나머지가 $x-1$이므로

$a-4b+2=1$, $1-2b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

029

$$\begin{array}{r} x^2-x+3 \\ x^2+2x-1\overline{)\,x^4+x^3\qquad+7x-2} \\ \underline{x^4+2x^3-x^2\qquad\qquad} \\ -x^3+x^2+7x \\ \underline{-x^3-2x^2+x} \\ 3x^2+6x-2 \\ \underline{3x^2+6x-3} \\ 1 \end{array}$$

$\therefore x^4+x^3+7x-2=(x^2+2x-1)(x^2-x+3)+1$

이때 $x^2+2x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 1이다.

실력 완성 1등급 문제

14~15쪽

030 $-5x^2+26x-9$		**031** ①	**032** ②	**033** ④
034 27	**035** ①	**036** ④	**037** ⑤	**038** 16

030 다항식의 덧셈과 뺄셈

전략 연산 $*$, $\circ$의 정의를 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후, P, Q를 대입하여 정리한다.

풀이 $(P*Q)\circ(Q*P)=(P+2Q)\circ(Q+2P)$

$\qquad=3(P+2Q)-(Q+2P)$

$\qquad=P+5Q$

$P=5x^2+x+11$, $Q=-2x^2+5x-4$를 대입하면

(주어진 식)$=(5x^2+x+11)+5(-2x^2+5x-4)$

$\qquad=5x^2+x+11-10x^2+25x-20$

$\qquad=-5x^2+26x-9$

031 다항식의 곱셈과 곱셈 공식

전략 x^4항이 나오는 경우만 전개한다.

풀이 $(x+2x^2+3x^3+\cdots+100x^{100})^2$

$\qquad=(x+2x^2+3x^3+\cdots+100x^{100})$

$\qquad\quad\times(x+2x^2+3x^3+\cdots+100x^{100})$ …… ㉠

㉠의 전개식에서 x^4항은

$x\times3x^3+2x^2\times2x^2+3x^3\times x=10x^4$

따라서 x^4의 계수는 10이다.

032 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 ⊕ 곱셈 공식의 변형

(전략) 식을 전개한 후, 주어진 값을 이용할 수 있도록 변형한다.

(풀이) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-2)^2-2\times(-2)=8$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=5^2-2\times5=15$

$\therefore\ (ax+by)(bx+ay)=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$

$=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

$=-2\times15+5\times8=10$

033 곱셈 공식의 변형

(전략) 주어진 식을 이용하여 $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 구한다.

(풀이) $x-\frac{1}{x}=3$의 양변을 제곱하면

$x^2+\frac{1}{x^2}-2=9\qquad\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=11$

이때 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=11+2=13$이므로

$\left|x+\frac{1}{x}\right|=\sqrt{13}$

$\therefore\ \left|x^4-\frac{1}{x^4}\right|=\left|x^2-\frac{1}{x^2}\right|\times\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|$

$=\left|x-\frac{1}{x}\right|\times\left|x+\frac{1}{x}\right|\times\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|$

$=3\times\sqrt{13}\times11=33\sqrt{13}$

(참고) 실수 a, b에 대하여 $|ab|=|a||b|$임을 확인해 보자.

(ⅰ) $a\ge0$, $b\ge0$일 때, $ab\ge0$이므로

$|ab|=ab=|a||b|$

(ⅱ) $a\ge0$, $b<0$일 때, $ab\le0$이므로

$|ab|=-ab=a\times(-b)=|a||b|$

(ⅲ) $a<0$, $b\ge0$일 때, $ab\le0$이므로

$|ab|=-ab=(-a)\times b=|a||b|$

(ⅳ) $a<0$, $b<0$일 때, $ab>0$이므로

$|ab|=ab=(-a)\times(-b)=|a||b|$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $|ab|=|a||b|$이다.

034 곱셈 공식의 변형

(전략) x, y, z 중 적어도 하나는 3이므로 $(x-3)(y-3)(z-3)=0$이 성립함을 이용한다.

(풀이) 조건 (가)에서 x, y, z 중 적어도 하나는 3이므로

$(x-3)(y-3)(z-3)=0$ → $x-3$, $y-3$, $z-3$ 중 적어도 하나는 0이다.

$xyz-3xy-3yz-3zx+9x+9y+9z-27=0$

$xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=0$

조건 (나)에서 $3(x+y+z)=xy+yz+zx$이므로

$xyz-3(xy+yz+zx)+3(xy+yz+zx)-27=0$

$xyz-27=0$

$\therefore\ xyz=27$

035 다항식의 나눗셈

(전략) 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$, $g(x)$의 나눗셈에 대한 식을 각각 세운 후, $2f(x)-g(x)$의 나눗셈에 대한 식으로 변형한다.

(풀이) 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면 나머지가 각각 $2x+4$, $ax+b$이므로

$f(x)=(x^2+2)Q_1(x)+2x+4$ …… ㉠

$g(x)=(x^2+2)Q_2(x)+ax+b$ …… ㉡

㉠$\times2-$㉡을 하면

$2f(x)-g(x)$

$=(x^2+2)\{2Q_1(x)-Q_2(x)\}+(4-a)x+8-b$

즉, $2f(x)-g(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는

$(4-a)x+8-b$

따라서 $(4-a)x+8-b=ax+b$이므로

$4-a=a$, $8-b=b\qquad\therefore\ a=2$, $b=4$

$\therefore\ a+b=2+4=6$

036 다항식의 나눗셈

(전략) 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 나눗셈에 대한 식을 세운 후, $xf(x)$의 나눗셈에 대한 식으로 변형한다.

(풀이) 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이므로

$f(x)=(2x-1)Q(x)-2$

위의 식의 양변에 x를 곱하면

$xf(x)=x(2x-1)Q(x)-2x$

$=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1$

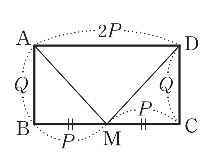
따라서 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2xQ(x)-2$이고, 나머지는 -1이다.

037 다항식의 덧셈과 뺄셈

(1단계) $\overline{\mathrm{MC}}=P$, $\overline{\mathrm{CD}}=Q$라 하고, 주어진 선분의 길이의 합과 차를 P, Q에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{\mathrm{MC}}=P$, $\overline{\mathrm{CD}}=Q$라 하면

$\overline{\mathrm{DA}}=2P$, $\overline{\mathrm{AB}}=Q$, $\overline{\mathrm{BM}}=P$



조건 (가)에서

$\overline{\mathrm{MC}}-\overline{\mathrm{CD}}=x-y+5$

이므로

$P-Q=x-y+5$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\overline{\mathrm{DA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BM}}=3x+y+7$

이므로

$3P+Q=3x+y+7$ …… ㉡

(2단계) P, Q를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

㉠+㉡을 하면 $4P=4x+12$

$\therefore\ P=x+3$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$Q=y-2$

(3단계) 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=Q+2P+Q+2P$$
$$=4P+2Q$$
$$=4(x+3)+2(y-2)$$
$$=4x+2y+8$$

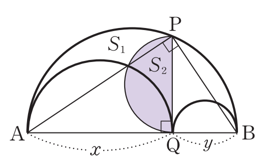
038 곱셈 공식의 활용

(1단계) $\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$라 하고, S_1을 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$라 하면

$$S_1=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{y}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{xy}{2}=\frac{\pi}{4}xy$$

(2단계) △ABP는 직각삼각형임을 이용하여 S_2를 구한다.



오른쪽 그림에서 $\angle APB=90^\circ$이므로 삼각형 ABP는 원의 지름을 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

$\triangle AQP \backsim \triangle PQB$이므로

$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$

$\therefore \overline{PQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{BQ}=xy$

$$\therefore S_2=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{xy}{4}=\frac{\pi}{8}xy$$

(3단계) $\overline{AQ}-\overline{QB}$, S_1-S_2의 값을 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

$$S_1-S_2=\frac{\pi}{4}xy-\frac{\pi}{8}xy=\frac{\pi}{8}xy$$

$S_1-S_2=2\pi$에서

$\frac{\pi}{8}xy=2\pi \qquad \therefore xy=16$

$\overline{AQ}-\overline{QB}=8\sqrt{3}$에서 $x-y=8\sqrt{3}$

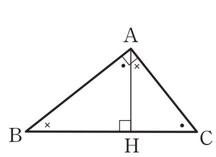
$$\therefore \overline{AB}^2=(\overline{AQ}+\overline{QB})^2$$
$$=(x+y)^2$$
$$=(x-y)^2+4xy$$
$$=(8\sqrt{3})^2+4\times16=256$$

$\therefore \overline{AB}=16$ ($\because \overline{AB}>0$)

참고 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

개념 보충

직각삼각형에서 닮음의 활용



$\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABC \backsim \triangle HBA \backsim \triangle HAC$

이므로 다음이 성립한다.

① $\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$

② $\overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{BC}$

③ $\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}$

02 나머지정리

교과서에서 뽑은 기본 문제 16쪽

039 (1) $a=2$, $b=-3$, $c=4$ (2) $a=3$, $b=-1$, $c=8$

040 (1) -1 (2) $\frac{17}{8}$ **041** (1) 11 (2) 1

042 (1) 몫: x^2-7x+2, 나머지: 2

(2) 몫: $2x^2+4x-2$, 나머지: -6

039 (1) $a-2=0$, $3+b=0$, $c-4=0$이므로

$a=2$, $b=-3$, $c=4$

(2) $a=3$, $-3=b-2$, $7=c-1$이므로

$a=3$, $b=-1$, $c=8$

040 (1) $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=(-1)^3-(-1)^2+1=-1$

(2) $f(x)$를 $2x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=\frac{17}{8}$$

041 (1) $f(-2)=0$이므로

$-8-8+2k-6=0$, $2k=22 \qquad \therefore k=11$

(2) $f(3)=0$이므로

$27-18-3k-6=0$, $3k=3 \qquad \therefore k=1$

042 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & -5 & 4 \\ & & -1 & 7 & -2 \\ \hline & 1 & -7 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2-7x+2, 나머지: 2

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & -4 & -5 \\ & & 1 & 2 & -1 \\ \hline & 2 & 4 & -2 & \boxed{-6} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2+4x-2$, 나머지: -6

유형 분석 기출 문제 17~21쪽

043 3	**044** ⑤	**045** 2	**046** ⑤	**047** -5
048 ⑤	**049** (1) 1 (2) -4		**050** 46	**051** 2
052 ①	**053** ③	**054** $4x-5$	**055** ①	**056** ①
057 41	**058** -2	**059** ②	**060** -1	**061** ④
062 ②	**063** ①	**064** ⑤	**065** 1	**066** -4

043 $x^3-x^2-5x+a=(x-2)(x^2+x+b)$에서

$x^3-x^2-5x+a=x^3-x^2+(b-2)x-2b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-5=b-2$, $a=-2b$

$\therefore a=6$, $b=-3$

$\therefore a+b=6+(-3)=3$

다른풀이 $x^3-x^2-5x+a=(x-2)(x^2+x+b)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8-4-10+a=0 \qquad \therefore a=6$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a=-2b$, $6=-2b \qquad \therefore b=-3$

$\therefore a+b=6+(-3)=3$

참고 다음은 모두 x에 대한 항등식을 나타내는 표현이다.

① 모든 x에 대하여 성립하는 등식

② 임의의 x에 대하여 성립하는 등식

③ 어떤 x의 값에 대하여도 항상 성립하는 등식

④ x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

044 $2x^2-2x+2=ax(x+1)+bx(x-2)+c(x+1)(x-2)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2=-2c \qquad \therefore c=-1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2+2+2=3b \qquad \therefore b=2$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8-4+2=6a \qquad \therefore a=1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1+4+1=6$

다른풀이 주어진 식의 우변을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2-2x+2=(a+b+c)x^2+(a-2b-c)x-2c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=2$, $a-2b-c=-2$, $-2c=2$

$-2c=2$에서 $c=-1$

$c=-1$을 나머지 두 식에 대입하면

$a+b=3$, $a-2b=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1+4+1=6$

1등급 비법 항등식에서 미정계수를 구할 때, 문제의 형태에 따라 계수비교법과 수치대입법 중에서 편리한 방법을 선택하여 풀도록 한다. 보통 문자에 적당한 값을 대입했을 때 식이 간단해지면 수치대입법을 이용하고, 그렇지 않으면 계수비교법을 이용한다.

045 $\dfrac{6x^2+2ax+b}{3x^2+2bx+9}=k$ ($k\neq0$인 상수)라 하면

$6x^2+2ax+b=k(3x^2+2bx+9)$

$\therefore 6x^2+2ax+b=3kx^2+2bkx+9k$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$6=3k$, $a=bk$, $b=9k$

따라서 $k=2$, $a=36$, $b=18$이므로

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{36}{18}=2$

046 주어진 이차방정식의 근이 $x=1$이므로

$x^2+(k-2)x+(k+3)p-q+2=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+k-2+kp+3p-q+2=0$ …… ㉠

㉠을 k에 대하여 정리하면

$(p+1)k+3p-q+1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$p+1=0$, $3p-q+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $p=-1$, $q=-2$

$\therefore pq=(-1)\times(-2)=2$

047 $x+y=1$에서 $y=1-x$ …… ㉠

㉠을 $(2a-b)x+(b-a)y+1=0$에 대입하면

$(2a-b)x+(b-a)(1-x)+1=0$

$\therefore (3a-2b)x-a+b+1=0$ …… ㉮

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a-2b=0$, $-a+b+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-3$ …… ㉯

$\therefore a+b=-2+(-3)=-5$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 주어진 등식을 x에 대한 식으로 나타내어 정리하기	40 %
㉯ 항등식의 성질을 이용하여 a, b의 값 구하기	40 %
㉰ $a+b$의 값 구하기	20 %

048 다항식 x^3+ax^2-2x+b를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면

$x^3+ax^2-2x+b=(x^2+x-2)(x+k)-3x+4$

우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax^2-2x+b=x^3+(k+1)x^2+(k-5)x-2k+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=k+1$, $-2=k-5$, $b=-2k+4$

$k=3$이므로 $a=4$, $b=-2$

$\therefore a-b=4-(-2)=6$

다른풀이 다항식 x^3+ax^2-2x+b를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax^2-2x+b=(x^2+x-2)Q(x)-3x+4$

$=(x-1)(x+2)Q(x)-3x+4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a-2+b=1 \qquad \therefore a+b=2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8+4a+4+b=10 \qquad \therefore 4a+b=14$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-2$

$\therefore a-b=4-(-2)=6$

049 (1) $2x^3-5x^2+4=(x-1)f(x)+a$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2-5+4=a$

$\therefore a=1$ …… ㉮

(2) $a=1$을 ㉠에 대입하면

$2x^3-5x^2+4=(x-1)f(x)+1$

$\therefore\ 2x^3-5x^2+3=(x-1)f(x)$

$2x^3-5x^2+3$을 $x-1$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-3x-3 \\ \hline x-1 & 2x^3-5x^2\qquad +3 \\ & 2x^3-2x^2 \\ \hline & \quad -3x^2 \\ & \quad -3x^2+3x \\ \hline & \qquad\quad -3x+3 \\ & \qquad\quad -3x+3 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

즉, $2x^3-5x^2+3=(x-1)(2x^2-3x-3)$이므로

$f(x)=2x^2-3x-3$ …… ㉯

$\therefore\ f(a)=f(1)=2-3-3=-4$ …… ㉰

채점 기준		배점 비율
(1)	㉮ 항등식의 성질을 이용하여 a의 값 구하기	30 %
(2)	㉯ 다항식 $f(x)$ 구하기	50 %
	㉰ $f(a)$의 값 구하기	20 %

050 $P(x)=(x^2-x-1)(ax+b)+2$ …… ㉠

$P(x+1)$을 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x+1)=(x^2-4)Q(x)-3$

$\qquad=(x+2)(x-2)Q(x)-3$

위의 식의 양변에 $x=-2$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(-1)=-3$, $P(3)=-3$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-a+b+2=-3$

$\therefore\ a-b=5$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$P(3)=5(3a+b)+2=-3$

$\therefore\ 3a+b=-1$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$\therefore\ 50a+b=50+(-4)=46$

051 $f(x)=x^3+3x^2-ax+2$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(-1)=2$

$-1+3+a+2=2 \qquad \therefore\ a=-2$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+2x+2$이므로 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=-8+12-4+2=2$

052 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=5$, $f(2)=7$

$f(1)=5$에서 $1-6+a+b=5$

$\therefore\ a+b=10$ …… ㉠

$f(2)=7$에서 $8-24+2a+b=7$

$\therefore\ 2a+b=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=13$, $b=-3$

$\therefore\ ab=13\times(-3)=-39$

053 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)+g(2)=5$

$f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)g(2)=6$

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}^2-2f(x)g(x)$이므로

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$\{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=\{f(2)+g(2)\}^2-2f(2)g(2)$

$\qquad=5^2-2\times6=13$

054 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$

$\qquad=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ …… ㉮

이때 나머지정리에 의하여 $f(2)=3$, $f(3)=7$이므로

$f(2)=2a+b=3$

$f(3)=3a+b=7$ …… ㉯

두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-5$ …… ㉰

따라서 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 나머지는

$4x-5$이다. …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 나눗셈에 대한 식 세우기	40 %
㉯ 나머지정리를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
㉰ a, b의 값 구하기	20 %
㉱ 나머지 구하기	10 %

1등급 비법 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하고, 나눗셈에 대한 항등식을 세운 후 나머지정리를 이용한다.

055 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+3x+1$

$\qquad=(x+3)(x-1)Q(x)+3x+1$ …… ㉠

이때 $f(2x-5)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times1-5)=f(-3)$

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$f(-3)=3\times(-3)+1=-8$

다른풀이 $f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+3x+1$에서 x 대신 $2x-5$를 대입하면

$f(2x-5)=(2x-5+3)(2x-5-1)Q(2x-5)$

$\qquad\qquad+3(2x-5)+1$

$\qquad=4(x-1)(x-3)Q(2x-5)+6x-14$

$f(2x-5)=g(x)$라 하면 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(1)=6\times1-14=-8$

056 $f(x)+2$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)+2=5 \quad \therefore f(-1)=3$

$3f(x)-2$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여

$3f\left(\frac{1}{2}\right)-2=1 \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$f(x)$를 $(x+1)(2x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $ax+b$이므로

$f(x)=(x+1)(2x-1)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=3$에서 $-a+b=3$ …… ㉠

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$에서 $\frac{1}{2}a+b=1 \quad \therefore a+2b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

057 $f(x)=x^3+ax^2-2bx-4$라 하면 $x-1$, $x-2$가 모두 $f(x)$의 인수이므로 인수정리에 의하여

$f(1)=0$, $f(2)=0$

$f(1)=0$에서 $1+a-2b-4=0$

$\therefore a-2b=3$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $8+4a-4b-4=0$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=25+16=41$

058 $f(x)=x^3+2(k-1)x^2+k^2$이라 하면 $x+1$이 $f(x)$의 인수이므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$

$-1+2(k-1)+k^2=0$, $k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0 \quad \therefore k=-3$ 또는 $k=1$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-3+1=-2$

059 $f(x)+2$가 $x-a$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(a)+2=0 \quad \therefore f(a)=-2$ …… ㉠

$xf(x)+2$가 $x-a$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$af(a)+2=0 \quad \therefore af(a)=-2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a\times(-2)=-2 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$f(1)=-2$

060 $f(1)=0$, $f(a)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x-a$를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차식이므로

$f(x)=(x-1)(x-a)$ …… ㉠ …… ㉮

또, $f(0)=7$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=a=7$ …… ㉯

$\therefore f(x)=(x-1)(x-7)$

따라서 $f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$R=f(5)=4\times(-2)=-8$ …… ㉰

$\therefore a+R=7+(-8)=-1$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(x)$의 식 세우기	30 %
㉯ a의 값 구하기	20 %
㉰ R의 값 구하기	40 %
㉱ $a+R$의 값 구하기	10 %

061 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+6$이라 하면 $f(x)$가 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$, $f(1)=0$

$f(-1)=0$에서 $-2+a-b+6=0$

$\therefore a-b=-4$ …… ㉠

$f(1)=0$에서 $2+a+b+6=0$

$\therefore a+b=-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-2$

$\therefore ab=(-6)\times(-2)=12$

062 $f(x)+x$가 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)-1=0$, $f(2)+2=0$

$\therefore f(-1)=1$, $f(2)=-2$

$f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=1$에서 $-a+b=1$ …… ㉠

$f(2)=-2$에서 $2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$

따라서 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 $-x$이다.

063 $f(x)$는 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$, $f(3)=0$

$f(x)-2$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)-2=0 \quad \therefore f(1)=2$

$f(x)+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$\quad\quad=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)+1=-a+b$

$f(-1)=0$이므로 $1=-a+b$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+1=a+b$

$f(1)=2$이므로 $2+1=a+b$

$\therefore a+b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 $f(x)+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $x+2$이다.

064 조립제법을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{\frac{1}{2}} & 2 & -1 & -2 & 3 \\ & & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \hline & 2 & 0 & \boxed{-2} & \boxed{2} \end{array}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=2$이므로

$a-b+c=\frac{1}{2}-(-2)+2=\frac{9}{2}$

065 $2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로 조립제법을 이용하여 $2x^3-3x^2-2x+1$을 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면 위와 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{1}{2} & 2 & -3 & -2 & 1 \\ & & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}$$

즉, 몫은 $2x^2-4x$, 나머지는 1이므로

$2x^3-3x^2-2x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x)+1$

$=(2x+1)(x^2-2x)+1$ …… ㉮

따라서 $2x^3-3x^2-2x+1$을 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)=x^2-2x$, 나머지는 $R=1$이므로

$Q(2)+R=(2^2-2\times2)+1=1$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 조립제법을 이용하여 주어진 식을 $(2x+1)Q(x)+R$ 꼴로 나타내기	70 %
㉯ $Q(2)+R$의 값 구하기	30 %

1등급 비법 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)+R$

$=(ax+b)\times\frac{1}{a}Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다. ← 몫은 $\frac{1}{a}$배, 나머지는 같다.

066 조립제법을 이용하여 x^3-2x^2+3x-4를 $x-1$로 나누는 과정을 반복하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & \boxed{-2} \\ & & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & \boxed{2} & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{1} & & \end{array}$$

이때 x^3-2x^2+3x-4를 $x-1$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3-2x^2+3x-4=(x-1)(x^2-x+2)-2$

$=(x-1)\{(x-1)x+2\}-2$

$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+1\}+2]-2$

$=(x-1)^3+(x-1)^2+2(x-1)-2$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=-2$이므로

$abcd=1\times1\times2\times(-2)=-4$

실력 완성 1등급 문제

22~23쪽

067 ③	**068** -1	**069** x^2+2	**070** 26	**071** $\frac{3}{4}$
072 ②	**073** 9	**074** ③		

067 미정계수법

전략 주어진 등식의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입한다.

풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1+3-2)^6=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{18}$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{18}=2^6$ …… ㉠

또, 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(1-3+2)^6=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{18}$

$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{18}=0$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18})=2^6$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18}=2^5=32$

1등급 비법 항등식 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$에서 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ 또는 $a_n-a_{n-1}+\cdots-a_1+a_0$의 값을 구할 때는 구하는 식의 모양이 생기도록 등식의 양변에 $x=1$ 또는 $x=-1$을 대입해 본다.

068 나머지정리

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 나눗셈에 대한 식을 세운 후, 나눗셈 식에서의 항등식의 성질과 몫 $Q(x)$에 대한 나머지정리를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $3x+2$이므로

$f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+3x+2$

$\quad=(x+1)(x-3)Q(x)+3x+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-1$

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여

$Q(2)=3$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=-3Q(2)+8$

$\quad=(-3)\times3+8=-1$

$f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q'(x)+ax+b$

$\quad=(x+1)(x-2)Q'(x)+ax+b$

$f(-1)=-1$이므로 $-a+b=-1$

$f(2)=-1$이므로 $2a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-1$

따라서 $f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 나머지는 -1이다.

069 나머지정리

(전략) 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 이차 이하의 다항식임을 이용한다.

(풀이) $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$이므로 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $2x+1$이다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x-1)^2+2x+1$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+2x+1 \quad \cdots\cdots ㉠$

또, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)=a+5=6 \qquad \therefore a=1$

따라서 구하는 나머지는 ㉠에서

$(x-1)^2+2x+1=x^2+2$

070 나머지정리

(전략) 삼차다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 모두 일차식이므로 몫을 $ax+b$라 하면 나머지도 $ax+b$이다.

(풀이) $f(x)$는 삼차다항식이므로 조건 (나)에서 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 나머지도 $ax+b$이다.

$\therefore f(x)=(x-1)^2(ax+b)+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$

조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로

㉠에서 $a+b=2$

$\therefore b=2-a \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$f(x)=(x-1)^2\{ax+(2-a)\}+ax+(2-a)$

$\quad=(x-1)^2\{a(x-1)+2\}+a(x-1)+2$

$\quad=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2$

따라서 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지는

$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$

이때 $R(0)=R(3)$이므로

$2-a+2=8+2a+2$, $-3a=6$

$\therefore a=-2$

즉, $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$R(5)=2\times4^2-2\times4+2=26$

071 인수정리 ⊕ 조립제법

(전략) 인수정리를 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸 후, 주어진 다항식에 대입하여 조립제법을 이용한다.

(풀이) $f(x)=x^3+2ax^2-5x+2b$라 하면 $f(x)$가 $(x+1)^2$, 즉 $(x+1)(x+1)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$

$-1+2a+5+2b=0$, $2b=-2a-4$

$\therefore b=-a-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\therefore f(x)=x^3+2ax^2-5x+2b$

$\quad=x^3+2ax^2-5x+2(-a-2)$

$\quad=x^3+2ax^2-5x-2a-4$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 2a & -5 & -2a-4 \\
 & & -1 & -2a+1 & 2a+4 \\
\hline
-1 & 1 & 2a-1 & -2a-4 & 0 \\
 & & -1 & -2a+2 & \\
\hline
 & 1 & 2a-2 & -4a-2 &
\end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$-4a-2=0$, $4a=-2$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$

$\therefore ab=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$

072 조립제법 ⊕ 나머지정리

(전략) 조립제법의 원리를 이용하여 ⓐ, ⓑ의 순서로 값을 구한 후, 나머지정리를 이용한다.

(풀이)

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & \square & \square & -2 & \square \\
 & & \square & 6 & \square \\
\hline
 & 1 & ⓐ & ⓑ & 8
\end{array}$$

$1\times ⓐ=6$에서 $ⓐ=6$

$-2+6=ⓑ$에서 $ⓑ=4$

$\therefore g(x)=x^2+6x+4$

따라서 $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$g(-2)=4-12+4=-4$

073 미정계수법 ⊕ 조건을 만족시키는 항등식

(1단계) $P_n(x)$에 $n=1, 2, 3$을 각각 대입하여 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$를 구한 후, 주어진 식을 나타낸다.

$P_1(x)=x-1$,

$P_2(x)=(x-1)(x-2)$,

$P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

이므로

x^3-2x^2+3x-2

$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$ …… ㉠

(2단계) 수치대입법을 이용하여 a, b, c, d의 값을 각각 구한다.

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-2+3-2=a \quad \therefore a=0$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8-8+6-2=a+b \quad \therefore b=4$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$27-18+9-2=a+2b+2c \quad \therefore c=4$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-2=a-b+2c-6d \quad \therefore d=1$

$\therefore a+b+c+d=0+4+4+1=9$

074 나머지정리 ⊕ 인수정리

(1단계) 주어진 조건을 이용하여 $f(1)$, $g(1)$의 값을 구한다.

$2f(x)-g(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$2f(1)-g(1)=0$ …… ㉠

$f(x)+2g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)+2g(1)=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(1)=1$, $g(1)=2$

(2단계) 인수정리를 이용하여 보기의 식이 $x-1$로 나누어떨어지는지 알아본다.

ㄱ. $f(x)-2x^2+2x-1$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-2+2-1=1-1=0$

따라서 $f(x)-2x^2+2x-1$은 $x-1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $g(x)-4x^2$에 $x=1$을 대입하면

$g(1)-4=2-4=-2$

따라서 $g(x)-4x^2$은 $x-1$로 나누어떨어지지 않는다.

ㄷ. $4x^2-2f(x)g(x)$에 $x=1$을 대입하면

$4-2f(1)g(1)=4-2\times1\times2=0$

따라서 $4x^2-2f(x)g(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

이상에서 $x-1$로 나누어떨어지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 인수분해

교과서에서 뽑은 기본 문제

24쪽

075 (1) $(4a+1)^2$ (2) $(a-5b)^2$ (3) $(3x+2)(3x-2)$ (4) $(x+4)(x-1)$ (5) $(2x+3)(x-2)$

076 (1) $(x+2)^3$ (2) $(x-3)^3$ (3) $(2x+5)(4x^2-10x+25)$ (4) $(x-3)(x^2+3x+9)$ (5) $(a+2b+c)^2$ (6) $(a+2b+1)(a^2+4b^2+1-2ab-2b-a)$

077 (1) $(x+y+1)(x+y-2)$ (2) $(x+2)(x-2)(x^2+1)$

075 (1) $16a^2+8a+1=(4a)^2+2\times4a\times1+1^2$

$=(4a+1)^2$

(2) $a^2-10ab+25b^2=a^2-2\times a\times5b+(5b)^2$

$=(a-5b)^2$

(3) $9x^2-4=(3x)^2-2^2$

$=(3x+2)(3x-2)$

(4) $x^2+3x-4=x^2+\{4+(-1)\}x+4\times(-1)$

$=(x+4)(x-1)$

(5) $\underline{2x^2-x-6}=(2x+3)(x-2)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & \rightarrow & 3 \\ 1 & -2 & \rightarrow & \underline{-4} \; (+ \\ & & & -1 \end{array}$$

076 (1) $x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\times x^2\times2+3\times x\times2^2+2^3$

$=(x+2)^3$

(2) $x^3-9x^2+27x-27=x^3-3\times x^2\times3+3\times x\times3^2-3^3$

$=(x-3)^3$

(3) $8x^3+125=(2x)^3+5^3$

$=(2x+5)\{(2x)^2-2x\times5+5^2\}$

$=(2x+5)(4x^2-10x+25)$

(4) $x^3-27=x^3-3^3$

$=(x-3)(x^2+x\times3+3^2)$

$=(x-3)(x^2+3x+9)$

(5) $a^2+4b^2+c^2+4ab+4bc+2ca$

$=a^2+(2b)^2+c^2+2\times a\times2b+2\times2b\times c+2\times c\times a$

$=(a+2b+c)^2$

(6) $a^3+8b^3+1-6ab$

$=a^3+(2b)^3+1^3-3\times a\times2b\times1$

$=(a+2b+1)\{a^2+(2b)^2+1^2-a\times2b-2b\times1-1\times a\}$

$=(a+2b+1)(a^2+4b^2+1-2ab-2b-a)$

077 (1) $x+y=X$로 놓으면

$(x+y)^2-(x+y)-2=X^2-X-2$

$=(X+1)(X-2)$

$=(x+y+1)(x+y-2)$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$x^4-3x^2-4=X^2-3X-4$

$=(X+1)(X-4)$

$=(x^2+1)(x^2-4)$

$=(x+2)(x-2)(x^2+1)$

유형 분석 기출 문제

25~29쪽

078 ⑤	079 ㄹ, ㅁ	080 $x^2(x-1)(x^3+x^2+2)$	081 -2
082 ③	083 ⑤	084 $(ab-a+1)(ab-b+1)$	
085 ④	086 36	087 $2x^2-8x-2$	088 ④
089 12	090 ③	091 2 / 092 ①	093 ③
094 ③	095 ③	096 $(x+1)(x-3)(x^2+x-4)$	
097 $(x+1)^2(x-1)^2$	098 ②	099 895	100 ④
101 ①	102 ⑤		

078 ① $a^3+9a^2+27a+27=(a+3)^3$

② $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

③ $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

$=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times(-c)+2\times(-c)\times a$

$=(a-b-c)^2$

④ $ab^2-ac^2-b^2c+c^3=a(b^2-c^2)-c(b^2-c^2)$

$=(a-c)(b^2-c^2)$

$=(a-c)(b+c)(b-c)$

⑤ $a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

079 $ab^4-8ab=ab(b^3-8)$

$=ab(b^3-2^3)$

$=ab(b-2)(b^2+2b+2^2)$

$=ab(b-2)(b^2+2b+4)$

따라서 인수가 아닌 것은 ㄹ, ㅁ이다.

080 $x^6+2x^3-x^4-2x^2=x^6-x^4+2x^3-2x^2$

$=x^4(x^2-1)+2x^2(x-1)$ …… ㉮

$=x^4(x+1)(x-1)+2x^2(x-1)$

$=x^2(x-1)\{x^2(x+1)+2\}$

$=x^2(x-1)(x^3+x^2+2)$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 항을 적당히 나누어 각각을 공통인수로 묶기	40 %
㉯ 인수분해될 때까지 인수분해하여 나타내기	60 %

다른풀이 $x^6+2x^3-x^4-2x^2$

$=(x^6+2x^3+1)-(x^4+2x^2+1)$

$=(x^3+1)^2-(x^2+1)^2$

$=(x^3+1+x^2+1)(x^3+1-x^2-1)$

$=(x^3+x^2+2)(x^3-x^2)$

$=x^2(x-1)(x^3+x^2+2)$

1등급 비법 항이 네 개일 때, 인수분해하는 방법은 다음과 같다.
[방법 1] 두 개씩 짝지어 공통인수를 찾는다.
[방법 2] 적당한 항을 더하거나 빼어서 A^2-B^2 꼴로 변형한 후, 인수분해한다.

081 $x^2+y^2+4z^2-2xy-4yz+4zx$

$=x^2+(-y)^2+(2z)^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times 2z+2\times 2z\times x$

$=(x-y+2z)^2$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$이므로

$abc=1\times(-1)\times 2=-2$

082 $a^3-b^3+c^3+3abc=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$ …… ㉠

이고 $a=x-3$, $b=2x-5$, $c=x-2$로 놓으면

$a-b+c=(x-3)-(2x-5)+(x-2)=0$

이므로 ㉠에서

$(x-3)^3-(2x-5)^3+(x-2)^3+3(x-3)(2x-5)(x-2)=0$

$\therefore (x-3)^3-(2x-5)^3+(x-2)^3$

$=-3(x-2)(x-3)(2x-5)$

다른풀이 인수분해 공식을 이용하면

$(x-3)^3-(2x-5)^3+(x-2)^3$

$=\{(x-3)-(2x-5)\}\{(x-3)^2+(x-3)(2x-5)+(2x-5)^2\}+(x-2)^3$

$=(-x+2)(x^2-6x+9+2x^2-11x+15+4x^2-20x+25)+(x-2)^3$

$=-(x-2)(7x^2-37x+49)+(x-2)^3$

$=(x-2)\{-(7x^2-37x+49)+(x-2)^2\}$

$=(x-2)(-6x^2+33x-45)$

$=-3(x-2)(2x^2-11x+15)$

$=-3(x-2)(x-3)(2x-5)$

참고 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서 b 대신 $-b$를 대입하면 다음이 성립한다.

$a^3-b^3+c^3+3abc=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

083 다항식에서 공통부분을 찾아 $\boxed{x^2+3x}=X$로 놓으면

$(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)-2$

$=(X+3)(X+4)-2$

$=X^2+7X+10$

$=(X+2)(X+5)$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x+5)$

$=(\boxed{x+1})(x+2)(x^2+3x+5)$

따라서 $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=x+1$이므로

$\dfrac{f(2)}{g(1)}=\dfrac{2^2+3\times 2}{1+1}=\dfrac{10}{2}=5$

084 $ab+1=X$로 놓으면

$(ab-a-b+1)(ab+1)+ab=(X-a-b)X+ab$

$=X^2-(a+b)X+ab$

$=(X-a)(X-b)$

$=(ab-a+1)(ab-b+1)$

085 $(x^2-x)^2+2x^2-2x-15=(x^2-x)^2+2(x^2-x)-15$
$x^2-x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2+2X-15$
$=(X+5)(X-3)$
$=(x^2-x+5)(x^2-x-3)$
따라서 $a=-1$, $b=5$, $c=-3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$, $c=5$ 이므로
$a+b+c=1$

086 $(x-1)(x-3)(x+3)(x+5)+a$
$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-3)(x+5)\}+a$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)+a$
$x^2+2x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-3)(X-15)+a$
$=X^2-18X+45+a$ …… ㉠
주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되므로 ㉠이 X에 대한 일차식의 완전제곱식으로 인수분해되어야 한다.
즉, $\left(\frac{-18}{2}\right)^2=45+a$이므로
$81=45+a$ $\quad\therefore a=36$

1등급 비법 식에 ( )( )( )( ) 꼴이 있으면 먼저 두 일차식의 상수항의 합이 서로 같도록 두 개씩 짝지어 전개한 후, 공통부분을 찾는다.

087 $(x^2-6x+5)(x^2-2x-3)+12$
$=(x-1)(x-5)(x+1)(x-3)+12$
$=\{(x-1)(x-3)\}\{(x-5)(x+1)\}+12$
$=(x^2-4x+3)(x^2-4x-5)+12$ …… ㉮
$x^2-4x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+3)(X-5)+12$
$=X^2-2X-3$
$=(X+1)(X-3)$
$=(x^2-4x+1)(x^2-4x-3)$ …… ㉯
따라서 $f(x)=x^2-4x+1$, $g(x)=x^2-4x-3$ 또는 $f(x)=x^2-4x-3$, $g(x)=x^2-4x+1$이므로
$f(x)+g(x)=2x^2-8x-2$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 공통부분이 나오도록 식 정리하기	40 %
㉯ 공통부분을 X로 놓고 인수분해하기	40 %
㉰ $f(x)+g(x)$ 구하기	20 %

088 $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면
$x^4-13x^2y^2+36y^4=X^2-13XY+36Y^2$
$=(X-4Y)(X-9Y)$
$=(x^2-4y^2)(x^2-9y^2)$
$=(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)$
따라서 $x^4-13x^2y^2+36y^4$의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

089 $x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$ …… ㉮
따라서 $a=2$, $b=3$, $c=-2$, $d=3$ 또는 $a=-2$, $b=3$, $c=2$, $d=3$이므로
$|ab-cd|=12$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 주어진 식을 A^2-B^2 꼴로 변형하여 인수분해하기	60 %
㉯ $\lvert ab-cd\rvert$의 값 구하기	40 %

090 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^4-2x^2y-4x^2-3y^2+4y+4$
$=x^4-(2y+4)x^2-(3y^2-4y-4)$
$=x^4-(2y+4)x^2-(y-2)(3y+2)$
$=(x^2+y-2)(x^2-3y-2)$
따라서 인수인 것은 ③ x^2+y-2이다.
다른풀이 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$-3y^2-2x^2y+4y+x^4-4x^2+4$
$=-3y^2-(2x^2-4)y+(x^2-2)^2$
$=\{y+(x^2-2)\}\{-3y+(x^2-2)\}$
$=(x^2+y-2)(x^2-3y-2)$
오답 피하기 특정한 문자에 대하여 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때, 다른 문자는 상수로 생각한다.

개념 보충
다항식의 정리
① 내림차순: 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것
② 오름차순: 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것

091 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-3xy+2y^2-ax+7y-15$
$=x^2-(3y+a)x+(2y^2+7y-15)$
$=x^2-(3y+a)x+(y+5)(2y-3)$
주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로
$-(y+5)+\{-(2y-3)\}=-(3y+a)$
$3y+2=3y+a$
$\therefore a=2$

1등급 비법 여러 개의 문자를 포함한 식을 인수분해할 때는 먼저 차수가 가장 낮은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다. 식에 포함된 문자의 차수가 모두 같을 때는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다. 이때 상수항이 인수분해되면 상수항만 따로 인수분해한 후, 전체를 인수분해한다.

092 주어진 식을 전개한 후, a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$
$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$

참고 전개한 식을 b 또는 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

093 $f(x)=x^3+3x^2-6x-8$이라 하면
$f(-1)=-1+3+6-8=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & -1 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+2x-8)$
$\qquad=(x+1)(x+4)(x-2)$
$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+4^2+(-2)^2=21$

094 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서 $4\times\frac{1}{8}-a\times\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}+1=0$

$\frac{1}{2}-\frac{a}{4}=0 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=4x^3-2x^2-2x+1$이고 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4 & -2 & -2 & 1 \\ & & 2 & 0 & -1 \\ \hline & 4 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2-2)$
$\qquad=(2x-1)(2x^2-1)$

095 $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$이라 하면
$f(-1)=0, f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\ & & -1 & 3 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 5 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$
따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로
$a+b+c=-2+(-1)+3=0$

096 $f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+12$라 하면
$f(-1)=0, f(2)=-6$ …… ㉮
$f(-1)=0$에서
$1-(-1)+a-b+12=0$
$\therefore a-b=-14$ …… ㉠
$f(2)=-6$에서
$16-8+4a+2b+12=-6$
$\therefore 2a+b=-13$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=5$ …… ㉯
$\therefore f(x)=x^4-x^3-9x^2+5x+12$
$f(-1)=0$, $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -9 & 5 & 12 \\ & & -1 & 2 & 7 & -12 \\ \hline 3 & 1 & -2 & -7 & 12 & \boxed{0} \\ & & 3 & 3 & -12 & \\ \hline & 1 & 1 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore x^4-x^3-9x^2+5x+12=(x+1)(x-3)(x^2+x-4)$
…… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(-1)=0$, $f(2)=-6$임을 알기	20%
㉯ a, b의 값 구하기	40%
㉰ 조립제법을 이용하여 주어진 다항식을 인수분해하기	40%

097 다항식 x^4+ax^2+b가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & a & 0 & b \\ & & -1 & 1 & -a-1 & a+1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & a+1 & -a-1 & \boxed{a+b+1} \\ & & -1 & 2 & -a-3 & \\ \hline & 1 & -2 & a+3 & \boxed{-2a-4} & \end{array}$$

$\therefore a+b+1=0,\ -2a-4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$
$\therefore x^4-2x^2+1=(x+1)^2(x^2-2x+1)$
$\qquad=(x+1)^2(x-1)^2$

098 $x^3-x^2y+xy^2-y^3=x^2(x-y)+y^2(x-y)$
$\qquad=(x-y)(x^2+y^2)$
$\qquad=(x-y)\{(x-y)^2+2xy\}$
$\qquad=3(3^2+2\times2)=39$

099 $30=x$로 놓으면
$27\times29\times31\times33+16$
$=(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)+16$
$=(x^2-1)(x^2-9)+16$
$=x^4-10x^2+25=(x^2-5)^2$ …… ㉮
$=(30^2-5)^2=(900-5)^2=895^2$
$\therefore N=895$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ $30=x$로 놓고 주어진 좌변을 인수분해하기	60 %
㉯ N의 값 구하기	40 %

1등급 비법 수의 계산이 복잡한 경우에는 수를 한 문자로 치환하고 인수분해한 후, 수를 다시 대입하여 계산한다.

100 $2020=x$로 놓으면

$$\frac{2020^4+2020^2+1}{2020^3-1}-\frac{1}{2019}$$
$$=\frac{x^4+x^2+1}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}$$

$$\begin{aligned}x^4+x^2+1&=x^4+2x^2+1-x^2\\&=(x^2+1)^2-x^2\\&=(x^2-x+1)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{x-1}\\&=\frac{x^2-x+1}{x-1}-\frac{1}{x-1}\\&=\frac{(x^2-x+1)-1}{x-1}=\frac{x^2-x}{x-1}\\&=\frac{x(x-1)}{x-1}=x\end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 2020이다.

101
$$\begin{aligned}b^2-ab-c^2+ac&=(c-b)a+b^2-c^2\\&=(c-b)a+(b+c)(b-c)\\&=(c-b)a-(c-b)(b+c)\\&=(c-b)\{a-(b+c)\}\\&=(c-b)(a-b-c)=0\end{aligned}$$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a<b+c$

즉, $a-b-c\neq0$이므로

$c-b=0$ $\quad\therefore b=c$

따라서 이 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

개념 보충

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$이면 이등변삼각형

② $a=b=c$이면 정삼각형

③ $c^2=a^2+b^2$이면 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

102 $f(x)=x^3+7x^2+16x+12$라 하면

$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 1 & 7 & 16 & 12\\ & & -2 & -10 & -12\\\hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=(x+2)(x^2+5x+6)\\&=(x+2)(x+2)(x+3)\\&=(x+2)^2(x+3)\end{aligned}$$

(원기둥의 부피)$=\pi\times$(밑면의 반지름의 길이)$^2\times$(높이)

이므로 $(x^3+7x^2+16x+12)\pi=(x+2)^2(x+3)\pi$에서 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $x+2$, 높이는 $x+3$이다.

따라서 원기둥의 겉넓이는

$$\begin{aligned}(\text{겉넓이})&=(\text{밑넓이})\times2+(\text{옆넓이})\\&=\pi(x+2)^2\times2+2\pi(x+2)(x+3)\\&=2(x+2)\{(x+2)+(x+3)\}\pi\\&=2(x+2)(2x+5)\pi\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로

$ab=2\times2=4$

개념 보충

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥에 대하여

① (겉넓이)$=$(밑넓이)$\times2+$(옆넓이)
$=2\pi r^2+2\pi rh$

② (부피)$=$(밑넓이)$\times$(높이)
$=\pi r^2h$

실력 완성 1등급 문제

30~31쪽

103 ⑤	104 ②	105 ②	106 398	107 20
108 $\sqrt{15}$	109 ⑤	110 $5\sqrt{3}$	111 ④	112 2

103 인수분해 공식 ⊕ 나머지정리

전략 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 인수분해하여 $h(x)$의 식을 세운 후, 나머지정리를 이용한다.

풀이 좌변을 인수분해하면

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$
$=\{f(x)+g(x)\}[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]$

이때

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(x^2+x)+(x^2-2x-1)\\&=2x^2-x-1\end{aligned}$$

이므로

(좌변)$=(2x^2-x-1)[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]$

$\therefore h(x)=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2$

$h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $h(1)$이고

$f(1)=2$, $g(1)=-2$이므로

$$\begin{aligned}h(1)&=\{f(1)\}^2-f(1)g(1)+\{g(1)\}^2\\&=2^2-2\times(-2)+(-2)^2=12\end{aligned}$$

개념 보충

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(\alpha)$

104 공통부분이 있는 식의 인수분해

전략 $(x+y)^3=X$, $(x-y)^3=Y$로 놓고 인수분해 공식을 이용하여 주어진 식을 인수분해한다.

풀이 $(x+y)^3=X$, $(x-y)^3=Y$로 놓으면

$\{(x+y)^3+(x-y)^3\}^2-\{(x+y)^3-(x-y)^3\}^2$

$=(X+Y)^2-(X-Y)^2$

$=\{(X+Y)+(X-Y)\}\{(X+Y)-(X-Y)\}$

$=2X\times 2Y=4XY$

$=4(x+y)^3(x-y)^3$

$=4\{(x+y)(x-y)\}^3$

$=4(x^2-y^2)^3$

$=4\times 2^3=32$

105 인수정리를 이용한 인수분해

전략 일차식 $f(x)$를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 나타낸 후, 인수정리를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)$가 일차식이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$x^3-x^2+4f(x)=x^3-x^2+4(ax+b)$

$=x^3-x^2+4ax+4b$

위의 식이 $x-1$을 인수로 가지므로

$1-1+4a+4b=0 \qquad \therefore b=-a$ …… ㉠

즉, 다항식 $x^3-x^2+4ax-4a$는 $x-1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 4a & -4a \\ & & 1 & 0 & 4a \\ \hline & 1 & 0 & 4a & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3-x^2+4ax-4a=(x-1)(x^2+4a)$

$=(x-1)(x-m)(x-n)$

$=(x-1)\{x^2-(m+n)x+mn\}$

따라서 $x^2-(m+n)x+mn=x^2+4a$이므로

$m+n=0$, $mn=4a$

이때 $mn=-16$이므로

$4a=-16 \qquad \therefore a=-4$

㉠에서 $b=4$

$\therefore f(x)=-4x+4$

106 인수분해의 활용

전략 21을 x로 치환하여 인수분해한 후, x에 다시 21을 대입한다.

풀이 $21=x$로 놓으면

$21^3+21^2-21+2=x^3+x^2-x+2$

이고, 이 다항식은 $x+2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+x^2-x+2=(x+2)(x^2-x+1)$

$=(21+2)(21^2-21+1)$

$=23\times 421$

따라서 $a=23$, $b=421$ 또는 $a=421$, $b=23$이므로

$|a-b|=398$

107 여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해 ⊕ 인수분해의 활용

전략 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한 후, 147을 소인수분해한 식과 비교한다.

풀이 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+6ab+a^2+6a+9b+9=(a^2+6a+9)b+a^2+6a+9$

$=(a+3)^2b+(a+3)^2$

$=(a+3)^2(b+1)$

이때 $147=3\times 7^2$이므로

$(a+3)^2(b+1)=3\times 7^2$

a, b는 자연수이므로 $a+3=7$, $b+1=3$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=16+4=20$

108 인수분해의 활용

전략 $a^2=X$, $b^2=Y$, $9=Z$로 놓고 인수분해한 후, 삼각형 ABC의 세 변의 길이 사이의 관계를 알아낸다.

풀이 $a^2=X$, $b^2=Y$, $9=Z$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2+Y^2+Z^2+2XY-2ZX-2YZ$

$=(X+Y-Z)^2$

$=(a^2+b^2-9)^2=0$

$\therefore a^2+b^2=9$ …… ㉠

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 3인 직각삼각형이다.

이때 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3}{2}$이므로

$\frac{1}{2}ab=\frac{3}{2} \qquad \therefore ab=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=9+2\times 3=15$

$\therefore a+b=\sqrt{15}$ ($\because a>0$, $b>0$)

109 인수분해의 활용

전략 연산 $*$의 정의를 이용하여 주어진 식을 나타낸 후, 인수분해한다.

풀이 $(A+B)^2-AB=A^2+AB+B^2$이므로

$(x+2)^2*(x-1)^2=(x+2)^4+(x+2)^2(x-1)^2+(x-1)^4$

$x+2=X$, $x-1=Y$로 놓으면

$(x+2)^4+(x+2)^2(x-1)^2+(x-1)^4$

$=X^4+X^2Y^2+Y^4$

$=X^4+2X^2Y^2+Y^4-X^2Y^2$

$=(X^2+Y^2)^2-(XY)^2$

$=(X^2+XY+Y^2)(X^2-XY+Y^2)$

$=\{(x+2)^2+(x+2)(x-1)+(x-1)^2\}$

$\times\{(x+2)^2-(x+2)(x-1)+(x-1)^2\}$

$=(x^2+4x+4+x^2+x-2+x^2-2x+1)$

$\times(x^2+4x+4-x^2-x+2+x^2-2x+1)$

$=(3x^2+3x+3)(x^2+x+7)$

$=3(x^2+x+1)(x^2+x+7)$

110 인수분해의 활용

전략 피타고라스 정리를 이용하여 a, b와 c, d에 대한 식을 각각 세운 후, 인수분해를 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 두 직사각형 P, Q의 대각선의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=10$, $c^2+d^2=10$

$$\begin{aligned}(ad-bc)^2+(ac+bd)^2&=a^2d^2+b^2c^2+a^2c^2+b^2d^2\\&=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)\\&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\&=10\times10=100\end{aligned}$$

$\therefore (ac+bd)^2=100-(ad-bc)^2$

이때 $ad-bc=5$이므로

$(ac+bd)^2=100-5^2=75$

$\therefore ac+bd=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ ($\because ac+bd>0$)

111 인수분해

1단계 $(x+a)(x-b)$를 전개하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$이고 주어진 100개의 다항식은 일차항의 계수가 모두 1이므로

$a-b=1 \qquad \therefore a=b+1$

$\therefore ab=b(b+1)$

2단계 상수항이 $-b(b+1)$ 꼴인 다항식을 찾는다.

주어진 100개의 다항식 중에서 상수항이 $-b(b+1)$ 꼴인 경우는

$-1\times2,\ -2\times3,\ -3\times4,\ \cdots,\ -9\times10$

의 9가지이다.

따라서 $(x+a)(x-b)$ 꼴로 인수분해되는 다항식은

$x^2+x-2,\ x^2+x-6,\ x^2+x-12,\ \cdots,\ x^2+x-90$

의 9개이다.

1등급 비법 $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$와 x^2+x-k ($k=1, 2, 3, \cdots, 100$)의 계수를 비교하여 상수항이 $-b(b+1)$, 즉 $-$(연속한 두 자연수의 곱)의 꼴로 나타내어지는 것을 찾는다.

112 인수분해의 활용 ⊕ 곱셈 공식의 변형

1단계 네 상자의 부피를 각각 구한 후, 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

상자 A의 부피는 a^3, 상자 B의 부피는 b^3, 상자 C의 부피는 2^3, 상자 D의 부피는 ab이므로

$a^3+b^3+2^3=6ab$

$\therefore a^3+b^3+2^3-6ab=0$

2단계 좌변을 인수분해하여 식을 정리한다.

위의 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+2^3-3\times a\times b\times2$

$=(a+b+2)(a^2+b^2+2^2-ab-2b-2a)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+2)\{(a-b)^2+(b-2)^2+(a-2)^2\}=0$

3단계 상자 A의 한 모서리의 길이를 구한다.

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b+2>0$

$\therefore (a-b)^2+(b-2)^2+(a-2)^2=0$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 상자 A의 한 모서리의 길이는 2이다.

1등급 비법 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^3-ab-bc-ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

실전 대비 마무리 문제

32~35쪽

113 ②	114 ④	115 ③	116 ②	117 ①
118 ④	119 ①	120 ②	121 -6	122 ③
123 ③	124 ③	125 ①	126 ②	127 ①
128 1				

113 다항식의 곱셈과 곱셈 공식

전략 x^3항이 나오는 경우만 전개한다.

풀이 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{100})$에서 $(1+x^4)(1+x^5)\cdots(1+x^{100})$의 전개식에서는 x^3항이 나올 수 없다.

즉, $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{100})$의 전개식에서의 x^3항의 계수는 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)$의 전개식에서의 x^3항의 계수와 같다.

$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)$의 전개식에서 x^3항은

$1\times x^3+x\times x^2=2x^3$

따라서 x^3의 계수는 2이다.

114 곱셈 공식의 변형

전략 주어진 식을 변형하여 xy의 값을 구한 후, 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$6=2^2-2xy \qquad \therefore xy=-1$

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=2^3-3\times(-1)\times2=14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^4+y^4&=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\\&=6^2-2\times(-1)^2=34\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore x^7+y^7&=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)\\&=14\times34-(-1)^3\times2=478\end{aligned}$$

115 곱셈 공식의 변형

전략 주어진 식을 변형하여 $x-\dfrac{1}{x}$의 값을 구한 후, 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 $x^2+2x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+2-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=-2$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$$
$$=(-2)^2+2=6$$
$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=(-2)^3+3\times(-2)=-14$$
$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=x^5-\frac{1}{x^5}+x-\frac{1}{x}$이므로
$$x^5-\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=6\times(-14)-(-2)=-82$$

116 곱셈 공식의 변형

전략 주어진 식을 변형한 후, $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$임을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$(\sqrt{6})^2=2+2(ab+bc+ca)$
$2(ab+bc+ca)=4 \qquad \therefore ab+bc+ca=2$ …… ㉠
이때 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$이므로
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\therefore \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
즉, $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$에서
$a=b=c$이므로 ㉠에서
$3a^2=2 \qquad \therefore a=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$
이때 $a>0$이므로 $a=b=c=\frac{\sqrt{6}}{3}$
$\therefore abc=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3=\frac{6\sqrt{6}}{27}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$

개념 보충

임의의 실수 a에 대하여 $a^2\ge0$이므로 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2=0$이면 $x=y=z=0$이다.

117 미정계수법

전략 다항식 $f(x)$를 이용하여 $f(x+a)$를 구하고, 양변의 계수를 비교한다.

풀이 $f(x+a)=(x+a)^3+9(x+a)^2+4(x+a)-45$
$=(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)+9(x^2+2ax+a^2)+4(x+a)-45$
$=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+9x^2+18ax+9a^2+4x+4a-45$
$=x^3+(3a+9)x^2+(3a^2+18a+4)x+a^3+9a^2+4a-45$
이때 $f(x+a)=x^3+bx-3$이므로
$3a+9=0 \qquad \therefore a=-3$
$b=3a^2+18a+4=27-54+4=-23$
$\therefore a+b=-3+(-23)=-26$

다른풀이 $f(x+a)=x^3+bx-3$이고 $a=-3$이므로
$f(x-3)=x^3+bx-3$
$x=3$을 대입하면
$f(0)=3^3+3b-3=24+3b$
$f(x)=x^3+9x^2+4x-45$에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=-45$
따라서 $24+3b=-45$에서 $b=-23$
$\therefore a+b=-3+(-23)=-26$

118 미정계수법

전략 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=-2$를 각각 대입한다.

풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=0$ …… ㉠
또, 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2020}=2^{2020}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2020})=2^{2020}$
$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2020}=2^{2019}$

119 조건을 만족시키는 항등식

전략 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\ne0)$로 놓고 조건을 만족시키는 이차식 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\ne0)$라 하면 조건 ㈎에서
$f(0)=0$이므로 $c=0$
즉, $f(x)=ax^2+bx$이므로 조건 ㈏에서
$(ax^2+bx)^2=ax^4+bx^2$
$a^2x^4+2abx^3+b^2x^2=ax^4+bx^2$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a^2=a$, $ab=0$, $b^2=b$
$\therefore a=1,\ b=0\ (\because a\ne0)$
즉, $f(x)=x^2$이므로
$\{f(x)+2\}^3=(x^2+2)^3$
$=x^6+6x^4+12x^2+8$
따라서 상수항을 제외한 나머지 모든 항의 계수의 합은
$1+6+12=19$

120 나머지정리

전략 $2f(x)-g(x)$, $g(x)$의 나눗셈에 대한 식을 세운 후, $R(x)$가 이차 이하의 다항식이어야 함을 이용한다.

풀이 $2f(x)-g(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$2f(x)-g(x)=(x^3-1)Q_1(x)+R(x)$
$=(x-1)(x^2+x+1)Q_1(x)+R(x)$ … ㉠
$g(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$g(x)=(x^3-1)Q_2(x)+R(x)$
$=(x-1)(x^2+x+1)Q_2(x)+R(x)$ … ㉡
㉠+㉡을 하면
$2f(x)=(x-1)(x^2+x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+2R(x)$
$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+R(x)$

$R(x)$는 이차 이하의 다항식이고 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+6$이므로

$R(x)=a(x^2+x+1)+3x+6$ (a는 상수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$g(1)=R(1)=3a+9=3$ ($\because$ ㉡)

$\therefore a=-2$

따라서

$$R(x)=-2(x^2+x+1)+3x+6$$
$$=-2x^2+x+4$$

이므로 $R(2)=-8+2+4=-2$

121 나머지정리

(전략) 조건 (가)에 $x=1$, $x=7$을 대입하여 얻은 값을 이용한다.

(풀이) 조건 (가)에 $x=1$을 대입하면

$0=-6P(1)$ $\quad\therefore P(1)=0$

또, 조건 (가)에 $x=7$을 대입하면

$6P(5)=0$ $\quad\therefore P(5)=0$

$P(x)$가 삼차다항식이므로 조건 (나)에서

$P(x)$를 x^2-4x+2로 나누었을 때의 몫을

$ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-4x+2)(ax+b)+2x-10$

$P(1)=0$에서 $-a-b-8=0$

$\therefore a+b=-8$ …… ㉠

$P(5)=0$에서 $35a+7b=0$

$\therefore 5a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-10$

따라서 $P(x)=(x^2-4x+2)(2x-10)+2x-10$이므로

$P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(4)=(4^2-4\times4+2)(2\times4-10)+2\times4-10$$
$$=2\times(-2)+8-10=-6$$

(다른풀이) $P(x)$가 삼차다항식이고, 조건 (가)에 $x=1$, $x=7$을 대입하면 각각 $P(1)=0$, $P(5)=0$이므로 $P(x)$는 $x-1$, $x-5$를 인수로 갖는다.

즉, 두 상수 a, k ($a\neq0$)에 대하여

$P(x)=a(x-1)(x-5)(x-k)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠을 조건 (가)에 대입하면

$a(x-1)(x-3)(x-7)(x-k-2)$

$=a(x-7)(x-1)(x-5)(x-k)$

위의 식을 정리하면

$(x-3)(x-k-2)=(x-5)(x-k)$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore P(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)$

조건 (나)에서 $P(x)$를 x^2-4x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$a(x-1)(x-3)(x-5)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$

$a(x^2-4x+3)(x-5)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$

…… ㉡

이때 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 한 근을 α라 하면

$\alpha^2-4\alpha+2=0$

㉡은 x에 대한 항등식이므로 $x=\alpha$를 대입하면

$a(\alpha-5)=2\alpha-10$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $P(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)$이므로

$P(4)=2\times3\times1\times(-1)=-6$

122 나머지정리

(전략) 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 나눗셈에 대한 등식을 세운 후, 보기의 식이 옳은지 판별한다.

(풀이) 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$ …… ㉠

ㄱ. ㉠은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=a$를 대입하면

$f(a)=R(a)$

$\therefore f(a)-R(a)=0$

ㄴ. $f(x)=(x-a)(x-b)+x$라 하면

$R(x)=x$이므로

$f(a)-R(b)=a-b$, $f(b)-R(a)=b-a$

이때 $a\neq b$이므로

$f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$

ㄷ. $R(x)$는 일차 이하의 다항식이므로

$R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면 ㉠에서

$f(a)=pa+q$, $f(b)=pb+q$

$af(b)-bf(a)=abp+aq-abp-bq=(a-b)q$

이때 $R(0)=q$이므로

$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

123 인수정리

(전략) $P(x)-(x-1)$이 $x-2$, $x-3$, $x-4$를 인수로 가짐을 이용한다.

(풀이) $P(2)=1$, $P(3)=2$, $P(4)=3$에서

$P(2)-1=0$, $P(3)-2=0$, $P(4)-3=0$

즉, $P(x)-(x-1)$은 $x-2$, $x-3$, $x-4$를 인수로 갖는다.

이때 $P(x)$가 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$P(x)-(x-1)$도 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이다.

즉, $P(x)-(x-1)=(x-2)(x-3)(x-4)$이므로

$P(x)=(x-2)(x-3)(x-4)+x-1$

따라서 $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$P(5)=3\times2\times1+4=10$

1등급 비법 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=b$ (a, b는 상수)일 때, b를 a에 대한 식 $f(a)$로 나타내면 다항식 $P(x)-f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다. 즉, $P(x)-f(x)=(x-a)Q(x)$이므로 $P(x)=(x-a)Q(x)+f(x)$

124 나머지정리 ⊕ 인수정리

(전략) 나머지정리와 인수정리를 이용하여 $f(x)$의 인수를 찾는다.

풀이 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=a-(n+1)+b=0$

$\therefore b=n+1-a$ ⋯⋯ ㉠

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=ax^{n+1}-(n+1)x+n+1-a\\&=a(x^{n+1}-1)-(n+1)(x-1)\\&=a(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\\&\qquad-(n+1)(x-1)\\&=(x-1)\{a(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\\&\qquad-(n+1)\}\end{aligned}$$

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)$

$(x-1)Q(x)=a(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)-(n+1)$

이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a(n+1)-(n+1)$ $\quad\therefore a(n+1)=n+1$

이때 $n+1\neq0$이므로 $a=1$

㉠에 $a=1$을 대입하면 $b=n$

$\therefore ab=1\times n=n$

참고 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$

125 x^4+ax^2+b 꼴의 식의 인수분해

전략 주어진 식을 A^2-B^2 꼴로 변형하여 인수분해한다.

풀이
$$\begin{aligned}&x^4-16x^2y^2+36y^4\\&=x^4-12x^2y^2+36y^4-4x^2y^2\\&=(x^2-6y^2)^2-(2xy)^2\\&=(x^2+2xy-6y^2)(x^2-2xy-6y^2)\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=-2$, $d=-6$

또는 $a=-2$, $b=-6$, $c=2$, $d=-6$이므로

$abcd=-144$

1등급 비법 $x^4+ax^2y^2+by^4$ 꼴의 다항식을 $x^2=X$, $y^2=Y$로 치환했을 때, 인수분해되지 않으면 적당한 식을 더하거나 빼어서 A^2-B^2 꼴로 변형하여 인수분해한다.

126 여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해

전략 주어진 식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후, 인수분해한다.

풀이 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&ba^2-ca^2-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2\\&=a^2(b-c)-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a-c)\end{aligned}$$

이때 a, b, c가 연속하는 세 자연수이고, $a<b<c$이므로

$a-b=-1$, $b-c=-1$, $a-c=-2$

따라서 구하는 식의 값은

$(-1)\times(-1)\times(-2)=-2$

127 인수분해의 활용

전략 인수분해를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 구한다.

풀이
$$\begin{aligned}&a^3c+a^2bc-ac^3+ab^2c+b^3c-bc^3\\&=a^2c(a+b)-c^3(a+b)+b^2c(a+b)\\&=c(a+b)(a^2+b^2-c^2)\\&=0\end{aligned}$$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a>0$, $b>0$, $c>0$

즉, $a+b>0$이므로 $a^2+b^2-c^2=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로

구하는 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

128 인수분해의 활용

전략 각 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 이용하여 부피를 구하고, a, b 사이의 관계식을 세운다.

풀이 직육면체 P, Q, R, S, T의 부피가 각각 p, q, r, s, t이므로

$p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2$, $s=b^2$, $t=ab(a-b)$

이때 $p=q+r+s+t$이므로

$a^3=b^3+a^2+b^2+ab(a-b)$

$\therefore a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0$

위의 식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned}&(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a^2+b^2)-ab(a-b)\\&=(a-b)(a^2+b^2)-(a^2+b^2)\\&=(a^2+b^2)(a-b-1)\end{aligned}$$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a^2+b^2>0$

$\therefore a-b-1=0$

$\therefore a-b=1$

다른풀이 $p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2$, $s=b^2$, $t=ab(a-b)$

이때 $p=q+r+s+t$이므로

$a^3=b^3+a^2+b^2+ab(a-b)$

$\therefore a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)=0$

위의 식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^3-b^3-a^2-b^2-ab(a-b)\\&=a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^3-b^2\\&=a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)\end{aligned}$$

$f(a)=a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)$로 놓으면

$$\begin{aligned}&f(b+1)\\&=(b+1)^3-(b+1)(b+1)^2+b^2(b+1)-b^2(b+1)\\&=0\end{aligned}$$

따라서 $f(a)$는 $a-b-1$을 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr}b+1 & 1 & -b-1 & b^2 & -b^2(b+1)\\ & & b+1 & 0 & b^2(b+1)\\\hline & 1 & 0 & b^2 & 0\end{array}$$

$\therefore f(a)=(a-b-1)(a^2+b^2)$

즉, $a^3-(b+1)a^2+b^2a-b^2(b+1)=0$에서

$(a-b-1)(a^2+b^2)=0$

$a^2+b^2>0$이므로 $a-b-1=0$

$\therefore a-b=1$