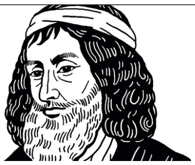
I

다항식

01 다항식의 연산



고대 그리스의 수학자 **유클리드**(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)는 당시 알려진 정수론 및 기하학을 체계적으로 정리한 「원론」을 집대성한 업적을 가장 높게 평가받고 있는데, 여기에는 다항식의 전개를 표현한 내용이 쓰여져 있다. 기원전 고대 시대에도 수와 식에 대한 연구가 이루어졌음을 알 수 있다.

개념&유형 CHECK

- 완전 학습을 위해 스스로 학습 계획을 세워 실천하세요.
- 이해가 부족한 개념이나 유형은 □ 안에 표시하고 반복하여 학습하세요.
- 출제 빈도가 매우 높은 유형에는 *고빈출 표시를 하였습니다. 시험 직전에 이 유형을 반복하여 풀어 보세요.

Lecture 01 다항식의 덧셈과 뺄셈

1st 월 일 | 2nd 월 일

- 개념 01 다항식 □ □
- 개념 02 다항식의 정리 □ □
- 개념 03 다항식의 덧셈과 뺄셈 □ □
- 개념 04 다항식의 덧셈에 대한 성질 □ □
- 유형 01 / 다항식의 덧셈과 뺄셈(1) □ □
- 유형 02 / 다항식의 덧셈과 뺄셈(2) □ □

Lecture 02 다항식의 곱셈

1st 월 일 | 2nd 월 일

- 개념 05 다항식의 곱셈 □ □
- 개념 06 곱셈 공식(1) □ □
- 개념 07 곱셈 공식(2) □ □
- 유형 03 / 다항식의 전개식에서 계수 구하기 *고빈출 □ □
- 유형 04 / 곱셈 공식 □ □
- 유형 05 / 공통부분이 있는 다항식의 전개 □ □
- 유형 06 / 곱셈 공식을 이용한 식 또는 수의 계산 □ □

Lecture 03 곱셈 공식의 변형

1st 월 일 | 2nd 월 일

- 개념 08 곱셈 공식의 변형(1) □ □
- 개념 09 곱셈 공식의 변형(2) □ □
- 유형 07 / 곱셈 공식의 변형; 문자가 2개인 경우 *고빈출 □ □
- 유형 08 / 곱셈 공식의 변형; $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$ 꼴 *고빈출 □ □
- 유형 09 / 곱셈 공식의 변형; 문자가 3개인 경우 □ □
- 유형 10 / 곱셈 공식의 도형에의 활용 □ □

Lecture 04 다항식의 나눗셈

1st 월 일 | 2nd 월 일

- 개념 10 다항식의 나눗셈 □ □
- 개념 11 다항식의 나눗셈에 대한 등식 □ □
- 유형 11 / 다항식의 나눗셈 □ □
- 유형 12 / 다항식의 나눗셈에 대한 등식 ; $A=BQ+R$ *고빈출 □ □

다항식의 덧셈과 뺄셈

개념 01 다항식

유형 01, 02

다항식에 대해서는 중학교 때 학습하였다. 다항식에 관련된 여러 가지 용어의 뜻을 정리해 보자.

중심 개념 다항식에 관련된 용어

(1) **단항식**: 수나 문자의 곱으로만 이루어진 식
(2) **다항식**: 단항식 또는 몇 개의 단항식의 합으로 이루어진 식
(3) **항**: 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식
(4) **항의 차수**: 항에서 특정한 문자가 곱해진 개수
(5) **다항식의 차수**: 특정한 문자에 대한 각 항의 차수 중에서 가장 높은 것
(6) **계수**: 항에서 특정한 문자를 제외한 나머지 부분
(7) **상수항**: 특정한 문자를 포함하지 않는 항
(8) **동류항**: 특정한 문자에 대한 차수가 같은 항

다항식 x^2-6x+3에서 항은 x^2, $-6x$, 3이고, x^2의 계수는 1, x의 계수는 -6, 상수항은 3이다.

또, x^2의 차수는 2, $-6x$의 차수는 1이므로 다항식 x^2-6x+3의 차수는 2이다. 따라서 다항식 x^2-6x+3은 이차식이다.

$$\underbrace{x^{\overset{\text{차수}}{2}}\;\overset{x\text{의 계수}}{-6}x+\overset{\text{상수항}}{3}}_{\text{항}}$$

한편, 동류항이 있는 다항식은 동류항끼리 모아서 간단히 할 수 있다.

예를 들어 다항식 $2x^2+3x-4+2x$에서 $3x$와 $2x$는 동류항이므로

$$2x^2+3x-4+2x=2x^2+(3+2)x-4=2x^2+5x-4$$

와 같이 간단히 할 수 있다.

두 문자 x, y에 대한 다항식에서 다항식의 차수와 상수항은 기준이 되는 문자에 따라 달라진다. 다항식의 차수는 다항식을 이루는 각 단항식 중 기준이 되는 문자에 대하여 차수가 가장 높은 항의 차수이고, 상수항은 기준이 되는 문자를 포함하지 않는 항이다.

확인 다항식 $xy^2+xy-5y-1$에서

(1) 항은 xy^2, xy, $-5y$, -1로 모두 4개이다.
(2) $(y^2+y)x-5y-1$이므로 x에 대한 일차식이고, 상수항은 $-5y-1$이다.
(3) $xy^2+(x-5)y-1$이므로 y에 대한 이차식이고, 상수항은 -1이다.
(4) x, y에 대한 삼차식이고, 상수항은 -1이다.
(5) xy^2과 xy는 x에 대한 동류항이고, xy와 $-5y$는 y에 대한 동류항이다.

개념 02

다항식의 정리

유형 01, 02

다항식은 항을 차수의 크기순으로 정리할 수 있다.

예를 들어 다항식 $x^2-2x+5+x^3$을 x에 대하여 차수가 높은 항부터 차례대로 나타내면

$$x^3+x^2-2x+5$$

이고, x에 대하여 차수가 낮은 항부터 차례대로 나타내면

$$5-2x+x^2+x^3$$

이다.

위와 같이 다항식을 정리하는 것을 각각 '내림차순으로 정리한다', '오름차순으로 정리한다'고 한다.

중심 개념 다항식의 정리 방법

(1) **내림차순**: 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 차례대로 나타내는 것

(2) **오름차순**: 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 차례대로 나타내는 것

| 참고 | 특별한 언급이 없으면 다항식은 일반적으로 내림차순으로 정리한다.

한편, 여러 가지 문자를 포함한 다항식을 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때는 한 문자를 정하고, 그 문자를 제외한 나머지 문자는 모두 상수로 생각한다.

확인 다항식 $x^2+2xy^2+y^2-x-4y+1$을

(1) x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}x^2+2xy^2+y^2-x-4y+1&=x^2+2xy^2-x+y^2-4y+1\\&=x^2+(2y^2-1)x+y^2-4y+1\end{aligned}$$

(2) y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}x^2+2xy^2+y^2-x-4y+1&=2xy^2+y^2-4y+x^2-x+1\\&=(2x+1)y^2-4y+x^2-x+1\end{aligned}$$

바른답 · 알찬풀이 2쪽

문제 1 다항식 $3x^2-xy+y^2+2x+y-5$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) x에 대하여 내림차순으로 정리하시오.

(2) y에 대하여 오름차순으로 정리하시오.

답 (1) $3x^2+(-y+2)x+y^2+y-5$ (2) $3x^2+2x-5+(-x+1)y+y^2$

개념 03

다항식의 덧셈과 뺄셈

유형 01, 02

두 다항식 A, B에 대하여 $A+B$는 A와 B의 각 항을 동류항끼리 모아서 정리하면 된다.

또, $A-B$는 A에 $-B$를 더하는 것과 같으므로 A에 B의 각 항의 부호를 바꾸어서 더하면 된다. 즉,

$$A-B=A+(-B)$$

와 같이 계산한다.

한편, 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 괄호가 있을 때는

괄호 앞의 부호가 $+$이면 괄호 안의 부호를 그대로, $\rightarrow A+(B-C)=A+B-C$

괄호 앞의 부호가 $-$이면 괄호 안의 부호를 반대로 $\rightarrow A-(B-C)=A-B+C$

하여 괄호를 푼다.

일반적으로 다항식의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같은 순서로 계산한다.

중심 개념 다항식의 덧셈과 뺄셈

(i) 괄호가 있는 경우 괄호를 푼다.
(ii) 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.
(iii) 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

확인 두 다항식 $A=2x^2+3xy-y^2$, $B=-x^2+xy+4y^2$에 대하여

(1) $A+B=(2x^2+3xy-y^2)+(-x^2+xy+4y^2)$
$=2x^2+3xy-y^2-x^2+xy+4y^2$ ← 괄호를 푼다.
$=2x^2-x^2+3xy+xy-y^2+4y^2$ ← x에 대하여 내림차순으로 정리한다.
$=(2-1)x^2+(3+1)xy+(-1+4)y^2$ ← 동류항끼리 계산한다.
$=x^2+4xy+3y^2$

(2) $A-B=(2x^2+3xy-y^2)-(-x^2+xy+4y^2)$
$=2x^2+3xy-y^2+x^2-xy-4y^2$ ← 괄호를 푼다.
$=2x^2+x^2+3xy-xy-y^2-4y^2$ ← x에 대하여 내림차순으로 정리한다.
$=(2+1)x^2+(3-1)xy+(-1-4)y^2$ ← 동류항끼리 계산한다.
$=3x^2+2xy-5y^2$

바른답 · 알찬풀이 2쪽

문제 2 두 다항식 $A=x^3+2x^2+4x-1$, $B=3x^3-x^2-5x+2$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A+B$　　(2) $A-B$

답 (1) $4x^3+x^2-x+1$　(2) $-2x^3+3x^2+9x-3$

개념 04

다항식의 덧셈에 대한 성질

유형 01, 02

수의 덧셈에서 교환법칙과 결합법칙이 성립하듯이 다항식의 덧셈에서도 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

중심 개념 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) **교환법칙**: $A+B=B+A$

(2) **결합법칙**: $(A+B)+C=A+(B+C)$

| 참고 | 세 다항식의 덧셈에서 $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$의 결과가 같으므로 이를 보통 괄호 없이 $A+B+C$로 나타낸다.

확인 세 다항식 $A=x^2-4x+1$, $B=2x^2-3$, $C=-x^2+2x$에 대하여

(1) $A+B=(x^2-4x+1)+(2x^2-3)$

$=3x^2-4x-2$

$B+A=(2x^2-3)+(x^2-4x+1)$

$=3x^2-4x-2$

$\therefore A+B=B+A$

즉, 다항식의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

(2) $(A+B)+C=\{(x^2-4x+1)+(2x^2-3)\}+(-x^2+2x)$

$=(3x^2-4x-2)+(-x^2+2x)$

$=2x^2-2x-2$

$A+(B+C)=(x^2-4x+1)+\{(2x^2-3)+(-x^2+2x)\}$

$=(x^2-4x+1)+(x^2+2x-3)$

$=2x^2-2x-2$

$\therefore (A+B)+C=A+(B+C)$

즉, 다항식의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

바른답 · 알찬풀이 2쪽

문제 3 세 다항식 $A=5x^2+x-4$, $B=-x^2+2x+3$, $C=x^2-2$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $A+B$와 $B+A$를 계산하고, 그 결과를 비교하시오.

$A+B=\boxed{}$, $B+A=\boxed{}$

(2) $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$를 계산하고, 그 결과를 비교하시오.

$(A+B)+C=\boxed{}$, $A+(B+C)=\boxed{}$

답 (1) $4x^2+3x-1$, $4x^2+3x-1$, 같다. (2) $5x^2+3x-3$, $5x^2+3x-3$, 같다.

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈(1)

출제 빈도

개념 01~04

001 대표

두 다항식 $A=x^2+2xy-y^2$, $B=3x^2-xy+y^2$에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $4A+3B$　　　(2) $2(A+2B)-4A$

유형 분석

다항식을 식에 대입하여 덧셈과 뺄셈을 하면 된다. 이때 주어진 식을 간단히 한 후, 다항식을 대입해야 계산이 복잡해지지 않는다.

연구 식에 다항식을 대입할 때 ➔ 식을 먼저 간단히 한다

위의 문제에서 (1)은 주어진 식에 다항식을 바로 대입하면 되지만, (2)는 먼저 주어진 식을 간단히 정리한 후, 다항식을 대입한다.

풀이 ≫

002

두 다항식 $A=x^3+5x-3$, $B=-3x^3+x^2-2x+1$에 대하여

$$3(A-3B)-2(3A-4B)$$

를 계산하면 ax^2+bx+c일 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

003

세 다항식 $A=x^3+x^2-3x+2$, $B=-2x^3+3x^2+x-5$, $C=-x^3+2x+1$에 대하여 $A-\{2A-(2B+3C)\}-2C$를 계산하시오.

실력+

004

두 다항식 $A=3x^2+2x-5$, $B=-x^2-4x+9$에 대하여 $A-2X=-3A+2B$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오.

해결 전략 / 먼저 주어진 등식에서 X를 A, B에 대한 식으로 나타낸다.

유형 02 다항식의 덧셈과 뺄셈(2)

출제 빈도

개념 01~04

005 대표

두 다항식 A, B에 대하여

$$A+2B=-3x^2-2x+5,\quad 3A-B=5x^2-6x-6$$

일 때, 다항식 A, B를 각각 구하시오.

유형 분석

연립방정식을 푸는 과정에서 다항식의 덧셈과 뺄셈을 하는 유형이다.
위의 문제에서 구하는 다항식 A, B를 미지수로 생각하면 주어진 조건은 A, B에 대한 연립방정식이다.
따라서 A, B를 구하려면 A, B에 대한 두 방정식을 연립하여 풀면 된다.

연구 **A, B에 대한 두 방정식에서 A, B를 구할 때 ➔ A, B에 대한 연립방정식으로 푼다**

풀이 ≫

006

두 다항식 A, B에 대하여

$$A+B=5x^2+xy-2y^2,\quad A-B=x^2+3xy-6y^2$$

일 때, $A-3B$를 구하시오.

007

두 다항식 A, B에 대하여

$$A-2B=3x^2-4x-12,\quad 2A+3B=-x^2+6x+11$$

일 때, $A+B=ax^2+bx+c$이다. 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

실력+

008

두 다항식 A, B에 대하여

$$2A-3B=-x^2+4xy+5y^2,\quad 3A-2B=x^2+6xy+10y^2$$

일 때, $X-\frac{1}{2}A=B$를 만족시키는 다항식 X를 구하시오.

해결 전략 / A, B에 대한 연립방정식을 풀어 A, B를 $X-\frac{1}{2}A=B$, 즉 $X=\frac{1}{2}A+B$에 대입한다.

다항식의 곱셈

Lecture **02**

개념 05 다항식의 곱셈

유형 03

(단항식)×(다항식), (다항식)×(다항식)과 같은 다항식의 곱을 하나의 다항식으로 나타내는 것을 **전개한다**고 하고, 다항식을 전개할 때는 분배법칙과 지수법칙을 이용한다.

예를 들어 다항식 $5x(x^2-x+2)$를 전개하면

$$5x(x^2-x+2)=5x\cdot x^2-5x\cdot x+5x\cdot 2$$ ← 분배법칙을 이용한다.

$$=5x^3-5x^2+10x$$ ← 지수법칙을 이용한다.

| 참고 | 실수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

$$a^m a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn},\quad (ab)^n=a^n b^n$$

이때 항의 개수가 많으면 전개할 때 항을 빠뜨리거나 중복하여 계산하기 쉬우므로 오른쪽과 같이 순서를 정하여 전개한다.

$$(a+b)(x+y)=\underset{①}{ax}+\underset{②}{ay}+\underset{③}{bx}+\underset{④}{by}$$

일반적으로 다항식의 곱셈은 다음과 같은 순서로 계산한다.

중심 개념 — 다항식의 곱셈

(i) 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 식을 전개한다.

(ii) 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

확인 $(3x+2)(x^2-4x+1)=3x^3-12x^2+3x+2x^2-8x+2$ ← 분배법칙, 지수법칙을 이용한다.

$$=3x^3-10x^2-5x+2$$ ← 동류항끼리 계산한다.

또, 다항식의 곱셈에서도 수의 곱셈에서와 같이 다음 성질이 성립한다.

중심 개념 — 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) **교환법칙**: $AB=BA$

(2) **결합법칙**: $(AB)C=A(BC)$

(3) **분배법칙**: $A(B+C)=AB+AC$, $\quad(A+B)C=AC+BC$

| 참고 | 세 다항식의 곱셈에서 $(AB)C$와 $A(BC)$의 결과가 같으므로 이를 보통 괄호 없이 ABC로 나타낸다.

개념 06

곱셈 공식(1)

유형 04~06

다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 전개할 수 있으나, 특별한 형태의 다항식의 곱셈은 곱셈 공식을 이용하여 전개 과정 없이 빠르고 정확하게 계산할 수 있다.

중학교에서 학습한 곱셈 공식을 정리하면 다음과 같다.

중심 개념 곱셈 공식(1)

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

위의 곱셈 공식을 이용하여 다음의 곱셈 공식을 얻을 수 있다.

중심 개념 곱셈 공식(2)

⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

위의 곱셈 공식을 확인해 보자.

⑤ $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$ ← 곱셈 공식 ①

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$ ← 곱셈 공식 ①

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑥ $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$ ← 곱셈 공식 ①

$=a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b)$

$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=\{a+(-b)\}^3=a^3+3\cdot a^2\cdot(-b)+3\cdot a\cdot(-b)^2+(-b)^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

확인

(1) $(a+2b+1)^2=a^2+(2b)^2+1^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot 1+2\cdot 1\cdot a$

$=a^2+4b^2+1+4ab+4b+2a$

(2) $(a+2)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2+2^3$

$=a^3+6a^2+12a+8$

(3) $(a-3)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot 3+3\cdot a\cdot 3^2-3^3$

$=a^3-9a^2+27a-27$

개념 07

곱셈 공식(2)

유형 04~06

앞의 곱셈 공식과 식의 전개를 이용하여 좀 더 복잡한 다음의 곱셈 공식을 얻을 수 있다.

중심 개념 곱셈 공식(3)

⑦ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑧ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑨ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑩ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

위의 곱셈 공식을 확인해 보자.

⑦ $$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2)&=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\&=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\&=a^3+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2)&=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)\\&=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\&=a^3-b^3\end{aligned}$$

⑧ $$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)&=\{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c) \quad \leftarrow \text{곱셈 공식 ③}\\&=x^3+cx^2+(a+b)x^2+(a+b)cx+abx+abc\\&=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc\end{aligned}$$

⑨ $$\begin{aligned}&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=a(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+b(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&\qquad+c(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc\\&\qquad+a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-ac^2\\&=a^3+b^3+c^3-3abc\end{aligned}$$

⑩ $$\begin{aligned}(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)&=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}\\&=(a^2+b^2)^2-(ab)^2 \quad \leftarrow \text{곱셈 공식 ②}\\&=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 \quad \leftarrow \text{곱셈 공식 ①}\\&=a^4+a^2b^2+b^4\end{aligned}$$

확인

(1) $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)=x^3+1^3=x^3+1$

(2) $$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)&=x^3+(1+2+3)x^2+(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1)x+1\cdot 2\cdot 3\\&=x^3+6x^2+11x+6\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(x^2+x+1)(x^2-x+1)&=(x^2+x\cdot 1+1^2)(x^2-x\cdot 1+1^2)\\&=x^4+x^2\cdot 1^2+1^4=x^4+x^2+1\end{aligned}$$

익힘 01 다항식의 곱셈

개념 05

[009~012] 다음 식을 전개하시오.

009 $2x^2(3x^2+xy+y)$

010 $(a-3)(a^2+4)$

011 $(x^2+2x+3)(x-1)$

012 $(2a+b-3)(a-4b+1)$

익힘 02 곱셈 공식(1)

개념 06

[013~020] 다음 식을 전개하시오.

013 $(a+3b)^2$

014 $(2x-3y)^2$

015 $(a+2b)(a-2b)$

016 $(x-4)(x+7)$

017 $(2x-5)(3x-2)$

018 $(a+b-2)^2$

019 $(3x+1)^3$

020 $(4-y)^3$

익힘 03 곱셈 공식(2)

개념 07

[021~024] 다음 식을 전개하시오.

021 $(a-2)(a^2+2a+4)$

022 $(x-3)(x+4)(x+5)$

023 $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$

024 $(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

유형 03 다항식의 전개식에서 계수 구하기

출제 빈도

개념 05

025 대표

다항식

$$(2x^2-3x+8)(x^3-2x^2+3x+5)$$

의 전개식에서 x^2의 계수와 x^3의 계수의 합을 구하시오.

유형 분석

다항식의 곱셈에 대한 대표적인 유형이다. 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때는 주어진 식의 모든 항을 전개하지 말고 구하고자 하는 항이 나오는 경우만 전개한다.

연구 **전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때 ➔ 그 항이 나오는 경우만 전개한다**

주어진 다항식의 전개식에서 x^2항과 x^3항이 나오는 경우는 각각 다음과 같다.

① x^2항이 나오는 경우: (x^2항)×(상수항), (x항)×(x항), (상수항)×(x^2항)

② x^3항이 나오는 경우: (x^2항)×(x항), (x항)×(x^2항), (상수항)×(x^3항)

풀이 ≫

026 다음 물음에 답하시오.

(1) 다항식 $(x+y-5)(4x-y+1)$의 전개식에서 xy의 계수를 구하시오.

(2) 다항식 $(3x^3+2x^2-x+5)(2x+1)^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오.

027 x에 대한 다항식 $(2x^2+3x-1)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x^2의 계수가 13일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

028 다항식 $(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)^2$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오.

빠른답 356쪽 / 바른답 · 알찬풀이 5쪽

유형 04 곱셈 공식

출제 빈도

개념 06, 07

029 대표

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-3y+z)^2$

(2) $(3x+2y)^3$

(3) $(5x+3)(25x^2-15x+9)$

(4) $(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

유형 분석

다항식의 곱셈 문제는 곱셈 공식을 이용하여 풀도록 출제되는 경우가 많다. 따라서 다항식의 곱셈을 계산할 때는 전개부터 하지 말고, 곱셈 공식을 이용할 수 있는 꼴로 식을 변형해 본다.

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$를 이용한다.

(2) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$을 이용한다.

(3) 식을 변형하여 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$을 이용한다.

(4) 식을 변형하여 $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$을 이용한다.

풀이 >>

030

다음 식을 전개하시오.

(1) $(-a+2b-c)^2$

(2) $(a-5b)^3$

(3) $(xy-1)(x^2y^2+xy+1)$

(4) $(x-1)(x-2)(x-6)$

(5) $(2x+y-4)(4x^2+y^2-2xy+8x+4y+16)$

(6) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

031

다항식 $(x+3)^3-(x+4)(x^2-4x+16)$을 전개하시오.

032

다항식 $(x-1)^3(x^2+x+1)^3$의 전개식에서 x^6의 계수를 구하시오.

유형 05 공통부분이 있는 다항식의 전개

출제 빈도

개념 06, 07

033 대표

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2+x-1)(x^2+x+6)$　　(2) $(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$

유형분석

다항식의 곱셈에서 공통부분이 있을 때는 공통부분을 한 문자로 생각하여 곱셈 공식을 이용한다.

연구 ① 공통부분이 있을 때 → 공통부분을 한 문자로 생각한다
② 공통부분이 보이지 않을 때 → 공통부분이 나오도록 식을 변형한다

(1) 공통부분을 한 문자로 생각하고 곱셈 공식을 이용한다.

(2) 공통부분이 나오도록 곱셈의 순서를 바꿔서 두 일차식끼리 짝 지어 전개한 후, (1)과 같이 푼다.

풀이 ≫

034

다음 식을 전개하시오.

(1) $(2a+b-c)(2a-b-c)$　　(2) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

035

다항식 $(x+1)(x+2)(x^2+3x-3)$을 전개한 식이 $x^4+ax^3+bx^2+cx-6$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하시오.

실력+

036

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$인 삼각형 ABC에 대하여

$$(a+b-c)(-a+b+c)=(a+b+c)(a-b+c)$$

가 성립할 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

해결 전략 / 주어진 식의 좌변과 우변을 각각 공통부분이 나오도록 변형하여 전개한 후, 세 변의 길이 a, b, c 사이의 가장 간단한 관계식을 구한다.

유형 06 곱셈 공식을 이용한 식 또는 수의 계산

출제 빈도

개념 06, 07

037 대표

다음 물음에 답하시오.

(1) $x^3=9$일 때, $(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$의 값을 구하시오.

(2) $(7+6)(7^2+6^2)(7^4+6^4)$의 값이 7^m-6^n일 때, 자연수 m, n의 값을 각각 구하시오.

유형 분석

개념 학습은 활용에 목적을 둔다. 그런 의미에서 복잡한 식과 수를 계산하는 이 유형은 곱셈 공식의 대표적인 활용 형태이다.

연구 복잡한 식 또는 수의 계산은 → 곱셈 공식을 이용한다

(1) x^3이 나오도록 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

(2) $7-6=1$이므로 주어진 식에 $7-6$을 곱한 후, 곱셈 공식 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 차례대로 이용한다.

풀이 ≫

038 $x=\sqrt{2}$일 때, $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$의 값을 구하시오.

039 $99\cdot(100^2+100+1)$의 값이 10^p-1일 때, 자연수 p의 값을 구하시오.

040 곱셈 공식을 이용하여 $102^2+199\cdot201$은 몇 자리의 자연수인지 구하시오.

곱셈 공식의 변형

Lecture 03

개념 08 곱셈 공식의 변형(1)

유형 07, 08, 10

곱셈 공식을 적당히 변형하면 문자의 합, 차, 곱의 값을 이용하여 여러 가지 식의 값을 편리하게 구할 수 있다.

두 문자에 대한 곱셈 공식의 변형을 정리하면 다음과 같다.

중심 개념 곱셈 공식의 변형(1)

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,\quad a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

② $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab,\quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),\quad a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

위의 곱셈 공식의 변형을 확인해 보자.

① 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$에서

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

곱셈 공식 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$에서

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

② ①에서 $(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$이므로

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab,\quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$$

③ 곱셈 공식 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$에서

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

곱셈 공식 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$에서

$$a^3-b^3=(a-b)^3+3a^2b-3ab^2=(a-b)^3+3ab(a-b)$$

| 참고 | 위의 곱셈 공식의 변형(1)에서 a 대신 x, b 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,\quad x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4,\quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

③ $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right),\quad x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

확인 $a+b=4$, $ab=2$일 때,

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\cdot2=12$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4^2-4\cdot2=8$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot2\cdot4=40$

개념 09 곱셈 공식의 변형(2)

유형 09, 10

세 문자에 대한 곱셈 공식의 변형을 정리하면 다음과 같다.

중심 개념 곱셈 공식의 변형(2)

④ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

⑤ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

⑥ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

위의 곱셈 공식의 변형을 확인해 보자.

④ 곱셈 공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$에서

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ca\\&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

⑤ $$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\&=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)\\&=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}\\&=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}\end{aligned}$$

⑥ 곱셈 공식 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$에서

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

| 참고 | ⑥에서 $a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.

확인 $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=5$, $abc=1$일 때,

(1) $$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=4^2-2\cdot5=6\end{aligned}$$

(2) (1)에서 $a^2+b^2+c^2=6$이므로

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}+3abc\\&=4\cdot(6-5)+3\cdot1=7\end{aligned}$$

유형 07 출제 빈도

곱셈 공식의 변형; 문자가 2개인 경우

개념 08

041 대표

$x+y=2$, $x^2+y^2=12$일 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, $x>y$)

(1) x^3+y^3 (2) $x-y$ (3) x^3-y^3

유형 분석

두 문자에 대한 합, 곱, 차의 조건이 주어지고 두 문자에 대한 식의 값을 구할 때는 곱셈 공식의 변형을 떠올린다. 주어진 조건과 곱셈 공식의 변형을 이용하기 위해 무엇을 먼저 구해야 하는지를 파악하는 것이 중요하다.

연구 두 문자에 대한 식의 값을 구하려면 → 적합한 곱셈 공식의 변형을 이용한다

위의 문제에서 두 문자에 대한 곱셈 공식의 변형을 이용하기 위해 먼저 주어진 조건을 이용하여 xy의 값을 구해 본다.

풀이 ≫

042

$a-b=3$, $ab=-2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) a^2+ab+b^2 (2) a^4+b^4

043

$x=1+\sqrt{3}$, $y=1-\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$의 값을 구하시오.

실력+

044

$a^2-b^2=1$, $ab=\sqrt{2}$일 때, a^6-b^6의 값을 구하시오.

해결 전략 / $a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$, $a^2b^2=(ab)^2$임을 이용하여 식의 값을 구한다.

유형 08 곱셈 공식의 변형; $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$ 꼴

출제 빈도

개념 08

045 대표

$x+\frac{1}{x}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, $0<x<1$)

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$　　(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$　　(3) $x-\frac{1}{x}$

유형 분석

22쪽의 | 참고 |와 같이 곱셈 공식의 변형에서 두 수를 각각 x, $\frac{1}{x}$로 놓으면 x와 $\frac{1}{x}$의 곱이 $x\cdot\frac{1}{x}=1$이므로 $x+\frac{1}{x}$ 또는 $x-\frac{1}{x}$의 값을 알면 x, $\frac{1}{x}$에 대한 식 $x^2\pm\frac{1}{x^2}$, $x^3\pm\frac{1}{x^3}$ 등의 값을 구할 수 있다.

연구 x^n과 $\frac{1}{x^n}$의 합 또는 차 ➔ $x\pm\frac{1}{x}$의 값과 곱셈 공식의 변형을 이용한다

(3) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$를 이용하여 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$의 값을 먼저 구한다.

풀이 ≫

046

$x-\frac{1}{x}=2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$　　(2) $x+\frac{1}{x}$

047

$a^2+\frac{1}{a^2}=5$를 만족시키는 양수 a에 대하여 $a^3+\frac{1}{a^3}$의 값을 구하시오.

실력+

048

$x^2-4x+1=0$일 때, $x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$의 값을 구하시오.

해결 전략 / $x\neq0$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한다.

유형 09 곱셈 공식의 변형; 문자가 3개인 경우

출제 빈도

개념 09

049 대표

$a+b+c=5$, $a^2+b^2+c^2=9$, $abc=4$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $ab+bc+ca$　　(2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$　　(3) $a^3+b^3+c^3$

유형 분석

앞의 **유형 07**의 문자가 2개인 경우에서와 마찬가지로 세 문자에 대한 합과 곱의 조건이 주어지고 세 문자에 대한 식의 값을 구할 때는 곱셈 공식의 변형을 떠올린다.

연구 **세 문자에 대한 식의 값을 구하려면 → 적합한 곱셈 공식의 변형을 이용한다**

위의 문제에서 $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, abc의 값이 주어져 있으므로 이 값을 이용할 수 있도록 구하는 식을 변형한다.

풀이 ≫

050

$a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=24$, $abc=-8$일 때, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$의 값을 구하시오.

051

$a+b+c=1$, $ab+bc+ca=-2$, $a^3+b^3+c^3=16$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$　　(2) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

실력+

052

$x-y=2$, $y-z=3$일 때, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$의 값을 구하시오.

해결 전략 / 두 식 $x-y=2$, $y-z=3$을 연립하여 x, z 사이의 관계식을 구한다.

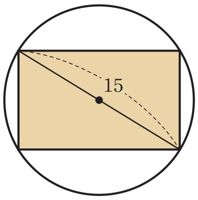
유형 10 곱셈 공식의 도형에의 활용

출제 빈도

개념 08, 09

053 대표

오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 15인 원이 있고, 이 원에 둘레의 길이가 34인 직사각형이 내접한다고 할 때, 이 직사각형의 넓이를 구하시오.



유형 분석

도형에 대한 활용 문제는 구하는 것에 필요한 값을 미지수로 놓고 주어진 조건을 미지수에 대한 식으로 나타내는 것이 해결의 첫걸음이다. 조건을 식으로 나타내는 과정에서 도형과 관련된 개념을 떠올릴 수 있다.

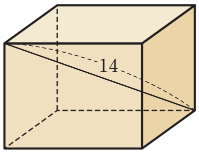
연구 **도형에 대한 활용 문제 ➔ 구하는 데 필요한 값을 미지수로 놓고 식을 세운다**

위의 문제에서는 직사각형의 넓이를 구해야 하므로 넓이를 구하는 데 필요한 가로, 세로의 길이를 각각 x, y로 놓은 후, 직사각형의 둘레의 길이가 34이고 대각선의 길이가 15임을 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 ≫

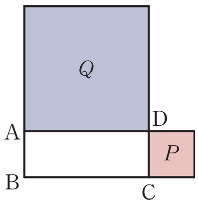
054

오른쪽 그림과 같은 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 88이고 대각선의 길이가 14일 때, 이 직육면체의 겉넓이를 구하시오.



055

둘레의 길이가 16이고, 넓이가 1인 직사각형 ABCD가 있다. 오른쪽 그림과 같이 이 직사각형의 변 DC와 변 AD를 한 변으로 하는 두 정사각형을 그리고 각각을 P, Q라 할 때, 두 정사각형 P, Q의 넓이의 합을 구하시오.



Lecture 04

다항식의 나눗셈

개념 10 다항식의 나눗셈

유형 11

다항식의 나눗셈은 (다항식)÷(단항식), (다항식)÷(다항식) 꼴이 있다.

(다항식)÷(단항식)은 오른쪽과 같이 나누는 식의 역수를 곱하여 계산한다. 이때 분배법칙과 지수법칙을 이용한다.

$$\boxed{(a+b)\div m=(a+b)\times\frac{1}{m}}$$

예를 들어 $(4x^2y+3xy^2)\div xy$를 계산하면

$$\begin{aligned}(4x^2y+3xy^2)\div xy&=(4x^2y+3xy^2)\times\frac{1}{xy}\\&=\frac{4x^2y}{xy}+\frac{3xy^2}{xy}\\&=4x+3y\end{aligned}$$

| 참고 | 다항식의 나눗셈에서는 다음 지수법칙을 이용한다. (단, $a\neq0$이고 m, n은 자연수이다.)

$$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n)\\ 1 & (m=n)\end{cases}$$

(다항식)÷(다항식)은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후, 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다. 이때 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 낮을 때까지 나눈다.

예를 들어 $(2x^2-5x+4)\div(2x-1)$은 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{array}{r|rl}
 & x\ -2 & \leftarrow \text{몫: } x-2\\ \hline
2x-1 & 2x^2-5x+4 & \\
 & 2x^2-\ x & \leftarrow (2x-1)\times x\\ \hline
 & -4x+4 & \\
 & -4x+2 & \leftarrow (2x-1)\times(-2)\\ \hline
 & 2 & \leftarrow \text{나머지: } 2
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{계수만 쓰면}} \quad
\begin{array}{r|rrrl}
 & & 1 & -2 & \leftarrow \text{몫: } x-2\\ \hline
2\ \ -1 & 2 & -5 & 4 & \\
 & 2 & -1 & & \\ \hline
 & & -4 & 4 & \\
 & & -4 & 2 & \\ \hline
 & & & 2 & \leftarrow \text{나머지: } 2
\end{array}$$

(나누는 식의 차수)>(나머지의 차수)일 때까지 나눈다.

즉, 다항식 $2x^2-5x+4$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $x-2$이고, 나머지는 2이다.

확인 다항식 x^2+5를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 보면 오른쪽과 같다.
따라서 몫은 $x+3$이고, 나머지는 14이다.

$$\begin{array}{r|rl}
 & x\ +3 & \\ \hline
x-3 & x^2\ \boxed{}+5 & \leftarrow x\text{의 계수가 0이므로 } x\text{항의 자리는 비워 둔다.}\\
 & x^2-3x & \\ \hline
 & 3x+5 & \\
 & 3x-9 & \\ \hline
 & 14 &
\end{array}$$

개념 11 다항식의 나눗셈에 대한 등식

유형 12

자연수 a를 자연수 b $(b\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r라 하면

$$a=bq+r\ (0\le r<b)$$

로 나타낼 수 있다. 특히 $r=0$일 때, a는 b로 나누어떨어진다고 한다.

마찬가지로 다항식의 나눗셈에서도 다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R$$

로 나타낼 수 있다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

특히 $R=0$, 즉 $A=BQ$일 때, 'A는 B로 나누어떨어진다'고 한다.

예를 들어 다항식 $2x^2-5x+4$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $x-2$이고, 나머지는 2이므로

$$2x^2-5x+4=(2x-1)(x-2)+2$$

와 같이 나타낼 수 있다.

일반적으로 다항식의 나눗셈에서 다음이 성립한다.

중심 개념 **다항식의 나눗셈에 대한 등식**

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R\ (\text{단, }(R\text{의 차수})<(B\text{의 차수}))$$

가 성립한다.

특히 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

$$\begin{array}{rl} Q & \leftarrow \text{몫} \\ B\,\overline{)\;A\;} & \\ \underline{BQ} & \\ R & \leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

| 참고 | 다항식의 나눗셈에서 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 낮으므로

① 나누는 식이 일차식이면 나머지는 항상 상수이다.
② 나누는 식이 이차식이면 나머지는 상수 또는 일차식이다.
③ 나누는 식이 삼차식이면 나머지는 상수 또는 일차식 또는 이차식이다.

확인 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $x-1$이고, 나머지가 $2x+1$이면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2+1)(x-1)+2x+1 \\ &=x^3-x^2+x-1+2x+1 \\ &=x^3-x^2+3x \end{aligned}$$

바른답 · 알찬풀이 10쪽

문제 1 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 x^2+3x+1이고 나머지가 5일 때, $f(x)$를 구하시오.

답 $2x^3+5x^2-x+4$

유형 11 다항식의 나눗셈

출제 빈도

개념 10

056 대표

다항식 $3x^3+4x^2-7$을 x^2+2x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(1)+R(-1)$의 값을 구하시오.

유형 분석

다항식의 나눗셈에서 몫과 나머지를 구하는 기본적인 유형이다. 다항식을 다항식으로 나눌 때는 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

연구 (다항식)÷(다항식)을 할 때 ➔ 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다

위의 문제에서 나누어지는 다항식 $3x^3+4x^2-7$은 x의 계수가 0이므로 오른쪽과 같이 x항의 자리는 비워 두고 나눗셈을 한다.

$$x^2+2x+3\,\overline{)\,3x^3+4x^2\;\boxed{}-7}$$

풀이 ≫

057

오른쪽은 다항식 $4x^3+6x^2-x-5$를 $2x^2-x-1$로 나누는 과정이다. 이때 $a+b+c+d$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

$$\begin{array}{r}
ax+4\\
2x^2-x-1\,\overline{)\,4x^3+6x^2-x-5}\\
\underline{4x^3-2x^2+bx}\\
8x^2+x-5\\
\underline{8x^2-4x-4}\\
cx+d
\end{array}$$

058

다항식 $x^4-x^3-8x^2+4x$를 x^2+x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 구하시오.

059

x에 대한 다항식 $2x^3+ax+b$를 $-x^2+x-5$로 나누었을 때의 나머지가 $3x-4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

유형 12 다항식의 나눗셈에 대한 등식; $A=BQ+R$

출제 빈도

개념 11

060 대표

다항식 $x^4+7x^2-2x+15$를 다항식 $P(x)$로 나누었을 때의 몫이 x^2-x+2이고 나머지가 $2x+3$일 때, 다항식 $P(x)$를 구하시오.

유형 분석

다항식의 나눗셈에서 출제되는 유형의 대부분은 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 이용하여 해결할 수 있다.

연구 **$A \div B$의 몫이 Q, 나머지가 R이면 ➔ $A=BQ+R$임을 이용한다**

위의 문제에서 나누는 다항식 $P(x)$를 구하려면 주어진 조건을 다항식의 나눗셈에 대한 등식으로 나타낸 후 계산한다.

풀이 ≫

061

다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $x-2$, 7일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

062

다항식 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 몫이 x^2-7이고 나머지가 16일 때, $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 구하시오.

실력+

063

$x^2+x-3=0$일 때, $2x^4+x^3-9x^2+x+7$의 값을 구하시오.

해결 전략 / 주어진 식을 x^2+x-3으로 나누어 다항식의 나눗셈에 대한 등식으로 나타낸 후, $x^2+x-3=0$임을 이용한다.

중단원 연습문제

STEP 1 표준

064 두 다항식 A, B에 대하여 $A\bigstar B=3A-2B$일 때, $(x^2-3x+2)\bigstar(-x^2+x-2)$를 간단히 하시오.

065 두 다항식 A, B에 대하여

$$A+B=3x^2+2x-4, \quad A-2B=6x^2-7x+8$$

일 때, $2(-A+B)+(4A-B)$를 구하시오.

066 다항식 $(x+5)^2(2x-3)^3$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오.

서술형

067 다항식 $(x-y+z)(x+y-z)$를 전개하시오.

068 $(5+3)(5^2+3^2)(5^4+3^4)(5^8+3^8)$을 간단히 하면?

① $\frac{1}{2}(5^8-3^8)$　② $\frac{1}{2}(5^{16}-3^{16})$　③ $2(5^{16}-3^{16})$

④ $\frac{1}{2}(5^{16}+3^{16})$　⑤ $2(5^{16}+3^{16})$

069 $x-y=\sqrt{5}$, $xy=-1$일 때, $x^4y^2+x^2y^4$의 값을 구하시오.

070 $x+\frac{1}{x}=6$일 때, $x^2+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

071 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $abc=-4$일 때, $(1-a)(1-b)(1-c)$의 값을 구하시오.

072 둘레의 길이가 20 cm이고 넓이가 18 cm^2인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형 네 개를 만들 때, 네 정사각형의 넓이의 합을 구하시오.

073 다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $4x-1$이다. 이때 $xf(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

STEP 2 실력

074 두 다항식

$$(1+2x+3x^2)^3, \quad (1+2x+3x^2+4x^3)^3$$

의 전개식에서 x의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값을 구하시오.

사고력

075 모든 실수 x에 대하여 다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $\cdots$가

$$P_1(x)=x^3+x^2+x+1,$$
$$P_{n+1}(x)=P_n(x+n) \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, $P_{10}(x)$의 x^2의 계수를 구하시오.

사고력

076 세 실수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킬 때, $2xyz$의 값을 구하시오.

> (가) x, $2y$, z 중 적어도 하나는 3이다.
> (나) $3(x+2y+z)=2xy+2yz+zx$

서술형

077 $a+b=4$, $ab=3$, $x+y=-3$, $xy=1$이고

$$m=ax+by, \quad n=bx+ay$$

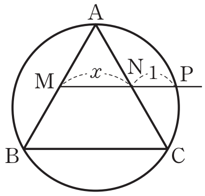
일 때, m^2+n^2의 값을 구하시오.

078 $x+y=1$, $xy=-3$일 때, $x^4+y^4+x^5+y^5$의 값을 구하시오.

079 $a+b+c=2$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, $a^2+b^2+c^2=6$일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2$의 값을 구하시오.

기출

080 정삼각형 ABC에서 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 오른쪽 그림과 같이 점 P는 반직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점이고 $\overline{\text{NP}}=1$이다. $\overline{\text{MN}}=x$라 할 때, $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$의 값을 구하시오.

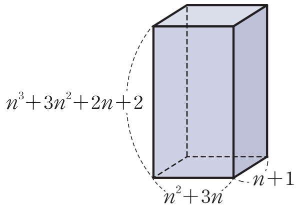


081 두 다항식 $A=x^2-x+1$, $B=-x+1$에 대하여 A^3-B^3을 x^2으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(1)$의 값을 구하시오.

082 $x=1-\sqrt{2}$일 때, $2x^3+x^2-11x-6$의 값을 구하시오.

기출

083 3 이상의 자연수 n에 대하여 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 n^2+3n, $n+1$이고 높이가 n^3+3n^2+2n+2인 직육면체가 있다. 이 직육면체를 한 모서리의 길이가 n인 정육면체로 조각낼 때, 한 모서리의 길이가 n인 정육면체의 최대 개수는? (단, 남은 조각을 붙여서 정육면체를 만들 수는 없다.)



① $n(n+1)(n+2)$
② $n(n+1)(n+3)$
③ $(n+1)(n+2)(n+3)$
④ $(n+1)(n+2)(n+4)$
⑤ $(n+2)(n+3)(n+4)$

01
다항식의 연산

Lecture 9~13쪽

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

문제 1

(1) $3x^2-xy+y^2+2x+y-5$

$=3x^2-xy+2x+y^2+y-5$

$=3x^2+(-y+2)x+y^2+y-5$

(2) $3x^2-xy+y^2+2x+y-5$

$=3x^2+2x-5-xy+y+y^2$

$=3x^2+2x-5+(-x+1)y+y^2$

문제 2

(1) $A+B$

$=(x^3+2x^2+4x-1)+(3x^3-x^2-5x+2)$

$=x^3+2x^2+4x-1+3x^3-x^2-5x+2$

$=4x^3+x^2-x+1$

(2) $A-B$

$=(x^3+2x^2+4x-1)-(3x^3-x^2-5x+2)$

$=x^3+2x^2+4x-1-3x^3+x^2+5x-2$

$=-2x^3+3x^2+9x-3$

문제 3

(1) $A+B=(5x^2+x-4)+(-x^2+2x+3)$

$=\boxed{4x^2+3x-1}$

$B+A=(-x^2+2x+3)+(5x^2+x-4)$

$=\boxed{4x^2+3x-1}$

따라서 $A+B$와 $B+A$의 결과는 같다.

(2) $(A+B)+C$

$=(4x^2+3x-1)+(x^2-2)$

$=\boxed{5x^2+3x-3}$

$A+(B+C)$

$=(5x^2+x-4)+\{(-x^2+2x+3)+(x^2-2)\}$

$=(5x^2+x-4)+(2x+1)$

$=\boxed{5x^2+3x-3}$

따라서 $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$의 결과는 같다.

001 하

(1) $4A+3B=4(x^2+2xy-y^2)+3(3x^2-xy+y^2)$

$=4x^2+8xy-4y^2+9x^2-3xy+3y^2$

$=13x^2+5xy-y^2$

(2) $2(A+2B)-4A$

$=2A+4B-4A$

$=-2A+4B$

$=-2(x^2+2xy-y^2)+4(3x^2-xy+y^2)$

$=-2x^2-4xy+2y^2+12x^2-4xy+4y^2$

$=10x^2-8xy+6y^2$

답 (1) $13x^2+5xy-y^2$ (2) $10x^2-8xy+6y^2$

002 중

$3(A-3B)-2(3A-4B)$

$=3A-9B-6A+8B$

$=-3A-B$

$=-3(x^3+5x-3)-(-3x^3+x^2-2x+1)$

$=-3x^3-15x+9+3x^3-x^2+2x-1$

$=-x^2-13x+8$

$\therefore a=-1,\ b=-13,\ c=8$

답 $a=-1,\ b=-13,\ c=8$

003 중

$A-\{2A-(2B+3C)\}-2C$

$=A-(2A-2B-3C)-2C$

$=A-2A+2B+3C-2C$

$=-A+2B+C$

$=-(x^3+x^2-3x+2)+2(-2x^3+3x^2+x-5)$
$+(-x^3+2x+1)$

$=-x^3-x^2+3x-2-4x^3+6x^2+2x-10$
$-x^3+2x+1$

$=-6x^3+5x^2+7x-11$

답 $-6x^3+5x^2+7x-11$

004 중

$A-2X=-3A+2B$에서 $-2X=-4A+2B$

$\therefore X=2A-B$

$=2(3x^2+2x-5)-(-x^2-4x+9)$

$=6x^2+4x-10+x^2+4x-9$

$=7x^2+8x-19$

답 $7x^2+8x-19$

005 중

$A+2B=-3x^2-2x+5$ …… ㉠

$3A-B=5x^2-6x-6$ …… ㉡

㉠×3−㉡을 하면

$7B=3(-3x^2-2x+5)-(5x^2-6x-6)$

$=-9x^2-6x+15-5x^2+6x+6$

$=-14x^2+21$

$\therefore B=-2x^2+3$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$A+2(-2x^2+3)=-3x^2-2x+5$

$\therefore A=-3x^2-2x+5-2(-2x^2+3)$

$=-3x^2-2x+5+4x^2-6$

$=x^2-2x-1$

답 $A=x^2-2x-1$, $B=-2x^2+3$

006 중

$A+B=5x^2+xy-2y^2$ …… ㉠

$A-B=x^2+3xy-6y^2$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=(5x^2+xy-2y^2)+(x^2+3xy-6y^2)$

$=6x^2+4xy-8y^2$

$\therefore A=3x^2+2xy-4y^2$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$(3x^2+2xy-4y^2)+B=5x^2+xy-2y^2$

$\therefore B=5x^2+xy-2y^2-(3x^2+2xy-4y^2)$

$=5x^2+xy-2y^2-3x^2-2xy+4y^2$

$=2x^2-xy+2y^2$

$\therefore A-3B=3x^2+2xy-4y^2-3(2x^2-xy+2y^2)$

$=3x^2+2xy-4y^2-6x^2+3xy-6y^2$

$=-3x^2+5xy-10y^2$

답 $-3x^2+5xy-10y^2$

007 중

$A-2B=3x^2-4x-12$ …… ㉠

$2A+3B=-x^2+6x+11$ …… ㉡

㉠×2−㉡을 하면

$-7B=2(3x^2-4x-12)-(-x^2+6x+11)$

$=6x^2-8x-24+x^2-6x-11$

$=7x^2-14x-35$

$\therefore B=-x^2+2x+5$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$A-2(-x^2+2x+5)=3x^2-4x-12$

$\therefore A=3x^2-4x-12+2(-x^2+2x+5)$

$=3x^2-4x-12-2x^2+4x+10$

$=x^2-2$

$\therefore A+B=(x^2-2)+(-x^2+2x+5)$

$=2x+3$

따라서 $a=0$, $b=2$, $c=3$이므로

$a+b+c=5$

답 5

008 상

$2A-3B=-x^2+4xy+5y^2$ …… ㉠

$3A-2B=x^2+6xy+10y^2$ …… ㉡

㉠×3−㉡×2를 하면

$-5B=3(-x^2+4xy+5y^2)-2(x^2+6xy+10y^2)$

$=-3x^2+12xy+15y^2-2x^2-12xy-20y^2$

$=-5x^2-5y^2$

$\therefore B=x^2+y^2$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$2A-3(x^2+y^2)=-x^2+4xy+5y^2$

$2A=-x^2+4xy+5y^2+3(x^2+y^2)$

$=-x^2+4xy+5y^2+3x^2+3y^2$

$=2x^2+4xy+8y^2$

$\therefore A=x^2+2xy+4y^2$

이때 $X-\frac{1}{2}A=B$에서

$X=\frac{1}{2}A+B$

$=\frac{1}{2}(x^2+2xy+4y^2)+(x^2+y^2)$

$=\frac{1}{2}x^2+xy+2y^2+x^2+y^2$

$=\frac{3}{2}x^2+xy+3y^2$

답 $\frac{3}{2}x^2+xy+3y^2$

Lecture 17~21쪽

02 다항식의 곱셈

009 하

$2x^2(3x^2+xy+y)=6x^4+2x^3y+2x^2y$

답 $6x^4+2x^3y+2x^2y$

010 하

$(a-3)(a^2+4)=a^3+4a-3a^2-12$
$=a^3-3a^2+4a-12$

답 $a^3-3a^2+4a-12$

011 하

$(x^2+2x+3)(x-1)=x^3-x^2+2x^2-2x+3x-3$
$=x^3+x^2+x-3$

답 x^3+x^2+x-3

012 하

$(2a+b-3)(a-4b+1)$
$=2a^2-8ab+2a+ab-4b^2+b-3a+12b-3$
$=2a^2-7ab-4b^2-a+13b-3$

답 $2a^2-7ab-4b^2-a+13b-3$

013 하

$(a+3b)^2=a^2+2\cdot a\cdot 3b+(3b)^2$
$=a^2+6ab+9b^2$

답 $a^2+6ab+9b^2$

014 하

$(2x-3y)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2$
$=4x^2-12xy+9y^2$

답 $4x^2-12xy+9y^2$

015 하

$(a+2b)(a-2b)=a^2-(2b)^2$
$=a^2-4b^2$

답 a^2-4b^2

016 하

$(x-4)(x+7)=x^2+(-4+7)x+(-4)\cdot 7$
$=x^2+3x-28$

답 $x^2+3x-28$

017 하

$(2x-5)(3x-2)$
$=(2\cdot 3)x^2+\{2\cdot(-2)+(-5)\cdot 3\}x+(-5)\cdot(-2)$
$=6x^2-19x+10$

답 $6x^2-19x+10$

018 하

$(a+b-2)^2$
$=a^2+b^2+(-2)^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot(-2)+2\cdot(-2)\cdot a$
$=a^2+b^2+4+2ab-4b-4a$

답 $a^2+b^2+4+2ab-4b-4a$

019 하

$(3x+1)^3=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2+1^3$
$=27x^3+27x^2+9x+1$

답 $27x^3+27x^2+9x+1$

020 하

$(4-y)^3=4^3-3\cdot 4^2\cdot y+3\cdot 4\cdot y^2-y^3$
$=64-48y+12y^2-y^3$

답 $64-48y+12y^2-y^3$

021 하

$(a-2)(a^2+2a+4)=(a-2)(a^2+a\cdot 2+2^2)$
$=a^3-2^3=a^3-8$

답 a^3-8

022 하

$(x-3)(x+4)(x+5)$
$=x^3+(-3+4+5)x^2$
$+\{(-3)\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot(-3)\}x+(-3)\cdot 4\cdot 5$
$=x^3+6x^2-7x-60$

답 $x^3+6x^2-7x-60$

023 하

$(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$
$=(x-y+z)\{x^2+(-y)^2+z^2$
$-x\cdot(-y)-(-y)\cdot z-zx\}$
$=x^3+(-y)^3+z^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot z$
$=x^3-y^3+z^3+3xyz$

답 $x^3-y^3+z^3+3xyz$

024 하

$(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$
$=(x^2+x\cdot 3+3^2)(x^2-x\cdot 3+3^2)$
$=x^4+x^2\cdot 3^2+3^4$
$=x^4+9x^2+81$

답 x^4+9x^2+81

025 중

$(2x^2-3x+8)(x^3-2x^2+3x+5)$의 전개식에서

x^2항이 나오는 경우는

(i) $(x^2$항$)\times($상수항$)$ ➡ $2x^2\cdot 5=10x^2$

(ii) $(x$항$)\times(x$항$)$ ➡ $(-3x)\cdot 3x=-9x^2$

(iii) $($상수항$)\times(x^2$항$)$ ➡ $8\cdot(-2x^2)=-16x^2$

이므로 x^2의 계수는

$10+(-9)+(-16)=-15$

x^3항이 나오는 경우는

(i) $(x^2$항$)\times(x$항$)$ ➡ $2x^2\cdot 3x=6x^3$

(ii) $(x$항$)\times(x^2$항$)$ ➡ $(-3x)\cdot(-2x^2)=6x^3$

(iii) $($상수항$)\times(x^3$항$)$ ➡ $8\cdot x^3=8x^3$

이므로 x^3의 계수는

$6+6+8=20$

따라서 x^2의 계수와 x^3의 계수의 합은

$-15+20=5$

답 5

026 중

(1) $(x+y-5)(4x-y+1)$의 전개식에서 xy항은

$x\cdot(-y)+y\cdot 4x=3xy$

따라서 xy의 계수는 3이다.

(2) $(3x^3+2x^2-x+5)(2x+1)^2$

$=(3x^3+2x^2-x+5)(4x^2+4x+1)$ ······ ㉠

㉠의 전개식에서 x^3항은

$3x^3\cdot 1+2x^2\cdot 4x+(-x)\cdot 4x^2=7x^3$

따라서 x^3의 계수는 7이다.

답 (1) 3 (2) 7

027 중

$(2x^2+3x-1)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x^2항은

$2x^2\cdot k+3x\cdot 2x+(-1)\cdot x^2$

$=(2k+6-1)x^2$

$=(2k+5)x^2$

이때 x^2의 계수가 13이므로

$2k+5=13,\ 2k=8$

$\therefore\ k=4$

답 4

028 중

$(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)^2$

$=(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)$

······ ㉠

㉠의 전개식에서 x^4항은

$1\cdot 4x^4+x\cdot 3x^3+2x^2\cdot 2x^2+3x^3\cdot x+4x^4\cdot 1=18x^4$

따라서 x^4의 계수는 18이다.

답 18

029 중

(1) $(x-3y+z)^2$

$=\{x+(-3y)+z\}^2$

$=x^2+(-3y)^2+z^2$
$\quad+2\cdot x\cdot(-3y)+2\cdot(-3y)\cdot z+2\cdot z\cdot x$

$=x^2+9y^2+z^2-6xy-6yz+2zx$

(2) $(3x+2y)^3$

$=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2+(2y)^3$

$=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

(3) $(5x+3)(25x^2-15x+9)$

$=(5x+3)\{(5x)^2-5x\cdot 3+3^2\}$

$=(5x)^3+3^3$

$=125x^3+27$

(4) $(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

$=\{(2x)^2+2x\cdot 3y+(3y)^2\}\{(2x)^2-2x\cdot 3y+(3y)^2\}$

$=(2x)^4+(2x)^2(3y)^2+(3y)^4$

$=16x^4+36x^2y^2+81y^4$

답 (1) $x^2+9y^2+z^2-6xy-6yz+2zx$
(2) $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$
(3) $125x^3+27$
(4) $16x^4+36x^2y^2+81y^4$

030 중

(1) $(-a+2b-c)^2$

$=\{(-a)+2b+(-c)\}^2$

$=(-a)^2+(2b)^2+(-c)^2+2\cdot(-a)\cdot 2b$
$\quad+2\cdot 2b\cdot(-c)+2\cdot(-c)\cdot(-a)$

$=a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$

(2) $(a-5b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot 5b+3\cdot a\cdot(5b)^2-(5b)^3$

$=a^3-15a^2b+75ab^2-125b^3$

(3) $(xy-1)(x^2y^2+xy+1)$

$=(xy-1)\{(xy)^2+xy\cdot 1+1^2\}$

$=(xy)^3-1^3$

$=x^3y^3-1$

(4) $(x-1)(x-2)(x-6)$

$=x^3+(-1-2-6)x^2+(2+12+6)x$
$+(-1)\cdot(-2)\cdot(-6)$

$=x^3-9x^2+20x-12$

(5) $(2x+y-4)(4x^2+y^2-2xy+8x+4y+16)$

$=(2x+y-4)(4x^2+y^2+16-2xy+4y+8x)$

$=(2x+y-4)\{(2x)^2+y^2+(-4)^2$
$-2x\cdot y-y\cdot(-4)-(-4)\cdot 2x\}$

$=(2x)^3+y^3+(-4)^3-3\cdot 2x\cdot y\cdot(-4)$

$=8x^3+y^3-64+24xy$

(6) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

$=\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}\{x^2-x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$

$=x^4+4x^2y^2+16y^4$

답 (1) $a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$
(2) $a^3-15a^2b+75ab^2-125b^3$
(3) x^3y^3-1
(4) $x^3-9x^2+20x-12$
(5) $8x^3+y^3-64+24xy$
(6) $x^4+4x^2y^2+16y^4$

031 중

$(x+3)^3-(x+4)(x^2-4x+16)$

$=(x^3+9x^2+27x+27)-(x^3+64)$

$=9x^2+27x-37$

답 $9x^2+27x-37$

032 중

$(x-1)^3(x^2+x+1)^3$

$=\{(x-1)(x^2+x+1)\}^3$

$=(x^3-1)^3$

$=(x^3)^3-3\cdot(x^3)^2\cdot 1+3\cdot x^3\cdot 1^2-1^3$

$=x^9-3x^6+3x^3-1$

따라서 x^6의 계수는 -3이다.

답 -3

033 중

(1) $x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x-1)(x^2+x+6)$

$=(X-1)(X+6)$

$=X^2+5X-6$

$=(x^2+x)^2+5(x^2+x)-6$ ← $X=x^2+x$를 대입한다.

$=x^4+2x^3+6x^2+5x-6$

(2) 공통부분이 나오도록 두 일차식끼리 짝을 지어 전개하면

$(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$

$=\{(x+1)(x-5)\}\{(x-1)(x-3)\}$

$=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)$

$x^2-4x=X$로 놓으면

(주어진 식)

$=(X-5)(X+3)$

$=X^2-2X-15$

$=(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$ ← $X=x^2-4x$를 대입한다.

$=x^4-8x^3+14x^2+8x-15$

답 (1) $x^4+2x^3+6x^2+5x-6$
(2) $x^4-8x^3+14x^2+8x-15$

034 중

(1) $(2a+b-c)(2a-b-c)$

$=\{(2a-c)+b\}\{(2a-c)-b\}$

$2a-c=X$로 놓으면

(주어진 식)

$=(X+b)(X-b)$

$=X^2-b^2$

$=(2a-c)^2-b^2$ ← $X=2a-c$를 대입한다.

$=4a^2-4ac+c^2-b^2$

(2) 공통부분이 나오도록 두 일차식끼리 짝을 지어 전개하면

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$

$x^2+2x=X$로 놓으면

(주어진 식)

$=(X-3)(X-8)$

$=X^2-11X+24$

$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$ ← $X=x^2+2x$를 대입한다.

$=x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

답 (1) $4a^2-4ac+c^2-b^2$
(2) $x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

035 중

$(x+1)(x+2)(x^2+3x-3)$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-3)$

$x^2+3x=X$로 놓으면

(주어진 식)
$=(X+2)(X-3)$
$=X^2-X-6$
$=(x^2+3x)^2-(x^2+3x)-6$ $\leftarrow X=x^2+3x$를 대입한다.
$=x^4+6x^3+8x^2-3x-6$
따라서 $a=6$, $b=8$, $c=-3$이므로
$a+b-c=6+8-(-3)=17$ 답 17

다른 풀이 $(x+1)(x+2)(x^2+3x-3)$
$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-3)$ …… ㉠
㉠의 전개식에서 x^3항은
$x^2\cdot 3x+3x\cdot x^2=6x^3$ $\therefore a=6$
㉠의 전개식에서 x^2항은
$x^2\cdot(-3)+3x\cdot 3x+2\cdot x^2=8x^2$ $\therefore b=8$
㉠의 전개식에서 x항은
$3x\cdot(-3)+2\cdot 3x=-3x$ $\therefore c=-3$
$\therefore a+b-c=6+8-(-3)=17$

036 상

$(a+b-c)(-a+b+c)=(a+b+c)(a-b+c)$에서 공통부분이 나오도록 식을 변형하면
$\{b+(a-c)\}\{b-(a-c)\}=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}$
$b^2-(a-c)^2=(a+c)^2-b^2$
$b^2-(a^2-2ac+c^2)=a^2+2ac+c^2-b^2$
$2a^2+2c^2=2b^2$
$\therefore a^2+c^2=b^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.
답 $\angle B=90°$인 직각삼각형

037 중

(1) $(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$
$=\{(x-2)(x^2+2x+4)\}\{(x+2)(x^2-2x+4)\}$
$=(x^3-2^3)(x^3+2^3)$
$=(9-8)(9+8)$ $\leftarrow x^3=9$를 대입한다.
$=17$
(2) $7-6=1$이므로
$(7+6)(7^2+6^2)(7^4+6^4)$
$=(7-6)(7+6)(7^2+6^2)(7^4+6^4)$
$=(7^2-6^2)(7^2+6^2)(7^4+6^4)$
$=(7^4-6^4)(7^4+6^4)$
$=7^8-6^8$
$\therefore m=8$, $n=8$
답 (1) 17 (2) $m=8$, $n=8$

038 중

$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$
$=(x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)$
$=(x^8-1)(x^8+1)$
$=x^{16}-1$
$=(\sqrt{2})^{16}-1$ $\leftarrow x=\sqrt{2}$를 대입한다.
$=2^8-1=255$
답 255

039 중

$99\cdot(100^2+100+1)=(100-1)(100^2+100+1)$
$=100^3-1^3$
$=(10^2)^3-1$
$=10^6-1$
$\therefore p=6$ 답 6

040 상

$102^2+199\cdot 201$
$=(100+2)^2+(200-1)(200+1)$
$=100^2+2\cdot 100\cdot 2+2^2+200^2-1^2$
$=10000+400+4+40000-1$
$=50403$
따라서 주어진 수는 다섯 자리의 자연수이다.
답 다섯 자리의 자연수

Lecture 24~27쪽

03 곱셈 공식의 변형

041 중

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서
$2^2=12+2xy$, $2xy=-8$
$\therefore xy=-4$
(1) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\cdot(-4)\cdot 2=32$

(2) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=2^2-4\cdot(-4)=20$

이때 $x>y$에서 $x-y>0$이므로

$x-y=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(3) (2)에서 $x-y=2\sqrt{5}$이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(2\sqrt{5})^3+3\cdot(-4)\cdot2\sqrt{5}$

$=40\sqrt{5}-24\sqrt{5}=16\sqrt{5}$

답 (1) 32 (2) $2\sqrt{5}$ (3) $16\sqrt{5}$

042 중

(1) $a^2+ab+b^2=(a^2+b^2)+ab$

$=\{(a-b)^2+2ab\}+ab$

$=(a-b)^2+3ab$

$=3^2+3\cdot(-2)=3$

(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=3^2+2\cdot(-2)=5$

$\therefore\ a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$

$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$

$=5^2-2\cdot(-2)^2=17$

답 (1) 3 (2) 17

043 중

$x=1+\sqrt{3},\ y=1-\sqrt{3}$이므로

$x+y=2,\ xy=-2$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$=\dfrac{2^3-3\cdot(-2)\cdot2}{-2}=-10$

답 -10

044 상

$a^2-b^2=1,\ ab=\sqrt{2}$이므로

$a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$

$=(a^2-b^2)^3+3a^2b^2(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)^3+3(ab)^2(a^2-b^2)$

$=1^3+3\cdot(\sqrt{2})^2\cdot1=7$

답 7

045 중

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=3^2-2=7$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\cdot3=18$

(3) (1)에서 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$이므로

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$

$=7-2=5$

이때 $0<x<1$에서 $\dfrac{1}{x}>1$이므로 $x-\dfrac{1}{x}<0$

$\therefore\ x-\dfrac{1}{x}=-\sqrt{5}$

답 (1) 7 (2) 18 (3) $-\sqrt{5}$

046 중

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

$=2^2+2=6$

(2) (1)에서 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$이므로

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$

$=6+2=8$

$\therefore\ x+\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

답 (1) 6 (2) $\pm2\sqrt{2}$

047 중

$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}+2$

$=5+2=7$

이때 $a>0$에서 $a+\dfrac{1}{a}>0$이므로

$a+\dfrac{1}{a}=\sqrt{7}$

$\therefore\ a^3+\dfrac{1}{a^3}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$

$=(\sqrt{7})^3-3\cdot\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

답 $4\sqrt{7}$

048 상

$x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

$=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}+\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}$

$=(4^3-3\cdot4)+(4^2-2)=66$

답 66

049 중

(1) $(a+b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

에서 $5^2=9+2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=16$

$\therefore ab+bc+ca=8$

(2) $(ab+bc+ca)^2$

$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$

$+2\cdot ab\cdot bc+2\cdot bc\cdot ca+2\cdot ca\cdot ab$

$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2abc^2+2a^2bc$

$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

이때 (1)에서 $ab+bc+ca=8$이므로

$8^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\cdot4\cdot5$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=24$

(3) (1)에서 $ab+bc+ca=8$이므로

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$

$+3abc$

$=5\cdot(9-8)+3\cdot4=17$

답 (1) 8 (2) 24 (3) 17

050 중

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

에서 $6^2=24+2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=12$ $\quad\therefore ab+bc+ca=6$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}$

답 $-\frac{3}{4}$

051 중

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$a^2+b^2+c^2=1^2-2\cdot(-2)=5$

(1) $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)$

$+(c^2+2ca+a^2)$

$=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca$

$=2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$

$=2\cdot5+2\cdot(-2)=6$

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$

에서 $16-3abc=1\cdot\{5-(-2)\}$

$3abc=9$ $\quad\therefore abc=3$

$\therefore \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{5}{3}$

답 (1) 6 (2) $\frac{5}{3}$

다른 풀이 (1) $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

에서

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$=2\cdot\{5+(-2)\}=6$

052 상

$x-y=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$y-z=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $x-z=5$ $\quad\therefore z-x=-5$

$\therefore x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$=\frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)$

$+(z^2-2zx+x^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{2^2+3^2+(-5)^2\}=19$

답 19

053 중

직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x, y라 하면

(직사각형의 둘레의 길이)$=2(x+y)=34$

$\therefore x+y=17$

(직사각형의 대각선의 길이)$=\sqrt{x^2+y^2}=15$

$\therefore\ x^2+y^2=225$

이때 (직사각형의 넓이)$=xy$이므로

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서

$17^2=225+2xy,\ 2xy=64 \qquad \therefore\ xy=32$

따라서 직사각형의 넓이는 32이다. 답 32

054 중

직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면

(모든 모서리의 길이의 합)$=4(x+y+z)=88$

$\therefore\ x+y+z=22$

(대각선의 길이)$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=196$

이때 (직육면체의 겉넓이)$=2(xy+yz+zx)$이므로

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2&=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\\&=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

에서 $22^2=196+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

따라서 직육면체의 겉넓이는 288이다. 답 288

개념 보충 **직사각형, 직육면체의 대각선의 길이**

(1) 직사각형의 가로의 길이, 세로의 길이를 각각 a, b라 할 때, 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

(2) 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이와 높이를 각각 a, b, c라 할 때, 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

055 상

직사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{DC}}=x$라 하면 이 직사각형의 넓이가 1이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{x}$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 16이므로

$2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=16 \qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=8$

정사각형 P의 넓이는 $\overline{\mathrm{DC}}^2=x^2$

정사각형 Q의 넓이는 $\overline{\mathrm{AD}}^2=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}$

따라서 두 정사각형 P, Q의 넓이의 합은

$$\begin{aligned}x^2+\frac{1}{x^2}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\\&=8^2-2=62\end{aligned}$$

답 62

Lecture 29~31쪽

04 다항식의 나눗셈

문제 1

$$\begin{aligned}f(x)&=(2x-1)(x^2+3x+1)+5\\&=2x^3+6x^2+2x-x^2-3x-1+5\\&=2x^3+5x^2-x+4\end{aligned}$$

056 중

다항식 $3x^3+4x^2-7$을 x^2+2x+3으로 나누면

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 3x-2 \\
x^2+2x+3\,\big) & 3x^3+4x^2\qquad\ -7 \\
 & 3x^3+6x^2+9x \\ \hline
 & -2x^2-9x-7 \\
 & -2x^2-4x-6 \\ \hline
 & -5x-1
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x-2$, $R(x)=-5x-1$이므로

$Q(1)=1,\ R(-1)=4$

$\therefore\ Q(1)+R(-1)=5$ 답 5

057 하

다항식 $4x^3+6x^2-x-5$를 $2x^2-x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 2x+4 \\
2x^2-x-1\,\big) & 4x^3+6x^2-\ x-5 \\
 & 4x^3-2x^2-2x \\ \hline
 & 8x^2+\ x-5 \\
 & 8x^2-4x-4 \\ \hline
 & 5x-1
\end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=5$, $d=-1$이므로

$a+b+c+d=4$ 답 4

058 중

다항식 $x^4-x^3-8x^2+4x$를 x^2+x+2로 나누면

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2-2x-8 \\
x^2+x+2\,\big) & x^4-\ x^3-\ 8x^2+\ 4x \\
 & x^4+\ x^3+\ 2x^2 \\ \hline
 & -2x^3-10x^2+\ 4x \\
 & -2x^3-\ 2x^2-\ 4x \\ \hline
 & -\ 8x^2+\ 8x \\
 & -\ 8x^2-\ 8x-16 \\ \hline
 & 16x+16
\end{array}$$

$\therefore\ Q(x)=x^2-2x-8$

$Q(x)=x^2-2x-8$을 $x-3$으로 나누면

$$\begin{array}{rr} & x+1 \\ x-3\,\big) & \overline{x^2-2x-8} \\ & x^2-3x \\ \cline{2-2} & x-8 \\ & x-3 \\ \cline{2-2} & -5 \end{array}$$

따라서 $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $x+1$이다.

답 $x+1$

059 중

다항식 $2x^3+ax+b$를 $-x^2+x-5$로 나누면

$$\begin{array}{rr} & -2x-2 \\ -x^2+x-5\,\big) & \overline{2x^3 \qquad + \qquad ax+b} \\ & 2x^3-2x^2+10x \qquad \\ \cline{2-2} & 2x^2+(a-10)x+b \\ & 2x^2-2x+10 \\ \cline{2-2} & (a-8)x+b-10 \end{array}$$

이때 나머지가 $3x-4$이므로

$a-8=3$, $b-10=-4$

따라서 $a=11$, $b=6$이므로

$a+b=17$

답 17

060 중

다항식 $x^4+7x^2-2x+15$를 다항식 $P(x)$로 나누었을 때의 몫이 x^2-x+2이고 나머지가 $2x+3$이므로

$x^4+7x^2-2x+15=P(x)\cdot(x^2-x+2)+2x+3$에서

$P(x)\cdot(x^2-x+2)=(x^4+7x^2-2x+15)-(2x+3)$

$=x^4+7x^2-4x+12$

$\therefore P(x)=(x^4+7x^2-4x+12)\div(x^2-x+2)$

이때 $x^4+7x^2-4x+12$를 x^2-x+2로 나누면

$$\begin{array}{rr} & x^2+x+6 \\ x^2-x+2\,\big) & \overline{x^4 \qquad +7x^2-4x+12} \\ & x^4-x^3+2x^2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2} & x^3+5x^2-4x \qquad \\ & x^3-x^2+2x \qquad \\ \cline{2-2} & 6x^2-6x+12 \\ & 6x^2-6x+12 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=x^2+x+6$

답 x^2+x+6

061 하

다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 몫이 $x-2$이고 나머지가 7이므로

$f(x)=(x^3-1)(x-2)+7$

$=x^4-2x^3-x+9$

$\therefore f(-1)=1+2+1+9=13$

답 13

062 중

다항식 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 몫이 x^2-7이고 나머지가 16이므로

$f(x)=(x+4)(x^2-7)+16$

$=x^3+4x^2-7x-12$

이때 $f(x)=x^3+4x^2-7x-12$를 $x+2$로 나누면

$$\begin{array}{rr} & x^2+2x-11 \\ x+2\,\big) & \overline{x^3+4x^2-7x-12} \\ & x^3+2x^2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2} & 2x^2-7x \qquad \\ & 2x^2+4x \qquad \\ \cline{2-2} & -11x-12 \\ & -11x-22 \\ \cline{2-2} & 10 \end{array}$$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $x^2+2x-11$이고 나머지는 10이다.

답 몫: $x^2+2x-11$, 나머지: 10

063 상

다항식 $2x^4+x^3-9x^2+x+7$을 x^2+x-3으로 나누면

$$\begin{array}{rr} & 2x^2-x-2 \\ x^2+x-3\,\big) & \overline{2x^4+x^3-9x^2+x+7} \\ & 2x^4+2x^3-6x^2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2} & -x^3-3x^2+x \qquad \\ & -x^3-x^2+3x \qquad \\ \cline{2-2} & -2x^2-2x+7 \\ & -2x^2-2x+6 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$$

$\therefore 2x^4+x^3-9x^2+x+7$

$=(x^2+x-3)(2x^2-x-2)+1$

이때 $x^2+x-3=0$이므로

$2x^4+x^3-9x^2+x+7=0\cdot(2x^2-x-2)+1=1$

답 1

중단원 연습문제

32~35쪽

064 다항식의 덧셈과 뺄셈

[전략> 연산 ★에 맞게 주어진 식을 간단히 한다.

$A\bigstar B=3A-2B$이므로

$(x^2-3x+2)\bigstar(-x^2+x-2)$

$=3(x^2-3x+2)-2(-x^2+x-2)$

$=3x^2-9x+6+2x^2-2x+4$

$=5x^2-11x+10$

답 $5x^2-11x+10$

065 다항식의 덧셈과 뺄셈

[전략> 주어진 조건을 A, B에 대한 연립방정식으로 생각하여 다항식 A, B를 먼저 구한다.

$A+B=3x^2+2x-4$ ······ ㉠

$A-2B=6x^2-7x+8$ ······ ㉡

㉠－㉡을 하면

$3B=-3x^2+9x-12$

$\therefore B=-x^2+3x-4$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$A+(-x^2+3x-4)=3x^2+2x-4$

$\therefore A=3x^2+2x-4-(-x^2+3x-4)$

$=4x^2-x$

$\therefore 2(-A+B)+(4A-B)$

$=-2A+2B+4A-B$

$=2A+B$

$=2(4x^2-x)+(-x^2+3x-4)$

$=8x^2-2x-x^2+3x-4$

$=7x^2+x-4$

답 $7x^2+x-4$

066 다항식의 전개식에서 계수 구하기

[전략> $(x+5)^2$, $(2x-3)^3$을 각각 전개한 후, x^4항이 나오는 경우만 전개한다.

$(x+5)^2(2x-3)^3$

$=(x^2+10x+25)(8x^3-36x^2+54x-27)$ ······ ㉠

㉠의 전개식에서 x^4항은

$x^2\cdot(-36x^2)+10x\cdot 8x^3=44x^4$

따라서 x^4의 계수는 44이다.

답 44

067 공통부분이 있는 다항식의 전개

[전략> 공통부분이 나오도록 식을 변형한 후, 공통부분을 한 문자로 놓고 전개한다.

[해결 과정]

$(x-y+z)(x+y-z)=\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$

··· 30% 배점

[답 구하기]

$y-z=A$로 놓으면

(주어진 식)$=(x-A)(x+A)$

$=x^2-A^2$ ··· 40% 배점

$=x^2-(y-z)^2$

$=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-y^2+2yz-z^2$ ··· 30% 배점

답 $x^2-y^2+2yz-z^2$

068 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

[전략> 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 주어진 식을 5^m-3^m 꼴이 나올 때까지 정리한다.

$(5+3)(5^2+3^2)(5^4+3^4)(5^8+3^8)$

$=\frac{1}{2}(5-3)(5+3)(5^2+3^2)(5^4+3^4)(5^8+3^8)$

$=\frac{1}{2}(5^2-3^2)(5^2+3^2)(5^4+3^4)(5^8+3^8)$

$=\frac{1}{2}(5^4-3^4)(5^4+3^4)(5^8+3^8)$

$=\frac{1}{2}(5^8-3^8)(5^8+3^8)$

$=\frac{1}{2}(5^{16}-3^{16})$

답 ②

069 곱셈 공식의 변형; 문자가 2개인 경우

[전략> $x-y$, xy의 값을 이용하여 $x^4y^2+x^2y^4$의 값을 구할 수 있도록 식을 변형한다.

$x^4y^2+x^2y^4=x^2y^2(x^2+y^2)$

$=(xy)^2\cdot\{(x-y)^2+2xy\}$

$=(-1)^2\cdot\{(\sqrt{5})^2+2\cdot(-1)\}=3$

답 3

070 곱셈 공식의 변형; $x+\frac{1}{x}$ 꼴

[전략> $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$를 이용한다.

$x^2+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=(6^2-2)+2\cdot 6=46$

답 46

071 곱셈 공식의 변형; 문자가 3개인 경우

[전략] 곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 먼저 구한다.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\qquad\qquad=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

에서 $1^2=5+2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=-4 \qquad \therefore ab+bc+ca=-2$

$\therefore (1-a)(1-b)(1-c)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+(-2)-(-4)=2$

답 2

[참고] $(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

를 이용하면

$(1-a)(1-b)(1-c)$

$=1^3+(-a-b-c)\cdot 1^2+(ab+bc+ca)\cdot 1+(-abc)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

072 곱셈 공식의 도형에의 활용

[전략] 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 네 정사각형의 넓이의 합은 $2(x^2+y^2)$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면

(직사각형의 둘레의 길이)$=2(x+y)=20$

$\therefore x+y=10$

(직사각형의 넓이)$=xy=18$

이때 네 정사각형의 넓이의 합은 $2(x^2+y^2)$이므로

$2(x^2+y^2)=2\{(x+y)^2-2xy\}$

$\qquad\qquad=2(10^2-2\cdot 18)=128$

따라서 네 정사각형의 넓이의 합은 128 cm^2이다.

답 128 cm^2

073 다항식의 나눗셈에 대한 등식; $A=BQ+R$

[전략] 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$임을 이용하여 주어진 조건을 등식으로 나타낸다.

다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x+1)Q(x)+4x-1$

$\therefore xf(x)=x(x^2-x+1)Q(x)+4x^2-x$

이때 $xf(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지는 $4x^2-x$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 $4x^2-x$를 x^2-x+1로 나누면 구하는 나머지는 $3x-4$이다.

$$\begin{array}{r}
4 \\
x^2-x+1\;\overline{)\;4x^2-x} \\
\underline{4x^2-4x+4} \\
3x-4
\end{array}$$

답 $3x-4$

074 공통부분이 있는 다항식의 전개⊕다항식의 전개식에서 계수 구하기

[전략] 두 다항식의 공통부분인 $1+2x+3x^2$을 한 문자로 놓고 전개한다.

$1+2x+3x^2=A$로 놓으면

$(1+2x+3x^2)^3=A^3$,

$(1+2x+3x^2+4x^3)^3=(A+4x^3)^3$

$\qquad\qquad=A^3+12A^2x^3+48Ax^6+64x^9$

이때 $12A^2x^3+48Ax^6+64x^9$에서는 x항이 나올 수 없으므로 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$의 전개식에서 x의 계수는 A^3, 즉 $(1+2x+3x^2)^3$의 x의 계수와 같다.

따라서 $a=b$이므로

$a-b=0$

답 0

[참고] $(1+2x+3x^2)^3$에서 $1+2x=X$로 놓으면

$(X+3x^2)^3=X^3+9X^2x^2+27Xx^4+27x^6$

$\qquad=(1+2x)^3+9(1+2x)^2\cdot x^2+27(1+2x)\cdot x^4+27x^6$

이므로 x의 계수는 $(1+2x)^3$의 전개식에서만 존재한다.

이때 $(1+2x)^3=1+6x+12x^2+8x^3$이므로 $(1+2x+3x^2)^3$의 전개식에서 x의 계수는 6이다.

075 다항식의 전개식에서 계수 구하기

[전략] $P_{n+1}(x)=P_n(x+n)$에 $n=9, 8, 7, \cdots, 2, 1$을 차례대로 대입하여 $P_{10}(x)$를 구한다.

$P_{n+1}(x)=P_n(x+n)\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$P_{10}(x)=P_9(x+9)$

$\qquad=P_8(x+9+8) \qquad \leftarrow P_9(x)=P_8(x+8)$

$\qquad=P_7(x+9+8+7) \qquad \leftarrow P_8(x)=P_7(x+7)$

$\qquad\vdots$

$\qquad=P_1(x+9+8+7+\cdots+1)$

$\qquad=P_1(x+45)$

$\qquad=(x+45)^3+(x+45)^2+(x+45)+1$

$\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 전개식에서 x^2항은

$3\cdot x^2\cdot 45+x^2=136x^2$

따라서 $P_{10}(x)$의 x^2의 계수는 136이다.

답 136

076 다항식의 곱셈의 활용

[전략> x, $2y$, z 중 적어도 하나는 3이므로 $x=3$ 또는 $2y=3$ 또는 $z=3$임을 이용하여 조건 (가)를 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서 $x=3$ 또는 $2y=3$ 또는 $z=3$이므로

$(x-3)(2y-3)(z-3)=0$

으로 놓으면

$(2xy-3x-6y+9)(z-3)=0$

$2xyz-6xy-3xz+9x-6yz+18y+9z-27=0$

$2xyz-3(2xy+2yz+zx)+9(x+2y+z)-27=0$ …… ㉠

조건 (나)에서

$3(x+2y+z)=2xy+2yz+zx$

이를 ㉠에 대입하면

$2xyz-3\cdot3(x+2y+z)+9(x+2y+z)-27=0$

$2xyz-9(x+2y+z)+9(x+2y+z)-27=0$

$2xyz-27=0$

$\therefore 2xyz=27$ 답 27

077 곱셈 공식의 변형; 문자가 2개인 경우

[전략> 주어진 조건을 이용하여 $m+n$, mn의 값을 먼저 구한다.

[해결 과정]

$m+n=(ax+by)+(bx+ay)$

$=a(x+y)+b(x+y)$

$=(x+y)(a+b)$

$=(-3)\cdot4=-12$ … 40% 배점

$mn=(ax+by)(bx+ay)$

$=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$

$=ab(x^2+y^2)+(a^2+b^2)xy$

$=ab\{(x+y)^2-2xy\}+\{(a+b)^2-2ab\}xy$

$=3\{(-3)^2-2\cdot1\}+(4^2-2\cdot3)\cdot1$

$=21+10=31$ … 40% 배점

[답 구하기]

$\therefore m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$

$=(-12)^2-2\cdot31=82$ … 20% 배점

답 82

078 곱셈 공식의 변형; 문자가 2개인 경우

[전략> $x+y$, xy의 값을 이용하여 x^4+y^4, x^5+y^5의 값을 구할 수 있도록 식을 변형한다.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=1^2-2\cdot(-3)=7$

$\therefore x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=7^2-2\cdot(-3)^2$ $\leftarrow x^2y^2=(xy)^2$

$=31$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=1^3-3\cdot(-3)\cdot1=10$

$\therefore x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$

$=7\cdot10-(-3)^2\cdot1$ $\leftarrow x^2y^2=(xy)^2$

$=61$

$\therefore x^4+y^4+x^5+y^5=31+61=92$ 답 92

079 곱셈 공식의 변형; 문자가 3개인 경우

[전략> 주어진 조건과 곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$, abc의 값을 먼저 구한다.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=1$

$\therefore ab+bc+ca=abc$ …… ㉠

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

에서 $2^2=6+2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=-2$ $\quad\therefore ab+bc+ca=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $abc=-1$

$\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2$

$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

$=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

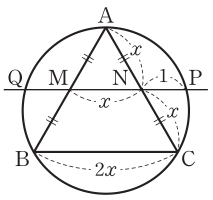
$=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{(abc)^2}$

$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}$

$=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)\cdot2}{(-1)^2}=5$ 답 5

080 곱셈 공식의 도형에의 활용

[전략> 원의 성질을 이용하여 x에 대한 식을 세운 후, 곱셈 공식의 변형을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 직선 MN이 정삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중에서 점 P가 아닌 점을 Q라 하자.

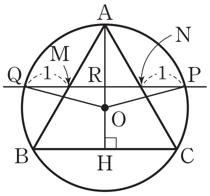
두 점 M, N이 각각 두 변 AB, AC의 중점이고 삼각형

ABC는 정삼각형이므로

$\overline{BC}=2\overline{MN}=2x$

$\overline{AN}=\overline{NC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$

꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면 $\overline{AH}$는 원의 중심 O를 지나므로 △ORQ와 △ORP는 합동이고 $\overline{MR}=\overline{NR}$이다.



$\therefore \overline{QM}=\overline{PN}=1$

$\therefore \overline{QN}=x+1$

원에서의 비례 관계에 의하여 $\overline{NA}\cdot\overline{NC}=\overline{NP}\cdot\overline{NQ}$이므로

$x\cdot x=1\cdot(x+1)$, $x^2=x+1$

$\therefore x^2-x-1=0$ ······ ㉠

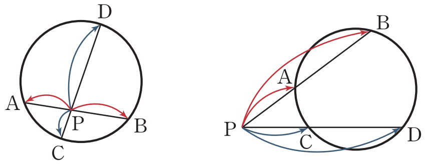
$x\neq 0$이므로 ㉠의 양변을 x로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x-\frac{1}{x}=1$

$\therefore 10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=10\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}$

$=10(1^2+2)=30$

답 30

> **개념 보충** 원에서의 비례 관계
>
> 한 원에서 두 현 AB, CD 또는 그 연장선이 만나는 점을 P라 하면
>
> $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$
>
> 
>

081 다항식의 나눗셈의 성질+곱셈 공식의 변형

전략 A^3-B^3을 x에 대한 식으로 나타낸 후, x^2으로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구한다.

$A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$ ······ ㉠

에서

$A-B=(x^2-x+1)-(-x+1)=x^2$

$AB=(x^2-x+1)(-x+1)$

$=-x^3+x^2+x^2-x-x+1$

$=-x^3+2x^2-2x+1$

이므로

㉠에서

$A^3-B^3=(x^2)^3+3(-x^3+2x^2-2x+1)\cdot x^2$

$=x^6-3x^5+6x^4-6x^3+3x^2$

$=x^2(x^4-3x^3+6x^2-6x+3)$

이때 A^3-B^3을 x^2으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이므로

$Q(x)=x^4-3x^3+6x^2-6x+3$

$\therefore Q(1)=1-3+6-6+3=1$

답 1

082 다항식의 나눗셈에 대한 등식; $A=BQ+R$

전략 $x=1-\sqrt{2}$를 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형하여 주어진 식의 값을 구한다.

$x=1-\sqrt{2}$에서

$x-1=-\sqrt{2}$ ······ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면 $(x-1)^2=(-\sqrt{2})^2$

$\therefore x^2-2x-1=0$ ······ ㉡

$2x^3+x^2-11x-6$을 x^2-2x-1로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & 2x+5 \\ \hline x^2-2x-1 & 2x^3+x^2-11x-6 \\ & 2x^3-4x^2-2x \\ \hline & 5x^2-9x-6 \\ & 5x^2-10x-5 \\ \hline & x-1 \end{array}$$

$\therefore 2x^3+x^2-11x-6$

$=(x^2-2x-1)(2x+5)+x-1$

$=x-1$ ($\because$ ㉡)

$=-\sqrt{2}$ ($\because$ ㉠)

답 $-\sqrt{2}$

083 다항식의 나눗셈의 도형에의 활용

전략 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이와 높이를 각각 $nQ(n)+R$ ($Q(n)$은 몫, R는 나머지) 꼴로 나타낸다.

직육면체의 밑면의 가로의 길이는

$n^2+3n=n(n+3)$ ← 길이가 n이 되도록 $(n+3)$개로 자를 수 있다.

세로의 길이는

$n+1=n\cdot 1+1$ ← 길이가 n이 되도록 1개로 자를 수 있고, 1이 남는다.

높이는

n^3+3n^2+2n+2

$=n(n^2+3n+2)+2$ ← 길이가 n이 되도록 (n^2+3n+2)개로 자를 수 있고, 2가 남는다.

따라서 한 모서리의 길이가 n인 정육면체는 최대 $(n+3)\cdot 1\cdot(n^2+3n+2)$개 만들 수 있으므로 구하는 정육면체의 최대 개수는

$(n+3)\cdot 1\cdot(n^2+3n+2)=(n+1)(n+2)(n+3)$

답 ③